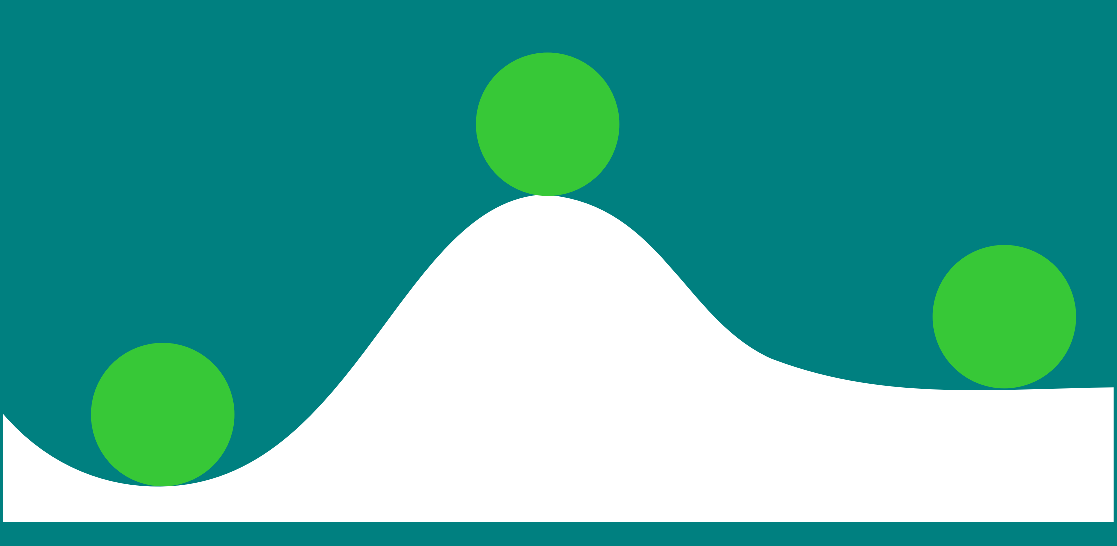
V. Starjinski

MÉCANIQUE RATIONNELLE



Éditions Mir Moscou

В. М. СТАРЖИНСКИЙ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

V. STARJINSKI

MÉCANIQUE RATIONNELLE

COURS ABRÉGÉ
ADAPTÉ AU PROGRAMME COMPLET
DES ÉCOLES TECHNIQUES
SUPÉRIEURES

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe
par VLADIMIR KOTLIAR

На французском языке

INTRODUCTION

1. Objet de la mécanique rationnelle. La mécanique rationnelle, ou théorique, est une science qui étudie le mouvement de la matière sous sa forme la plus simple, une science qui traite des lois générales régissant le mouvement mécanique et l'état d'équilibre des corps ou des parties de corps matériels.

Les classiques du marxisme-léninisme ont donné des définitions exhaustives de la matière et du mouvement. « La matière est une catégorie philosophique servant à désigner la réalité objective donnée à l'homme dans ses sensations qui la copient, la photographient, la reflètent, et qui existe indépendamment des sensations. » *) La mécanique rationnelle s'attache à étudier les corps réels, ou matériels, c'est-à-dire les corps qui existent hors de notre conscience et indépendamment de celle-ci.

Par mouvement de la matière on entend, au sens large, tous les changements qui se produisent pendant les processus thermiques, chimiques, électromagnétiques, intra-atomiques et autres. « Le mouvement, au sens le plus général, conçu comme mode d'existence de la matière, comme attribut inhérent à elle, embrasse tous les changements et tous les processus qui se produisent dans l'univers, du simple changement de lieu jusqu'à la pensée. » **) La mécanique rationnelle se borne à considérer la forme la plus élémentaire du mouvement, à savoir : le mouvement mécanique.

Par *mouvement mécanique*, on entend le changement de position relative des corps matériels qui se produit dans le cours du temps. Puisque l'état d'équilibre n'est qu'un cas particulier du mouvement, la mécanique rationnelle se donne aussi comme objet l'étude de l'équilibre des corps matériels.

En observant différents phénomènes, on remarque que toutes les propriétés du corps matériel sont loin d'exercer la même influence sur le déroulement du phénomène ou sur le résultat final de celui-ci.

---

*) V. I. Lénine, *Œuvres*, Paris-Moscou, t. 30, 1962, p. 132.

**) F. Engels, *Dialectique de la nature*, P., Editions sociales, 1952, p. 75.

Supposons qu'on étudie la répartition des efforts exercés par une lourde poutre sur ses deux appuis. L'expérience montre que ces efforts dépendent étroitement de la disposition des appuis mais sont pratiquement indépendants de la flexion (quand elle est petite): on est donc en droit de substituer à la poutre réelle une poutre imaginaire parfaite, indéformable. Le même raisonnement, appliqué à d'autres phénomènes, conduit à la notion de *modèle du corps*: point matériel, charge ponctuelle et ainsi de suite. Sans ces simplifications, on aurait à surmonter des difficultés infinies, même dans les cas les plus simples. Il convient de se rappeler toutefois qu'il n'existe dans la nature ni corps solides parfaits, ni points matériels, ni charges ponctuelles, etc. : ce ne sont que des abstractions utiles, introduites pour examiner la question sur le plan théorique et dégager la solution par les moyens les plus faciles.

Le présent cours a pour objet la mécanique classique, c'est-à-dire une mécanique fondée sur des lois connues dont les premiers énoncés rigoureux remontent à Galilée (1564-1642) et à Newton (1643-1727). Vers la fin du XIXe siècle et au début du XXe, les chercheurs ont constaté que les lois de la mécanique classique cessent d'être applicables au mouvement des particules microscopiques et des corps dès que leurs vitesses deviennent proches de celle de la lumière. Le commencement du XXe siècle marque l'apparition de la mécanique relativiste, qui a pour base la théorie de la Relativité développée par A. Einstein (1879-1955). Cette théorie a précisé les limites de la validité des lois de la mécanique classique en établissant des relations quantitatives rigoureuses entre l'espace, le temps, la masse et l'énergie. Cela n'a d'ailleurs nullement diminué la portée de la mécanique classique en tant que méthode pratique d'étude des mouvements des corps macroscopiques dont les vitesses sont faibles devant celle de la lumière : il s'agit en fait des mouvements qu'on rencontre fréquemment dans la technique.

2. Méthodes de la mécanique rationnelle. La méthode fondamentale de cognition du monde objectif est le matérialisme dialectique. Cette méthode est pleinement applicable, en particulier, à la mécanique rationnelle.

Comme les autres sciences de la nature, la mécanique rationnelle utilise beaucoup les abstractions. La méthode des abstractions, jointe à la généralisation des résultats de l'observation immédiate, de la production et de l'expérience, permet de dégager quelques concepts premiers qui se posent en axiomes. Tous les développements de la mécanique classique se déduisent de ces axiomes par voie de raisonnement logique et de calcul mathématique. Si l'on se rappelle en outre que la mécanique rationnelle s'attache principalement à établir des rapports quantitatifs, on comprend l'intérêt exceptionnel de l'analyse mathématique en mécanique rationnelle. Or, l'exis-

tence d'un appareil mathématique développé et l'absence des travaux pratiques dans la plupart des chapitres du cours de cette discipline ne veulent pas dire pour autant que les concepts et les conclusions de la mécanique rationnelle se passent de toute démonstration expérimentale. Comme dans tous les autres domaines de la connaissance, la justesse des postulats de la mécanique rationnelle est vérifiée en fin de compte par l'expérience et, d'une façon plus générale, par la pratique. « Les choses existent hors de nous. Nos perceptions et nos représentations en sont les images. Le contrôle de ces images, la distinction entre les images exactes et les images erronées, nous est fourni par la pratique. » *)

C'est le cours historique du développement de la science, la mécanique rationnelle y comprise, qui confirme le rôle exclusif de l'expérience, de la pratique, pour savoir si telle ou telle hypothèse ou théorie est vraie ou fausse. En effet, les savants de la Renaissance, n'ayant pour toute arme que l'expérience matérielle, réussirent toutefois à réfuter bon nombre de concepts erronés imposés en mécanique et en astronomie par l'autorité d'Aristote ou de Ptolémée, pour dégager finalement la voie de la vraie science malgré les obstacles de l'église ; seule l'expérience permit de déterminer le domaine de validité de la mécanique classique.

3. Petit historique. Intimement liée à la pratique des hommes, la mécanique rationnelle eut tôt fait de devenir une science à part entière. Bien que les premiers écrits scientifiques ne remontent qu'au IV[e] siècle avant notre ère, les vestiges des bâtiments antiques nous font savoir que les hommes possédaient les rudiments des connaissances en mécanique depuis beaucoup plus longtemps.

La mécanique se développait d'abord principalement du côté de la statique, c'est-à-dire de la recherche de l'équilibre des corps matériels. Les bases scientifiques de la statique étaient jetées déjà vers le III[e] siècle avant notre ère, surtout grâce aux travaux d'Archimède, grand savant de l'antiquité (287-212 avant notre ère). Archimède a donné la solution exacte au problème d'équilibre du levier, a créé la notion de centre de gravité, a découvert la loi d'hydrostatique qui porte son nom, et ainsi de suite.

Bien que les problèmes de mouvement des corps soient de tous temps au centre de l'attention des savants, les premiers pas de la cinématique et surtout de la dynamique, chapitre de mécanique rationnelle traitant du mouvement des corps sous l'angle des interactions mécaniques, ne datent que de la fin du XVI[e] — début du XVII[e] siècles. Comme nous l'avons déjà dit, ce sont Galilée et Newton qui ont joué un rôle de premier plan dans l'établissement de la dynamique. La période entre Archimède et Newton, longue de plus de deux mille ans, peut être regardée, sur le plan du développement de la mécanique rationnelle, comme le temps d'accumulation d'un énorme volume de connaissances sur les différents types de mouvement mécanique (en particulier, sur le mouvement des astres) et de progrès lent mais incessant du savoir mathématique. L'expérience accumulée, les progrès des mathématiques, les géniales découvertes des prédécesseurs de Newton: Copernic (1473-1543), Kepler (1571-1630), Galilée en premier lieu, les nouvelles exigences de l'industrie en pleine expansion, de la navigation maritime, de l'art de la guerre sont autant de facteurs objectifs qui amenèrent Newton à la découverte

*) V. I. Lénine, *Œuvres*, t. 14, p. 111.

des lois fondamentales de la mécanique qui portent son nom de plein droit, et à la création d'un appareil mathématique (calcul différentiel et intégral) permettant d'appliquer ces lois générales et leurs corollaires à la résolution des problèmes pratiques *).

Au XVIIIe et au XIXe siècle, le développement de la mécanique rationnelle se caractérise principalement par la mise au point des méthodes analytiques (Euler, d'Alembert, Lagrange, Jacobi, Hamilton, H. Poincaré) et géométriques (Poinsot).

Les savants russes apportèrent une contribution importante au développement de la mécanique rationnelle. Il suffit de rappeler à ce titre les noms de M. Ostrogradski (1801-1862, travaux en mécanique analytique), P. Tchébychev (1821-1894, théorie des mécanismes et des machines), S. Kovalevskaïa (1850-1891, problème de mouvement composé du solide autour d'un point fixe). Au cours de la période suivante, la plus grande contribution au développement de la mécanique rationnelle fut faite par A. Liapounov (1857-1918), surtout par ses travaux en théorie de stabilité du mouvement des systèmes mécaniques, par N. Joukovski (1847-1921), fondateur de l'aérodynamique contemporaine, ainsi que par I. Mechtcherski (1859-1935, problème de mouvement d'un point de masse variable), S. Tchaplyguine (1869-1942), A. Krylov (1863-1945), N. Tchétaïev (1902-1959) et autres.

L'expansion rapide de l'industrie, en posant de nouveaux problèmes techniques, a donné l'impulsion au développement de certains chapitres spéciaux de la mécanique rationnelle qui, plus près de notre époque, allaient former des disciplines scientifiques à part entière: l'hydrodynamique, la mécanique des fluides, la théorie de l'élasticité et de la plasticité, la résistance des matériaux, etc. Or, dans leur méthodologie, toutes ces disciplines s'apparentent à la mécanique rationnelle. Ceci est justement la raison pour laquelle la mécanique rationnelle figure traditionnellement parmi les disciplines qui constituent le noyau de l'enseignement technique supérieur contemporain.

4. Les grandes divisions de la mécanique rationnelle. Le cours de mécanique rationnelle se divise en trois grandes parties: la statique, la cinématique, la dynamique.

La *statique* traite de l'équilibre des corps matériels et des moyens de réduire un système de forces à une forme élémentaire.

La *cinématique* étudie le mouvement des corps matériels du point de vue géométrique, c'est-à-dire sans se soucier des causes qui engendrent le mouvement.

La *dynamique* se propose d'étudier le mouvement des corps matériels en liaison avec les forces qui s'exercent sur les corps.

---

*) En même temps et indépendamment de Newton, le calcul différentiel et intégral était inventé par Leibniz (1646-1716).

PREMIÈRE PARTIE

STATIQUE DU SOLIDE PARFAIT

CHAPITRE PREMIER

SYSTÈME DE FORCES CONCOURANTES

§ 1. Eléments d'algèbre vectorielle *)

1.1. Grandeurs scalaires et grandeurs vectorielles. Deux types de grandeurs se rencontrent dans tous les chapitres de la mécanique rationnelle: les grandeurs scalaires et les grandeurs vectorielles.

On appelle *scalaire* une grandeur qui se définit complètement par sa valeur numérique dans un système d'unités choisi et n'est liée à aucune direction dans l'espace. Par exemple, la masse et le volume d'un corps, la température, l'énergie sont des scalaires.

Par contre, une grandeur vectorielle se définit non seulement par sa valeur numérique mais aussi par une direction et un sens dans l'espace. Ainsi, la force et la vitesse sont des vecteurs.

Un *vecteur* est un segment de droite orienté. Tout vecteur se laisse définir sans ambiguïté par deux points pris dans un ordre déterminé: le premier point est l'origine du vecteur, et le second, son extrémité. Le vecteur se représente graphiquement par un segment de droite (fig. 1.1) dont l'extrémité est munie d'une flèche indiquant le sens du vecteur. La longueur du segment rapportée à une échelle de représentation choisie exprime sa valeur numérique, ou *module.* La droite *kl* portant le vecteur est appelée le *support*, la *direction* ou la *ligne d'action du vecteur*.

Dans le texte et sur les figures, les vecteurs sont désignés soit par une seule lettre composée en gras (***a***, ***F***), soit par deux (***KL***). Dans ce dernier cas la première lettre (K) est l'origine du vecteur ***KL***, et la dernière (L), son extrémité. Le module (valeur numérique) du vecteur est désigné par les mêmes lettres mais composées en maigre (a, F, KL).

*) Ce paragraphe n'est qu'un bref rappel des notions connues. Pour plus de détails, voir N. Efimov, *Eléments de géométrie analytique*, 4e éd., M., « Mir », 1976, ch. 7 à 10.

On rencontre en mécanique rationnelle des grandeurs caractérisées par des vecteurs libres, glissants et liés (ou localisés). Si le vecteur est *libre*, son point d'application peut être transféré en un point quelconque de l'espace. Pour un vecteur *glissant*, le point d'application peut se placer en un point quelconque de sa direction. Enfin, le point d'application d'un vecteur *lié* est fixé. Les grandeurs mécaniques qui s'expriment par des vecteurs de chacun des trois types énumérés seront caractérisées dans les chapitres appropriés du présent Cours.

Un *vecteur lié* se définit par six quantités indépendantes: les trois coordonnées de l'origine et les trois coordonnées de l'extrémité.

Un *vecteur libre* $\boldsymbol{a}$ se définit par trois quantités indépendantes a_x, a_y, a_z, projections du vecteur sur les axes de coordonnées cartésiennes Ox, Oy, Oz.

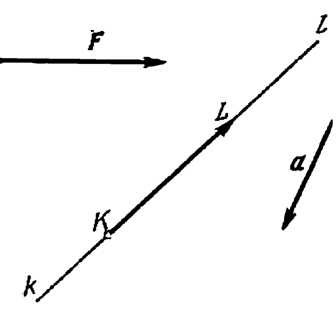


Fig. 1.1

Un *vecteur glissant* se définit par cinq quantités indépendantes. On sait qu'une droite se laisse définir dans l'espace à l'aide de quatre constantes, telles que les coefficients a, b, p, q des équations

$$x = az + p, \qquad y = bz + q.$$

On retient donc comme coordonnées d'un vecteur glissant les quantités a, b, p, q auxquelles vient s'ajouter une quantité égale au module du vecteur et affectée d'un signe positif ou négatif, suivant que la coordonnée imposée (par exemple, z) croît ou décroît dans le sens du vecteur glissant.

Les vecteurs glissants se déterminent d'une façon différente des vecteurs libres. Or, l'étude des vecteurs glissants et liés se réduit souvent à celle des vecteurs libres; nous nous limiterons donc à étudier l'algèbre des vecteurs libres.

1.2. Définitions fondamentales et règles d'opérations sur les vecteurs libres.

1. Deux vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont dits *équipollents* (ou *égaux*) s'ils ont même longueur (module), sont de même sens et sont portés par une même droite (ou par deux droites parallèles).

L'équipollence de deux vecteurs s'écrit par analogie à l'égalité de deux scalaires *):

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}. \tag{1.1}$$

*) Numérotation des formules (figures, exemples, exercices): premier chiffre, numéro du chapitre; second chiffre, numéro de la formule (figure, etc.) dans le chapitre.

2. Pour faire la somme de plusieurs vecteurs, on construit le deuxième vecteur à partir de l'extrémité du premier, puis le troisième à partir de l'extrémité du deuxième, et ainsi de suite. Reliant l'origine du premier vecteur à l'extrémité du dernier, on obtient le vecteur représentatif de la *somme géométrique des vecteurs* (fig. 1.2).

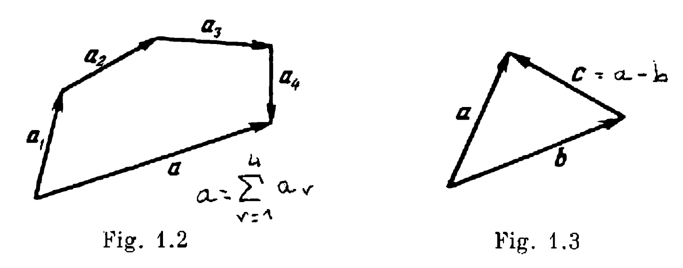


Fig. 1.2 Fig. 1.3

La somme des vecteurs s'entend toujours au sens géométrique; s'il y a n vecteurs à additionner, la somme s'écrira par exemple

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_n, \quad \text{ou bien} \quad \boldsymbol{a} = \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{a}_\nu. \tag{1.2}$$

3. Pour retrancher un vecteur d'un autre, on fait confondre leurs origines et l'on trace le vecteur qui va de l'extrémité du second vecteur à celle du premier (fig. 1.3):

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}.$$

4. Pour multiplier un vecteur par un scalaire λ, on multiplie son module par la valeur absolue de λ; le sens du vecteur est conservé si $\lambda > 0$ et inversé si $\lambda < 0$.

Fig. 1.4

5. Le vecteur dont le module est égal à 1 s'appelle *vecteur unité*. Tout vecteur $\boldsymbol{a}$ se laisse représenter sous la forme

$$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{a}^0, \tag{1.3}$$

où a est le module de $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{a}^0$ est le vecteur unité qui a la même direction et le même sens que $\boldsymbol{a}$.

6. La *projection d'un vecteur sur un axe* est une grandeur scalaire égale au produit du module du vecteur par le cosinus de l'angle entre la direction positive de l'axe et la direction du vecteur (fig. 1.4):

$$a_x \equiv \text{proj}_{Ox}\boldsymbol{a} = a \cos \alpha. \tag{1.4}$$

Ici, a_x est la projection du vecteur $\boldsymbol{a}$ sur l'axe Ox. Remarquons que $a_x > 0$ si $0 \leqslant \alpha < \pi/2$; $a_x = 0$ si $\alpha = \pi/2$; $a_x < 0$ si $\pi/2 < \alpha \leqslant \pi$.

7. La *projection de la somme géométrique de plusieurs vecteurs* sur un axe est égale à la somme algébrique des projections des vec-

teurs à additionner sur le même axe (fig. 1.5):

$$a_x = a_{1x} + a_{2x} + a_{3x}.$$

S'il y a n vecteurs, on a

$$a_x = a_{1x} + a_{2x} + \ldots + a_{nx} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu x}. \quad (1.5)$$

8. Tout vecteur se laisse représenter sous la forme

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}, \quad (1.6)$$

où a_x, a_y, a_z sont les projections du vecteur $\boldsymbol{a}$ sur les axes de coordon-

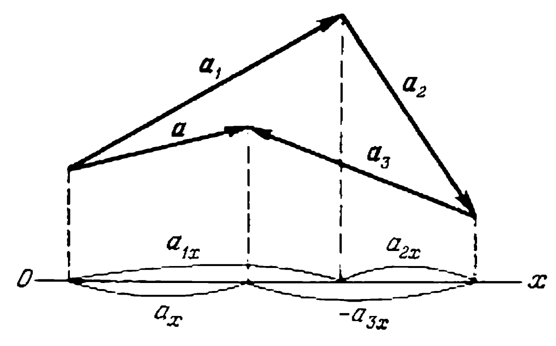


Fig. 1.5

nées cartésiennes; $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sont les vecteurs unités des axes respectifs Ox, Oy, Oz.

Le module du vecteur se laisse exprimer en fonction de ses projections par la formule

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (1.7)$$

et la direction du vecteur est déterminée par les angles qu'il fait avec les axes:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, Ox}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, Oy}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, Oz}) = \frac{a_z}{a}. \quad (1.8)$$

9. Par *produit scalaire* de deux vecteurs, on entend le produit de leurs modules par le cosinus de l'angle entre les directions des vecteurs (fig. 1.6):

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ab \cos \varphi. \quad (1.9)$$

Le produit scalaire reste inchangé si l'on permute ses facteurs:

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Le produit scalaire peut s'exprimer en fonction des projections des vecteurs à multiplier sur les axes de coordonnées:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{1.10}$$

Pour que deux vecteurs non nuls soient perpendiculaires, il faut et il suffit que leur produit scalaire soit égal à 0.

Il ressort de (1.9) que si $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont des vecteurs non nuls, $a \neq 0$, $b \neq 0$, on a

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{ab}, \tag{1.11}$$

ou, en exprimant le produit scalaire $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ et les modules a, b des vecteurs en fonction des projections sur les axes de coordonnées conformément à (1.10) et (1.7),

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{1.11a}$$

10. Le *produit vectoriel* de deux vecteurs est représenté par un troisième vecteur dont le module est égal au produit des modules des

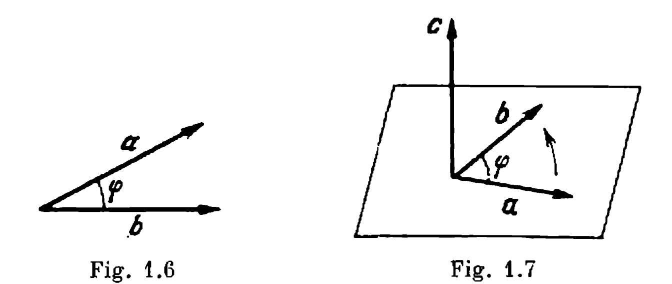


Fig. 1.6 Fig. 1.7

vecteurs à multiplier par le sinus de l'angle formé par leurs directions, et la direction est perpendiculaire au plan qui contient les vecteurs à multiplier. Quant au sens du vecteur représentatif du produit vectoriel, il est déterminé par la règle de la vis à droite. Cela veut dire qu'en regardant de l'extrémité du vecteur $\boldsymbol{c}$ représentatif du produit vectoriel, on passe du premier vecteur à multiplier $\boldsymbol{a}$ vers le second vecteur $\boldsymbol{b}$ sur le plus petit angle en tournant dans le sens antihoraire (fig. 1.7). Le produit vectoriel est figuré par des crochets. Si donc

$$\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \tag{1.12}$$

on a

$$c = ab \sin\varphi. \tag{1.13}$$

En changeant l'ordre des facteurs, le produit vectoriel change de signe:

$$[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] = -[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]. \tag{1.14}$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls est égal à **0** si et seulement si les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont parallèles ou portés par une même droite ($\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$). Pour que deux vecteurs soient parallèles, il faut donc que leur produit vectoriel soit égal à **0**.

Le produit vectoriel se laisse exprimer en fonction des projections des vecteurs à multiplier sur les axes de coordonnées:

$$\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = (a_y b_z - a_z b_y)\,\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\boldsymbol{k}, \qquad (1.15)$$

ou sous forme de déterminant:

$$\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (1.16)$$

Les projections du produit vectoriel sur les axes de coordonnées s'écrivent

$$\begin{aligned} c_x &= [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_x = a_y b_z - a_z b_y, \\ c_y &= [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_y = a_z b_x - a_x b_z, \\ c_z &= [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_z = a_x b_y - a_y b_x. \end{aligned} \qquad (1.17)$$

11. Par *produit mixte* de trois vecteurs, on entend une quantité égale au produit scalaire du produit vectoriel de deux vecteurs par le troisième:

$$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}). \qquad (1.18)$$

La valeur absolue de cette quantité est égale au volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que le produit mixte soit égal à 0 est que les trois vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ soient coplanaires.

12. On appelle *double produit vectoriel*, le vecteur construit d'après la formule

$$\boldsymbol{d} = [\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]]. \qquad (1.19)$$

Il se calcule d'après la formule

$$\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{c} \qquad (1.20)$$

dans laquelle $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ et $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ sont les produits scalaires des vecteurs correspondants. Par projection sur les axes de coordonnées, on obtient

$$\begin{aligned} d_x &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\, b_x - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})\, c_x, \\ d_y &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\, b_y - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})\, c_y, \\ d_z &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\, b_z - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})\, c_z. \end{aligned} \qquad (1.21)$$

En portant dans ces formules les expressions des produits scalaires en fonction des projections des vecteurs à multiplier conformément à (1.10), on obtient les expressions des projections du double produit vectoriel sur les axes de coordonnées en fonction des projections des vecteurs ***a***, ***b***, ***c*** sur les mêmes axes.

§ 2. Notions fondamentales de la statique

2.1. Corps solide parfait. Dans le but d'explorer en profondeur tel ou tel côté d'un phénomène de la nature, on utilise dans la recherche scientifique la méthode des abstractions, en concentrant l'attention sur les côtés les plus essentiels du phénomène et en négligeant les côtés secondaires. V. I. Lénine disait: « ... toutes les abstractions scientifiques (justes, sérieuses, non creuses) reflètent la nature plus profondément, plus fidèlement, plus *complètement* » *). En mécanique rationnelle, on trouve aussi des abstractions pareilles : ce sont les notions de point matériel et de corps solide parfait.

On appelle *point matériel* une particule matérielle dont les dimensions sont négligeables dans les conditions du problème considéré. La différence par rapport au point géométrique réside dans le fait que le point matériel est supposé contenir une certaine quantité de matière concentrée. Un point matériel jouit donc de la propriété d'inertie (voir ch. XIII, n° 1.1) et d'interaction avec d'autres points matériels.

Tout corps physique se présente en mécanique comme un *système de points matériels* : on entend par là un ensemble de particules matérielles qui agissent les unes sur les autres conformément au principe d'égalité de l'action et de la réaction (voir n° 2.5, axiome III). Par *corps solide parfait* (ou simplement *solide*), on entend un corps dont deux points quelconques restent en toutes circonstances séparés par une distance inchangée. Autrement dit, le corps solide parfait conserve une forme géométrique constante (reste indéformable) tant dans son ensemble qu'en chacune de ses parties.

2.2. Force. Passons à la définition de la force. Par ce terme, on désigne en mécanique la mesure quantitative d'interaction mécanique des corps matériels. L'interaction en question peut affecter l'état cinématique des corps matériels, en faisant varier non seulement leur position dans l'espace mais aussi les vitesses de leurs points. Cette propriété accélératrice de la force sera définie plus complètement en dynamique (voir chapitre XIII, n° 1.1). Restant dans le cadre de la statique, nous appellerons *force* l'action d'un corps sur un autre, se traduisant par une pression, une attraction ou une répulsion.

*) V. I. Lénine, *Œuvres*, t. 38, p. 160.

L'exemple le plus élémentaire d'une force est la pesanteur. C'est la force avec laquelle la Terre attire chaque corps; si le corps est gêné (non libre), il exerce la pression sur son appui (effet statique de la force), et s'il est libre, il tombe sur la Terre avec une accélération g (effet dynamique de la force).

Tout au long de ce cours, nous utiliserons uniquement le Système international d'unités SI (voir n° 2.3). L'unité de force dans ce système est le newton (N): c'est la force qui communique à une masse *) égale à celle du prototype international du kilogramme une accélération égale à 1 m/s^2. Le rapport entre le newton et le kilogramme-force (en système d'unités technique MKpS) sera examiné dans le n° 2.3.

L'action de la force sur le corps est déterminée par le point d'application de la force **), sa direction, son sens et sa valeur numérique. La direction de la force s'appelle aussi *ligne d'action*. La valeur numérique — *module de la force* — s'obtient par comparaison avec l'unité de force (par exemple à l'aide d'un dynamomètre).

La force est une grandeur vectorielle; elle se représente donc graphiquement par un vecteur. La longueur du vecteur rapportée à l'échelle de représentation convenue exprime le module (la valeur numérique) de la force, tandis que le support et le sens du vecteur désignent la ligne d'action et le sens de la force. La position des vecteurs forces dans l'espace sera définie dans un repère cartésien rectangulaire rattaché à la Terre. La notion de repère (système de coordonnées) sera détaillée dans les divisions suivantes de ce cours: la cinématique et la dynamique.

2.3. Unités de mesure des grandeurs mécaniques***). Avant 1960, trois systèmes d'unités métriques étaient en vigueur:

a) le système physique absolu CGS, dont les unités de base sont le centimètre, le gramme (masse) et la seconde;

b) le système pratique absolu MKS, dont les unités de base sont le mètre, le kilogramme (masse) et la seconde;

c) le système industriel MKpS, dont les unités de base sont le mètre, le kilogramme-force (ou kilogramme-poids) et la seconde.

L'unité d'angle plan est dans tous ces systèmes le radian, et l'unité d'angle solide, le stéradian.

---

*) La définition de la masse sera introduite dans le n° 1.1 du chapitre XIII.

**) Il sera montré dans le n° 2.5 que le vecteur force est un vecteur glissant si la force est exercée sur un corps solide parfait.

***) Pour des renseignements plus complets concernant les systèmes d'unités, nous conseillons au lecteur de se reporter au livre de B. Yavorski et A. Detlaf, *Aide-mémoire de physique*, M., « Mir », 1977. L'ouvrage de L. Sédov, *Similitude et dimension en mécanique*, M., « Mir », 1977, contient une théorie générale de la dimension pour des grandeurs différentes.

Le système international d'unités, en abrégé SI, résulta d'une enquête internationale suivie de discussions et de décisions internationales prises par les représentants des Gouvernements réunis à la Conférence générale des poids et mesures, principalement en 1960. Pour les unités mécaniques, ce système se confond avec le système MKS.

Définition des unités de base dans le système SI. L'*unité de longueur*, le *mètre*, est la distance qui sépare deux traits sur le prototype de longueur en platine iridié. L'*unité de masse*, le *kilogramme*, est la masse du prototype international d'un kilogramme. L'*unité de temps*, la *seconde*, est égale à 1/86 400 du jour solaire moyen *).

Unités dérivées. Ce sont les unités qui se déduisent à partir des unités de base en faisant intervenir des lois physiques. Chaque unité dérivée se définit par une *formule aux dimensions*, ou simplement *dimension*, qui indique les opérations de multiplication et de division qu'il convient de faire sur les unités de base pour obtenir l'unité dérivée en question. Par exemple, l'unité de force dans le système SI, le newton (N), est une unité dérivée: c'est la force qui communique à l'unité de masse (1 kg) une unité d'accélération (1 m/s²). Les unités de longueur, de masse et de temps sont symbolisées par L, M et T. La dimension de la force est donc dans le système SI LMT^{-2}. Le kilogramme-force kgf (unité de base en MKpS et unité dérivée en MKS) est la force qui communique à une masse égale à celle du prototype international du kilogramme une accélération égale à 9,80665 m/s². Prenant au lieu de l'accélération standard 9,80665 m/s² sa valeur approchée 9,81 m/s², on constate que l'« ancien » kilogramme-force vaut 9,81 fois le newton :

$$1 \text{ kgf} = 9{,}81 \text{ N} \quad (1 \text{ N} = 0{,}102 \text{ kgf}).$$

Les multiples et les sous-multiples d'une unité de base sont désignés par des préfixes. Le kilonewton (kN) vaut mille newtons (ou, en MKpS, 102 kilogrammes-force); le millinewton (mN) est le millième de newton.

Parmi les unités SI dérivées utilisées en statique en plus du newton, on doit signaler:

a) le mètre carré m², pour la mesure des aires;

b) le mètre cube m³, pour la mesure des volumes;

c) le kilogramme par mètre cube kg/m³, unité de mesure de densité;

---

*) On trouve une définition plus précise de unités de base, qui n'implique aucune variation quantitative mais uniquement une meilleure reproductibilité physique, dans le livre de B. Yavorski et A. Detlaf, *Aide-mémoire de physique*, M., « Mir », 1977.

d) le newton-mètre N·m, qui sert à mesurer le module du moment de la force par rapport à un point ou un axe;

e) le newton par mètre carré N/m², unité de mesure d'intensité de la force (pression);

f) le newton par mètre cube N/m³, unité de mesure du poids spécifique.

Pour le passage des unités « anciennes » (MKpS) aux unités SI, on utilise les formules de conversion suivantes:

pour le moment de la force

$$1 \text{ kgf}\cdot\text{m} = 9{,}81 \text{ N}\cdot\text{m} \quad (1 \text{ N}\cdot\text{m} = 0{,}102 \text{ kgf}\cdot\text{m});$$

pour le poids spécifique

$$1 \text{ kgf/m}^3 = 9{,}81 \text{ N/m}^3 \quad (1 \text{ N/m}^3 = 0{,}102 \text{ kgf/m}^3).$$

Les unités dérivées utilisées en cinématique et en dynamique seront indiquées dans la deuxième et la troisième parties du livre. Soulignons encore une fois que le Système international d'unités SI sera utilisé dans le présent Cours à l'exclusion de tous les autres.

2.4. Système de forces. Un ensemble de forces appliquées au corps donné s'appelle *système de forces.* Si, sous l'action du système de forces, le solide reste au repos ou se déplace par inertie (par exemple, tous ses points sont animés d'un mouvement rectiligne avec une vitesse constante et identique pour tous les points), on dit que le corps est *en équilibre.* Un système de forces qui laisse le corps en équilibre s'appelle *système équilibré.*

Le mouvement d'inertie du solide sera étudié en dynamique (n° 1.4 du ch. XIX et n° 2.3 du ch. XXII). Si un système de forces équilibré est appliqué au solide donné, on dit que *les forces se font équilibre.* Une des forces du système équilibré est dite *force équilibrante* par rapport à toutes les autres.

Deux systèmes de forces $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ et $\{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ appliqués au solide donné sont dits *équivalents* s'ils se laissent réduire l'un à l'autre moyennant des *opérations élémentaires*, qui consistent à

a) déplacer les points d'application des forces le long de leurs directions;

b) composer et décomposer les forces appliquées à un même point;

c) ajouter et supprimer un système de forces équilibré.

Nous l'exprimerons en écrivant

$$\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \backsim \{P_1, P_2, \ldots, P_m\},$$

où $\backsim$ est le symbole d'équivalence des forces. Un système de forces équilibré $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_l\}$ est aussi appelé *équivalent à zéro*:

$$\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_l\} \backsim 0.$$

Si le système de forces $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ est équivalent à une force unique R,

$$\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \backsim R,$$

on dit que R est la *résultante* du système de forces donné. Dans ce cas les forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont appelées *composantes* de R. L'opération qui consiste à remplacer un système de forces $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ par leur résultante unique R porte le nom de *composition des forces*. L'opération inverse, qui consiste à substituer à une force unique R ses composantes $F_1, F_2, \ldots, F_n$ est la *décomposition de la force*.

2.5. Axiomes de la statique. La méthode des abstractions et la généralisation de l'expérience accumulée pendant des siècles d'observation immédiate et d'activité pratique des hommes ont permis

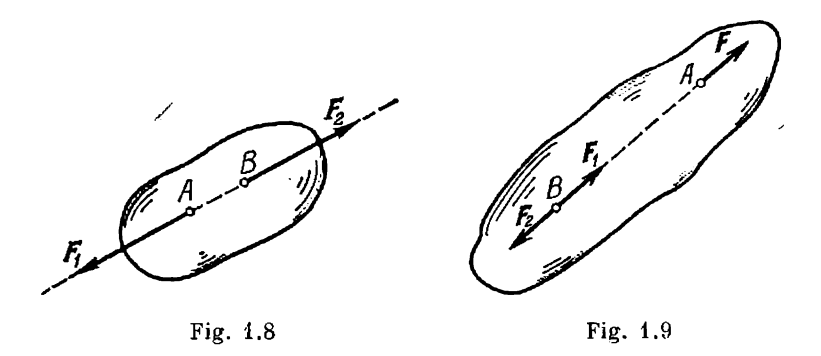


Fig. 1.8 Fig. 1.9

de dégager certaines lois générales de la statique. Ces lois s'appellent *axiomes*. Tous les développements ultérieurs de la statique élémentaire se déduisent des axiomes par raisonnement mathématique. Le qualificatif « élémentaire » est appelé à souligner la différence entre la statique telle qu'elle est présentée dans la première partie du livre, et la statique analytique qui sera étudiée dans le chapitre XVII.

A x i o m e I. *Pour que deux forces appliquées à un solide parfait se trouvent en équilibre, il faut et il suffit qu'elles soient de module égal, de sens contraire et soient portées par la droite joignant leurs points d'application* (fig. 1.8).

Ainsi donc, si $\{F_1, F_2\} \backsim 0$, on a $F_2 = -F_1$, et les vecteurs F_1 et F_2 sont colinéaires (situés sur une même droite).

Le système de deux forces directement opposées, c'est-à-dire de même module, de même direction et de sens opposé, est, dans le cas d'un solide, le plus simple système de forces équivalent à zéro.

C o r o l l a i r e. *Si un système de forces admet une résultante unique, la force équilibrante et la résultante sont de même module, de même direction et de sens opposé.*

A x i o m e II. *Au système de forces appliqué à un solide parfait, on peut ajouter ou retrancher n'importe quel système de forces équilibré sans que l'effet du premier système s'en trouve modifié.*

C o r o l l a i r e. *Le point d'application de la force appliquée à un solide parfait peut être placé en tout point de sa ligne d'action sans que l'effet de la force s'en trouve modifié.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit un solide parfait sollicité par une force $\boldsymbol{F}$ appliquée en un point A (fig. 1.9). Choisissons un point B situé sur la direction de $\boldsymbol{F}$ et faisons agir en ce point deux forces $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ de support AB, de sens opposé et de module égal à F:

$$F_1 = F_2 = F.$$

Puisque $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ se font équilibre (axiome I), le système des trois forces $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ est équivalent à une force unique $\boldsymbol{F}$ en vertu de l'axiome II. Les forces $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{F}_2$ se font équilibre elles aussi : on peut donc les négliger, en vertu de l'axiome II. Seule reste appliquée en B la force $\boldsymbol{F}_1$. Ainsi donc, la force $\boldsymbol{F}$ appliquée en A est équivalente à la force $\boldsymbol{F}_1$ appliquée en B, ce qu'il fallait démontrer.

La possibilité de placer le point d'application de la force en un point quelconque de sa ligne d'action suggère que toute force appliquée à un corps solide parfait peut être assimilée à un vecteur glissant. Si le corps est élastique, la force sera représentée par un vecteur lié.

A x i o m e III. *Les forces exercées par deux solides l'un sur l'autre sont toujours de même module, de même direction et de sens opposé.*

Cet axiome formulé par Newton porte le nom de *principe d'égalité de l'action et de la réaction.* Il convient de noter que, bien que l'action et la réaction soient égales en valeur, situées sur une même droite et orientées dans les sens opposés, on ne dit pas qu'elles se font équilibre. Une telle affirmation serait vide de sens : en effet, deux forces équilibrées sont toujours appliquées à un même solide, tandis que l'action et la réaction sont deux forces distinctes appliquées à deux solides différents.

A x i o m e IV. *Si un système de forces donné est équilibré sur un solide, il reste équilibré aussi sur tout autre solide.*

En vertu de cet axiome, les dimensions et la forme du solide ne jouent aucun rôle dans la statique du solide parfait.

A x i o m e V. *Si un corps déformable se trouve en équilibre, il le reste aussi après la solidification.*

De ce principe, dit *principe de solidification*, il ressort que l'équilibre d'un corps déformable implique en même temps la vérification des conditions d'équilibre de ce même corps considéré comme solide parfait (ces dernières conditions pour un corps déformable sont nécessaires mais en général non suffisantes).

2.6. Règle du parallélogramme *). Théorème des trois forces. Aux axiomes énumérés, il convient d'ajouter un axiome fondamen-

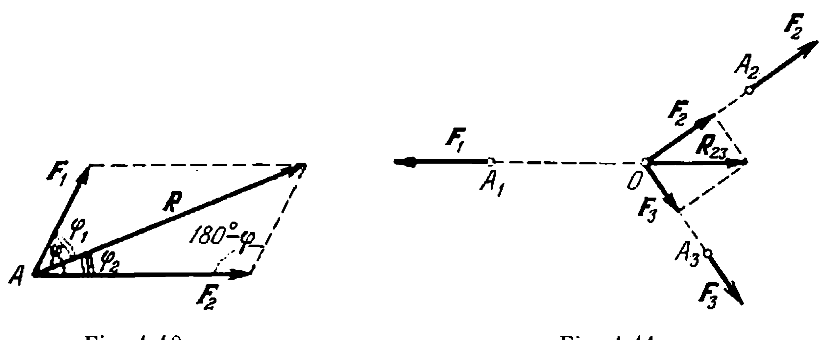


Fig. 1.10 Fig. 1.11

tal sur la composition de deux forces, qui porte le nom de *règle du parallélogramme*.

La résultante de deux forces appliquées à un même point du solide a son point d'application en ce même point; son module et sa direction sont déterminés par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces (fig. 1.10).

Soient $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ les forces appliquées à un point du solide, et $\boldsymbol{R}$ leur résultante. Il vient

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2.$$

Le module de la résultante se cherche par la formule

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \varphi}. \qquad (1.22)$$

On a d'après le théorème des sinus

$$\frac{F_1}{\sin \varphi_2} = \frac{F_2}{\sin \varphi_1} = \frac{R}{\sin (180° - \varphi)},$$

d'où

$$\sin \varphi_1 = \frac{F_2}{R} \sin \varphi, \quad \sin \varphi_2 = \frac{F_1}{R} \sin \varphi. \qquad (1.23)$$

*) Dans certains manuels la règle du parallélogramme s'énonce sous forme d'un théorème. Pour démontrer ce théorème, on doit postuler que la résultante de deux forces d'intensité égale appliquées à un même point est contenue dans le plan d'action des forces, dirigée suivant la bissectrice de l'angle formé par les forces et appliquée au même point.

Les formules (1.22) et (1.23) définissent la valeur, la direction et le sens de la résultante de deux forces appliquées à un même point et faisant un angle φ entre elles.

La règle du parallélogramme permet de démontrer le théorème suivant.

T h é o r è m e d e s t r o i s f o r c e s. *Si le solide est en équilibre sous l'action de trois forces coplanaires non parallèles, les directions de ces forces concourent en un point.*

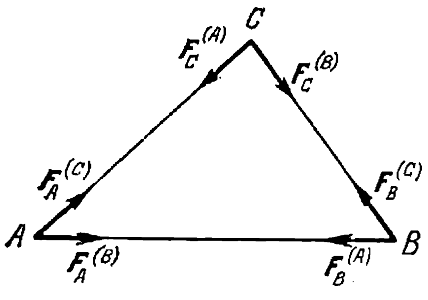


Fig. 1.12

D é m o n s t r a t i o n. Soit un solide en équilibre soumis à l'action de trois forces F_1, F_2, F_3 situées dans un même plan et appliquées en trois points A_1, A_2, A_3 du solide (fig. 1.11). Portons les points d'application de deux forces quelconques, par exemple F_2 et F_3, au point O où se coupent leurs directions et faisons la composition de ces forces d'après la règle du parallélogramme. Au lieu du système de trois forces F_1, F_2, F_3, on obtient alors un système équivalent constitué par deux forces F_1 et R_{23}. En vertu de l'axiome I, l'équilibre du solide sollicité par deux forces exige que ces forces soient directement opposées. La ligne d'action de F_1 se confond donc avec celle de R_{23} et passe par le point O. Le théorème est démontré.

Il sera montré dans le n° 3.1 du ch. V que les trois forces constitutives d'un système équilibré sont nécessairement coplanaires. Ceci étant, on omettra le mot « coplanaires » dans l'énoncé du théorème.

2.7. Forces extérieures et forces intérieures. Les forces exercées sur un solide sont de deux types. Les *forces extérieures* sont exercées par d'autres corps et appliquées aux points du solide donné. Les *forces intérieures* sont les forces d'interaction qui se développent entre les points matériels du solide donné.

L e m m e. *Les forces intérieures agissant dans un solide parfait donné constituent un système de forces équilibré et n'interviennent pas dans les conditions d'équilibre du solide.*

D é m o n s t r a t i o n. Toutes les forces intérieures opérant au sein du solide donné peuvent être décomposées en des forces qui se font équilibre deux à deux. Considérons trois points A, B, C du solide et désignons les forces intérieures comme il est montré sur la figure

1.12. Il vient en vertu de l'axiome III

$$F_A^{(B)} = -F_B^{(A)}, \quad F_B^{(C)} = -F_C^{(B)}, \quad F_C^{(A)} = -F_A^{(C)}.$$

En vertu de l'axiome I, le système des forces intérieures du solide donné appliquées à ses trois points est équivalent à zéro:

$$\{F_A^{(B)}, F_B^{(A)}\} + \{F_B^{(C)}, F_C^{(B)}\} + \{F_C^{(A)}, F_A^{(C)}\} \backsim 0.$$

Le raisonnement reste valable pour un nombre quelconque de points, ce qui achève la démonstration du lemme.

Pour cette raison, les conditions d'équilibre examinées en statique du solide ne concernent que les forces extérieures.

La détermination des forces intérieures agissant au sein du solide s'effectue par la *méthode des sections*. Elle consiste à mettre en équations l'équilibre d'une partie isolée du solide. En effet, si le solide

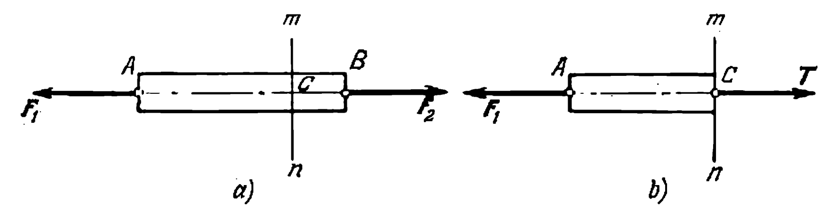


Fig. 1.13

est en équilibre, chacune de ses parties est, elle aussi, en équilibre. Appliquant les équations d'équilibre à une partie du solide, on détermine les forces intérieures.

Prenons un exemple très simple pour illustrer la méthode des sections. Soit une barre mince rectiligne AB (fig. 1.13, a) en équilibre sous l'action de deux forces $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ appliquées à ses extrémités A, B. Puisque la barre est en équilibre, on a en vertu de l'axiome I

$$F_1 = F_2$$

et les vecteurs $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ sont dirigés suivant la droite AB mais orientés dans les sens opposés.

Faisons une section mn au point C de la barre, de façon à partager celle-ci en deux parties. Considérons l'équilibre de la partie gauche, c'est-à-dire de la barre AC (fig. 1.13, b). Le point C de AC est sollicité par une force $\boldsymbol{T}$, qui représente l'action de la partie droite supprimée de la barre sur sa partie gauche. De même que la barre tout entière, sa partie gauche se trouve en équilibre. En vertu de l'axiome I on a

$$T = F_1.$$

Puisque la section mn est arbitraire, on aboutit à la conclusion suivante: en toute section de la barre tendue (comprimée) par des forces extérieures, on voit agir des forces intérieures égales à ces

dernières. Une force intérieure ainsi définie s'appelle *effort de traction (de compression)*.

2.8. Axiome des liaisons. Les solides considérés en mécanique peuvent être libres ou liés (non libres), suivant le cas. Un solide est dit *libre* s'il peut se mouvoir en toute direction. Par exemple, une pierre lancée dans l'espace est un solide libre. Un solide est dit *lié* s'il ne peut se mouvoir que dans des directions déterminées ou s'il est assujetti à rester immobile. Par exemple, un wagon est un solide lié, car son mouvement est guidé par les rails. Dans les problèmes

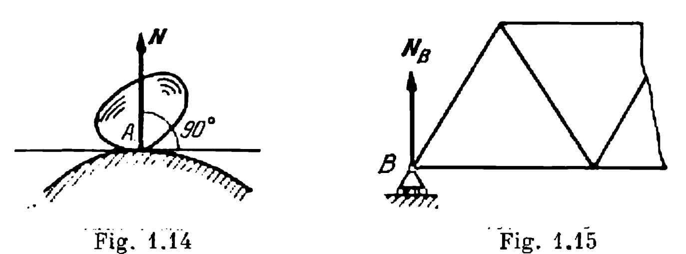


Fig. 1.14 Fig. 1.15

de statique, nous aurons généralement affaire à des solides liés, dont le déplacement sera limité par l'action des solides qui les entourent.

Les corps matériels qui s'opposent au déplacement du solide sont appelés *liaisons*, et les forces qu'ils exercent sur le solide, *réactions de liaison*. En général, toute réaction de liaison agit dans le sens opposé à celui en lequel la liaison gêne le solide. Cette circonstance facilite la recherche des directions des réactions dans bon nombre de problèmes.

A x i o m e d e s l i a i s o n s. *Pour tout solide lié, il est possible de supprimer les liaisons en les remplaçant par les réactions et de considérer le solide comme un corps libre soumis à l'action des forces données et des réactions de liaison.*

La statique étudie les conditions d'équilibre du solide libre. Pour que ces conditions soient applicables aux solides liés, on fait intervenir l'axiome des liaisons. Nous terminons donc ce paragraphe par l'énumération de quelques liaisons élémentaires et de leurs réactions, sans tenir compte du frottement.

2.9. Réactions de liaison. Les liaisons peuvent être matérialisées par des appuis, articulations, tringles, etc. Dans les cas énumérés ci-après, on suppose que ces éléments sont confectionnés à partir d'un matériau absolument rigide et que le frottement aux points de contact avec les solides considérés est inexistant.

1. S o l i d e s e n c o n t a c t.

a) Le solide repose sur une surface polie en un point A (fig. 1.14). La réaction de la surface d'appui est appliquée au solide en A et

dirigée suivant la normale à la surface d'appui. Elle s'appelle donc *réaction normale* et se note N.

b) *Rouleau* (fig. 1.15). La poutre (ou ferme) est appuyée en son extrémité B, par l'intermédiaire d'un balancier, sur un rouleau cylindrique. La réaction N_B du rouleau est appliquée à la poutre en B et est dirigée suivant la normale à la surface de roulement.

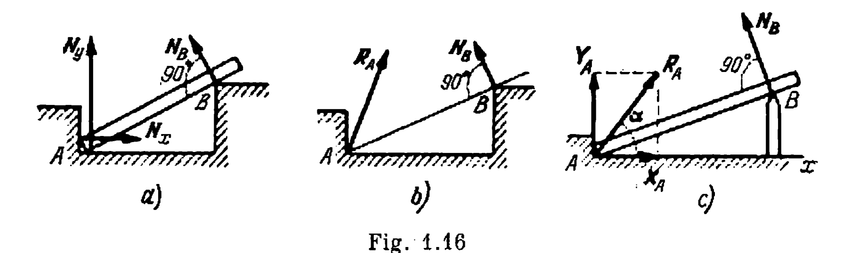


Fig. 1.16

c) La poutre prend appui en son extrémité A sur le sol et sur une paroi, et en son point B sur l'arête d'un dièdre (fig. 1.16, *a*). Les réactions de la paroi N_x et du sol N_y sont dirigées suivant les normales aux surfaces d'appui correspondantes. La *réaction* N_B *du dièdre* est dirigée suivant la normale en B à la surface de la poutre. Abstraction faite des dimensions transversales de la poutre, on admet que les réactions N_x et N_y sont appliquées en A (fig. 1.16, *b*, *c*). La composition de N_x et N_y fournit une résultante unique $\boldsymbol{R_A}$, dont la direction passe de toute évidence par A.

II. Solides articulés.

d) *Articulation cylindrique* (ou *rotoïde*). Un boulon cylindrique fixe sert d'axe à une barre AB pourvue d'un trou cylindrique dont

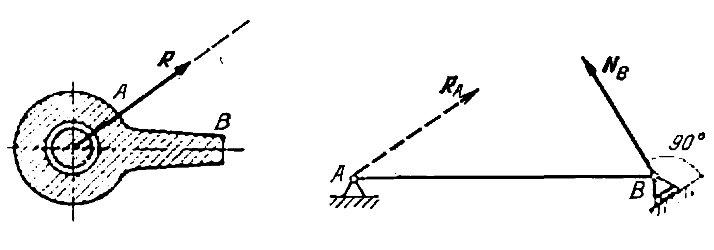


Fig. 1.17 Fig. 1.18

le diamètre est légèrement supérieur à celui du boulon (fig. 1.17). Le seul déplacement réalisable est la rotation de AB autour du boulon. La réaction $\boldsymbol{R}$ de l'articulation cylindrique est contenue dans le plan perpendiculaire à l'axe du boulon et passe par le centre du boulon. Le module et la direction de $\boldsymbol{R}$ dans ce plan sont inconnus; on les cherche en fonction des forces exercées sur AB.

A ce type de liaison se rapporte également l'*appui articulé fixe* montré en A sur la figure 1.18 pour la poutre AB. La réaction $\boldsymbol{R}_A$ de l'articulation fixe est appliquée à la poutre en A et est contenue dans le plan perpendiculaire à l'axe d'articulation; quant à la direction de la réaction, on n'en sait rien. La ligne tracée en trait

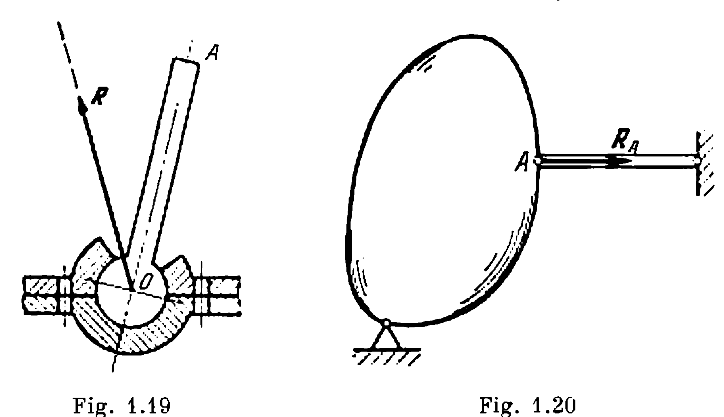


Fig. 1.19 Fig. 1.20

interrompu sur la figure est une direction arbitraire, représentée pour souligner la différence par rapport à la direction de la réaction $\boldsymbol{N}_B$ du rouleau.

e) *Articulation sphérique* (ou *rotule*). La barre AO porte à son extrémité une surface sphérique, ou pomme, qui vient se loger dans

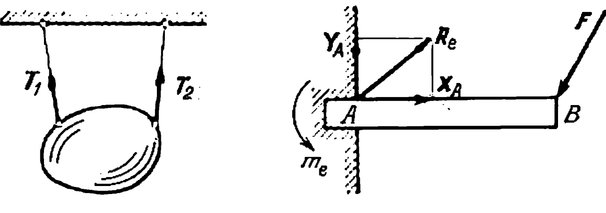


Fig. 1.21 Fig. 1.22

une coquille d'appui (fig. 1.19). Le seul mouvement possible dans ce cas est la rotation de AO autour de O, c'est-à-dire autour du centre de l'articulation sphérique. La direction de la réaction $\boldsymbol{R}$ passe de toute évidence par O.

f) *Réaction d'une barre de poids nul fixée en ses extrémités.* La réaction d'une telle barre appliquée au solide est dirigée le long de la barre. La barre elle-même est soit tendue, la réaction $\boldsymbol{R}_A$ étant orientée en dedans (fig. 1.20), soit comprimée, la réaction étant orientée au-dehors.

III. L i a i s o n f l e x i b l e (fil, corde, chaîne).

g) La réaction du fil $\boldsymbol{T}$ porte le nom de *tension*. Elle est appliquée au point d'attache du fil au solide, dirigée le long du fil et orientée en dedans du fil (sur la figure 1.21 T_1 et T_2 sont les tensions des fils).

IV. E n c a s t r e m e n t.

h) Une extrémité de la poutre est encastrée dans la paroi, et son autre extrémité sert d'appui à une structure (fig. 1.22). Si la poutre est exposée à des forces données, on a dans l'encastrement des réactions qui se composent d'une force (réaction d'encastrement $\boldsymbol{R}_e$) et d'un couple caractérisé par le moment d'encastrement m_e (voir ch. II, nº 2.2).

Soulignons en conclusion qu'en vertu de l'axiome III la force exercée par le solide sur la liaison et la réaction offerte par la liaison ont toujours même module, même direction et le sens opposé.

§ 3. Système de forces concourantes

3.1. Composition des forces concourantes. Résultante. La statique, qui étudie les conditions d'équilibre des solides soumis à des forces, contient d e u x p r o b l è m e s f o n d a m e n t a u x: 1º substitution à un système de forces donné d'un système équivalent et 2º établissement des conditions générales d'équilibre des solides. Nous commencerons l'examen de ces problèmes par le cas le plus simple, à savoir: un système de forces concourantes.

Faisons une remarque préliminaire: dans le cas d'un système de forces équilibré (équivalent à zéro), nous dirons partout *équilibre du système de forces*, au lieu de l'expression plus juste: équilibre du solide sous l'action d'un système de forces donné.

Un *système de forces concourantes* réunit les forces dont les directions viennent se couper toutes en un point unique. Puisque le point d'application de toute force peut être transféré en tout point de la ligne d'action de cette dernière, un système de forces concourantes est équivalent à un système de forces appliquées en ce point.

On peut faire la somme de plusieurs forces appliquées en un point commun en faisant leur composition suivant la règle du parallélogramme (fig. 1.23): composer les forces $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$, trouver leur résultante $\boldsymbol{R}'$, puis composer cette dernière et la force $\boldsymbol{F}_3$, construire un parallélogramme sur $\boldsymbol{R}'$ et $\boldsymbol{F}_3$, trouver la résultante $\boldsymbol{R}''$, et ainsi de suite. On peut aussi faire la composition des forces sans construire les parallélogrammes successifs: il suffit de placer l'origine du vecteur $\boldsymbol{F}_2$ à l'extrémité B de $\boldsymbol{F}_1$, puis de placer l'origine de $\boldsymbol{F}_3$ à l'extrémité C de $\boldsymbol{F}_2$, etc. Joignant le point A d'application des forces et l'extrémité de $\boldsymbol{F}_4$, on obtient la résultante $\boldsymbol{R}$. La méthode proposée de recherche de la résultante porte le nom de la *règle du*

polygone; la ligne brisée $ABCDE$ s'appelle *polygone des forces*, et le segment AE, *vecteur fermant le polygone*.

Si on n'applique que la règle du parallélogramme, on doit traiter à part le cas où les forces à composer sont appliquées en un point commun et portées par une même droite. Cela devient inutile quand on applique la règle du polygone.

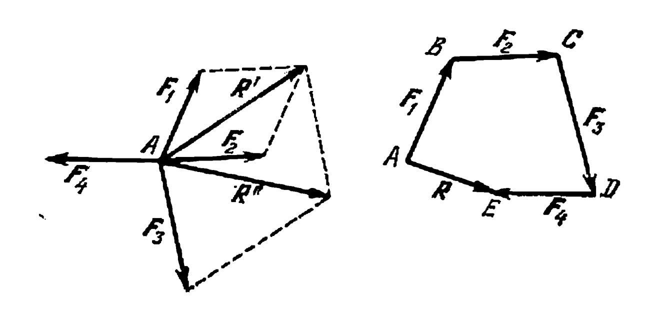


Fig. 1.23

S'il y a n forces F_1, F_2, . . ., F_n concourantes en O, leur résultante unique R est appliquée en O et vaut la somme géométrique des vecteurs forces:

$$R = F_1 + F_2 + \ldots + F_n = \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu. \quad (1.24)$$

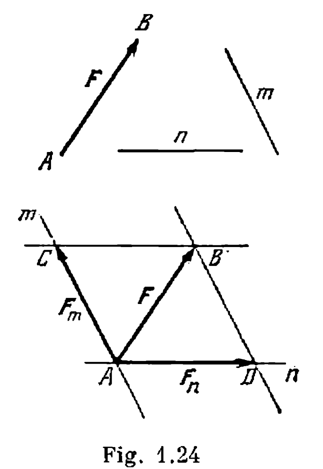


Fig. 1.24

3.2. Décomposition d'une force. Décomposer une force revient à trouver les forces, appelées *composantes*, qui, appliquées au même point, produiront un effet équivalent à celui de la force à décomposer. Le problème de décomposition d'une force en deux composantes coplanaires avec elle est en général indéterminé. En effet, la composition des forces trouvées doit fournir la force initiale; autrement dit, cette force doit constituer la diagonale d'un parallélogramme construit sur les composantes. Or, il existe évidemment une infinité de parallélogrammes qui admettent la force donnée comme diagonale.

On peut lever l'indétermination dans le problème de recherche de deux composantes non parallèles mais coplanaires avec la force donnée en se donnant les directions m et n des composantes cherchées (fig. 1.24). Pour déterminer ces composantes, il suffit de mener

par le point d'application A de la force $\boldsymbol{F}$ et par l'extrémité B de cette dernière deux droites parallèles à m et n: les points d'intersection des droites définissent un parallélogramme $ADBC$ dans lequel $\boldsymbol{F}$ est la diagonale. Ce sont précisément les vecteurs $AC = \boldsymbol{F}_m$ et $AD = \boldsymbol{F}_n$ appliqués en A qui déterminent les composantes cherchées :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_m + \boldsymbol{F}_n.$$

Toute force se laisse décomposer, et ce d'une façon unique, suivant trois directions arbitraires m, n, p non parallèles à un plan

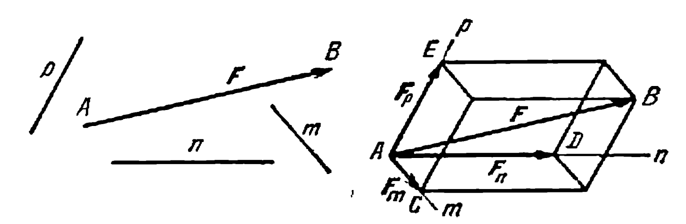


Fig. 1.25

(fig. 1.25). Menons par le point d'application A de la force $\boldsymbol{F}$ trois droites parallèles aux directions m, n, p données. Menons ensuite par l'extrémité B de $\boldsymbol{F}$ trois plans parallèles à ceux du trièdre $Amnp$. Ces plans iront couper les arêtes du trièdre aux points C, D, E. On obtient ainsi un parallélépipède dont les arêtes ont les directions données et dont la diagonale AB est constituée par la force à décomposer. Les composantes cherchées de la force $\boldsymbol{F}$ seront précisément les vecteurs $AC = \boldsymbol{F}_m$, $AD = \boldsymbol{F}_n$ et $AE = \boldsymbol{F}_p$. On a en effet

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_m + \boldsymbol{F}_n + \boldsymbol{F}_p.$$

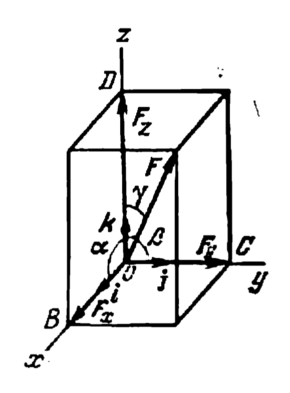


Fig. 1.26

Supposons que la force $\boldsymbol{F}$ fait des angles α, β, γ avec les axes du système de coordonnées cartésiennes orthogonales $Oxyz$ (fig. 1.26). Pour décomposer $\boldsymbol{F}$ suivant les trois axes de coordonnées, nous construirons un parallélépipède dans lequel $\boldsymbol{F}$ sera une diagonale. Les arêtes de ce parallélépipède seront constituées par les composantes que nous désignerons par $\boldsymbol{F}_x$, $\boldsymbol{F}_y$, $\boldsymbol{F}_z$. Les modules des composantes, affectés de signe positif ou négatif suivant que la composante considérée est de même sens ou de sens contraire à la direction positive de l'axe, fourniront les projections X, Y, Z de $\boldsymbol{F}$ sur les axes. Désignons par $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ les vecteurs unités des

axes et mettons les composantes sous la forme

$$F_x = Xi, \qquad F_y = Yj, \qquad F_z = Zk;$$
$$F = F_x + F_y + F_z = Xi + Yj + Zk.$$

Or, on a d'après la formule (1.4)

$$X = F\cos\alpha, \qquad Y = F\cos\beta, \qquad Z = F\cos\gamma. \qquad (1.25)$$

La formule (1.25) permet donc, connaissant le module F de la force et les angles α, β, γ que la force F fait avec les axes de coordonnées, de déterminer les projections de la force sur les axes. Réciproquement,

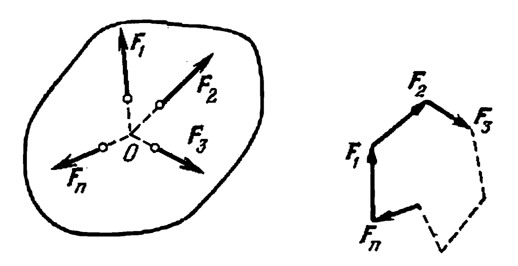


Fig. 1.27

connaissant les projections X, Y, Z sur les axes, on détermine le module et la direction de la force d'après les formules

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \cos\alpha = \frac{X}{F}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{F}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{F}. \quad (1.26)$$

3.3. Condition géométrique d'équilibre d'un système de forces concourantes. Les forces appliquées en un même point se font équilibre si et seulement si leur résultante est égale à zéro. Puisque la résultante d'un système de forces concourantes est exprimée par le vecteur fermant le polygone des forces (voir n° 3.1), l'équilibre exige que le polygone soit fermé. Réciproquement, si le polygone est fermé, cela signifie que la résultante des forces concourantes s'annule. Nous venons d'énoncer la condition d'équilibre sous forme géométrique: *pour que le système de forces concourantes soit en équilibre, il faut et il suffit que le polygone des forces soit fermé* (fig. 1.27).

La méthode du polygone des forces s'applique à la résolution des problèmes dans l'ordre suivant:

a) Définir le solide dont on envisage l'équilibre.

b) Remplacer les actions des liaisons par les réactions (voir nos 2.8 et 2.9).

c) Indiquer sur la figure les points d'application et les directions des forces données et cherchées. Appliquer les forces au solide (au point matériel, au nœud, etc.) dont on étudie l'équilibre.

d) Construire le polygone des forces à une échelle déterminée, en commençant par les forces connues. Puis chercher les éléments inconnus (forces ou angles) du polygone des forces, soit graphiquement, soit par résolution de triangles.

Exemple 1.1. Un solide A de poids $\boldsymbol{P}$ repose sur un plan incliné poli qui fait un angle α avec l'horizontale. Le solide est retenu par un fil AB qui fait un angle β avec la verticale (fig. 1.28, *a*). Trouver la tension du fil et la pression du solide sur le plan.

Solution. Le solide se trouve en équilibre sous l'action de trois forces: le poids $\boldsymbol{P}$ dirigé verticalement vers le bas, la réaction $\boldsymbol{T}$ du fil dirigée le long

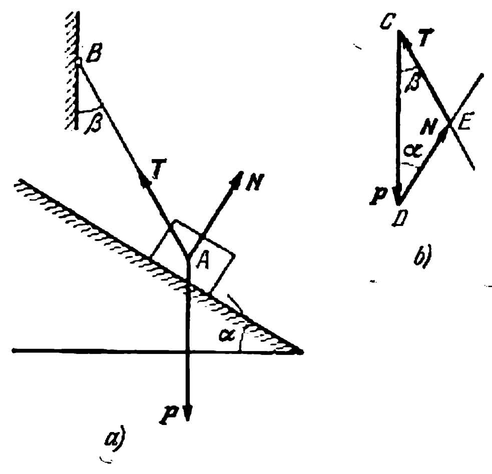


Fig. 1.28

du fil et orientée en dedans de celui-ci et la réaction $\boldsymbol{N}$ du plan dirigée perpendiculairement au plan (nº 2.9). Nous admettons que ces trois forces sont appliquées toutes à un même point, à savoir: le centre de gravité du solide.

Commençons la construction du polygone des forces par la force connue $\boldsymbol{P}$. D'un point arbitraire C, menons le vecteur $\boldsymbol{P}$ (fig. 1.28, *b*). Plaçons l'origine de la force suivante, par exemple $\boldsymbol{N}$, à l'extrémité D du vecteur $\boldsymbol{P}$. Le module de N étant inconnu, on se borne à mener par D une droite parallèle au vecteur $\boldsymbol{N}$. Puisque le solide est en équilibre, le triangle des forces $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{T}$ doit être fermé, si bien que l'extrémité du dernier des vecteurs à composer (vecteur $\boldsymbol{T}$) doit se confondre avec l'origine du premier vecteur ($\boldsymbol{P}$). Cela revient à dire que le support de $\boldsymbol{T}$ doit passer par C. C'est le point d'intersection E des droites qui détermine l'extrémité du vecteur $\boldsymbol{N}$ et l'origine du vecteur $\boldsymbol{T}$. En vertu du théorème des sinus on a

$$\frac{P}{\sin[180^\circ-(\alpha+\beta)]}=\frac{T}{\sin\alpha}=\frac{N}{\sin\beta},$$

d'où

$$T=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}P, \qquad N=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}P.$$

Pour résoudre ce problème par la méthode graphique, on doit tracer le vecteur $\boldsymbol{P}$ à une échelle déterminée et faire les constructions décrites en observant

strictement le parallélisme des droites correspondantes. Mesurant les côtés EC et DE à l'échelle adoptée, on obtient les modules des forces cherchées. La tension du fil (à condition de l'assimiler à une force appliquée au fil) et la pression du solide sur le plan sont égales en module à $\boldsymbol{T}$ et à $\boldsymbol{N}$ respectivement mais sont orientées dans les sens inverses de $\boldsymbol{T}$ et de $\boldsymbol{N}$, vu que ces derniers symbolisent les réactions du fil et du plan. Ce problème peut aussi être résolu en décomposant $\boldsymbol{P}$ en deux forces parallèles à AB et à $\boldsymbol{N}$.

Exemple 1.2. Une barre homogène AB est articulée en A à la paroi verticale et retenue sous un angle α par rapport à la verticale à l'aide d'un fil BC (fig. 1.29, *a*). Trouver la tension $\boldsymbol{T}$ du fil et la réaction $\boldsymbol{R}_A$ de l'articulation. Le poids de la barre est égal à $\boldsymbol{P}$; $AC = AB$.

Solution. Considérons l'équilibre de la barre AB. Les liaisons imposées à AB sont matérialisées par le fil BC et l'articulation A. Remplaçant les actions

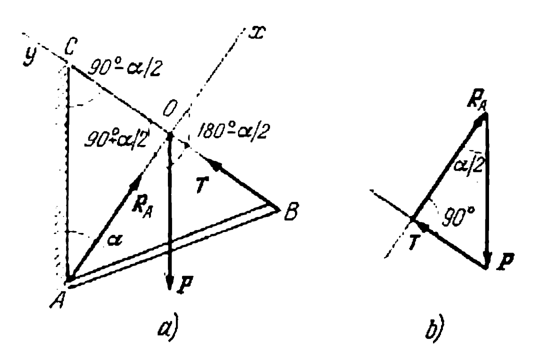


Fig. 1.29

des liaisons par les réactions, on constate que l'équilibre de la barre AB est conditionné par l'action de trois forces non parallèles : le poids $\boldsymbol{P}$ de la barre appliqué au milieu de AB, la tension $\boldsymbol{T}$ du fil et la réaction $\boldsymbol{R}_A$ de l'articulation A. En ce qui concerne la réaction $\boldsymbol{R}_A$, on ne connaît que son point d'application : c'est le point A.

La direction de $\boldsymbol{R}_A$ se cherche d'après le théorème des trois forces (n° 2.6). En effet, ce théorème veut que la direction de $\boldsymbol{R}_A$ passe par le point de concours O des directions de $\boldsymbol{P}$ et de $\boldsymbol{T}$. Construisons le triangle des forces en commençant par la force connue $\boldsymbol{P}$ (fig. 1.29, *b*). Menons par l'extrémité de $\boldsymbol{P}$ une droite parallèle par exemple à $\boldsymbol{T}$. Puisque $\triangle ABC$ est un triangle isocèle d'angle au sommet α, on a $\widehat{ACB} = 90° - \alpha/2$; ce sera l'angle sur la verticale de la direction de $\boldsymbol{T}$ dans le triangle des forces. Par l'origine de $\boldsymbol{P}$, menons une droite parallèle à $\boldsymbol{R}_A$. A cet effet, remarquons que $CO = OB$: on a donc $AO \perp CB$, ce qui fait que les directions de $\boldsymbol{R}_A$ et de $\boldsymbol{T}$ sont perpendiculaires. Le sens des flèches sera choisi de façon à assurer la fermeture du triangle. On a dans ce triangle

$$R_A = P \cos \frac{\alpha}{2}, \qquad T = P \sin \frac{\alpha}{2}.$$

3.4. Conditions analytiques d'équilibre d'un système de forces concourantes. Pour que le système de forces concourantes soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante des forces soit égale à zéro. L'équilibre exige donc que soient annulées les projections de la résultante sur trois axes non parallèles à un même plan. Proje-

tant l'égalité (1.24) sur les axes de coordonnées et faisant intervenir la formule (1.5), on écrit les projections de la résultante sous la forme

$$
\begin{aligned}
R_x &= X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu, \\
R_y &= Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu, \\
R_z &= Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = \sum_{\nu=1}^{n} Z_\nu.
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

Ici X_ν, Y_ν, Z_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) sont les projections de la force $\boldsymbol{F}_\nu$ sur les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz respectivement. Annulant les projections de la résultante, on obtient

$$
\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu &\equiv X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 0, \\
\sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu &\equiv Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = 0, \\
\sum_{\nu=1}^{n} Z_\nu &\equiv Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = 0.
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

Les égalités (1.28) sont précisément les conditions d'équilibre écrites sous forme analytique: *pour que le système de forces concourantes soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme algébrique des projections de toutes les forces sur chacun des trois axes de coordonnées soit égale à zéro.* Il n'est pas obligatoire que le système de coordonnées $Oxyz$ soit rectangulaire.

Dans la méthode analytique les forces inconnues figurent dans les égalités (1.28) qui deviennent équations d'équilibre. Si le système de forces concourantes est plan, on a deux équations au lieu de trois. Soit Oxy le plan d'action des forces; l'équilibre du système plan de forces concourantes se définira alors par les équations

$$
\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu = 0. \tag{1.29}
$$

On recommande d'appliquer cette méthode dans l'ordre suivant. Exécuter les prescriptions a), b), c) définies dans le n° 3.3. Ensuite:

d) Placer l'origine des coordonnées au point de concours des directions des forces. Définir la direction des axes. Afin de simplifier le calcul, il convient de choisir la direction des axes de telle façon que ces derniers soient parallèles (ou perpendiculaires) au plus grand nombre possible de forces.

e) Projeter toutes les forces sur chaque axe; écrire les équations d'équilibre (1.28).

f) Expliciter les inconnues (valeurs des forces, ouvertures des angles, etc.) et les calculer.

Exemple 1.3. Appliquer la méthode analytique au cas de l'exemple 1.2.

Solution. Conformément à la prescription d), donnons aux axes Ox et Oy les directions montrées sur la figure 1.29, *a*. Ecrivons les équations (1.29):

$$\sum X = R_A + P\cos\left(180^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 0, \qquad \sum Y = T + P\cos\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = 0.$$

Elles admettront comme solution

$$R_A = P\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad T = P\sin\frac{\alpha}{2}.$$

qui se confondent avec celles obtenues par la méthode géométrique.

Exemple 1.4. Un fil ACB de longueur l est suspendu entre deux points d'attache fixes A et B (fig. 1.30). Une petite poulie C portant un fardeau de poids P roule sur le fil. Chercher les angles α et β d'inclinaison des brins AC

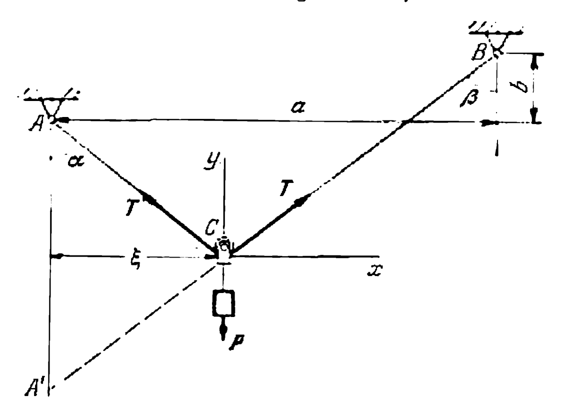


Fig. 1.30

et BC sur la verticale, la tension des deux brins du fil et la distance ξ qui sépare en position d'équilibre la poulie C de la verticale passant par l'appui gauche A. Le frottement dans l'axe de la poulie et le poids de cette dernière sont négligeables.

Solution. Considérons l'équilibre de la poulie C. Etant donné qu'une poulie parfaite (exempte de frottement) ne change pas la tension du fil, les réactions T et T' du fil, dirigées suivant CA et CB, sont égales en module: $T' = T$. Les axes de coordonnées Cx et Cy seront dirigés horizontalement vers la droite et verticalement vers le haut. L'origine des coordonnées sera placée au point de concours des directions des forces P, T et T'. Mettons en équations l'équilibre des forces appliquées à C. Projetant les forces P, T et T' sur les axes Cx et Cy et annulant la somme des projections sur chaque axe, on obtient

$$\sum X = T\cos(90^\circ - \beta) + T'\cos(90^\circ + \alpha) = 0,$$

$$\sum Y = -P + T\cos\beta + T'\cos\alpha = 0.$$

Il ressort de la première équation que $\beta = \alpha$. La seconde équation fournit alors la tension T du fil:

$$T = \frac{P}{2\cos\alpha} = \frac{l}{2\sqrt{l^2 - a^2}} P.$$

La distance ξ est égale à

$$\xi = \frac{AA'}{2} \operatorname{tg}\alpha = \frac{l\cos\alpha - b}{2} \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{b}{\sqrt{l^2 - a^2}}\right).$$

On voit donc que plus b est grand, plus la poulie C est voisine de la verticale de l'appui gauche.

3.5. Méthode de la double projection de la force sur l'axe. On a recours à cette méthode dans le cas où l'angle entre la direction de la force $\boldsymbol{F}$ et l'axe Ol est inconnu à priori (fig. 1.31). Menons un plan quelconque S par l'axe Ol et projetons la force $\boldsymbol{F}$ sur S. La projection sera définie par

$$F_S = F\cos\psi,$$

où ψ est l'angle que fait la force $\boldsymbol{F}$ avec le plan S. Projetons maintenant le vecteur $\boldsymbol{F}_S$ sur l'axe Ol: à cet effet, menons par l'origine A' du vecteur $\boldsymbol{F}_S$ un axe $A'l'$ parallèle à Ol. Désignons l'angle $(\widehat{\boldsymbol{F}_S, A'l'})$ par φ. Il vient

$$F_{Ol} = \text{proj}_{\,Ol}\boldsymbol{F}_S = F_S\cos\varphi = F\cos\psi\cos\varphi.$$

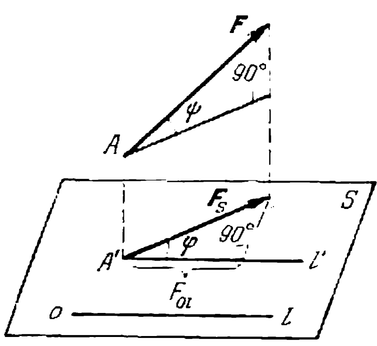


Fig. 1.31

Remarquons que l'angle ψ, constitué par le vecteur force et le plan, est assujetti à rester dans les limites $0 \leqslant \psi \leqslant 90°$, tandis que l'angle φ, formé par le vecteur $\boldsymbol{F}_S$ et la direction positive de l'axe, peut varier dans les limites $0 \leqslant \varphi \leqslant 180°$.

E x e m p l e 1.5. Un fardeau Q de poids 50 kN est suspendu en un point D comme il est montré sur la figure 1.32. Les barres sont articulées en A, B et D; $AD = BD$. Déterminer les réactions des barres AD, BD et la tension de la corde CD.

S o l u t i o n. Considérons l'équilibre du nœud D. La force connue est $\boldsymbol{Q}$; elle est dirigée verticalement vers le bas. Les forces à déterminer sont la réaction $\boldsymbol{R}_A$ de la barre AD, la réaction $\boldsymbol{R}_B$ de la barre BD et la tension $\boldsymbol{T}$ de la corde CD.

Supposons (pour l'automatisme de la solution) que les barres AD et BD soient tendues toutes les deux; leurs réactions, c'est-à-dire les forces $\boldsymbol{R}_A$ et $\boldsymbol{R}_B$ exercées par les barres sur le nœud D, sont dirigées alors suivant les barres à partir du nœud, ainsi qu'il est montré sur la figure 1.32. Toutes les forces étant concourantes en D, on peut chercher les forces inconnues en faisant intervenir les conditions analytiques d'équilibre d'un système de forces concourantes.

Plaçons l'origine des coordonnées en D. Dirigeons l'axe Dz vers le haut, normalement au plan ABC. Plaçons les axes Dx et Dy dans le plan parallèle à ABC (voir figure). La force $\boldsymbol{T}$ est contenue dans le plan vertical, et les forces $\boldsymbol{R}_A$ et $\boldsymbol{R}_B$ dans le plan ABD.

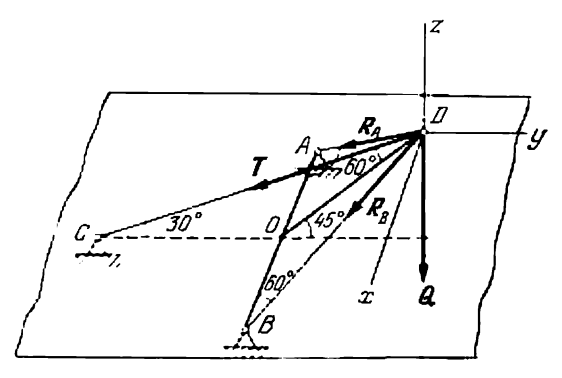


Fig. 1.32

Mettons en équations l'équilibre du nœud D. Projetant toutes les forces sur les axes de coordonnées, nous obtenons

$$\sum X = -R_A \cos 60° + R_B \cos 60° = 0, \qquad \text{(a)}$$

$$\sum Y = -T \cos 30° - R_A \cos 30° \cos 45° - R_B \cos 30° \cos 45° = 0, \qquad \text{(b)}$$

$$\sum Z = -T \cos 60° - R_A \cos 30° \cos 45° - R_B \cos 30° \cos 45° - Q = 0. \qquad \text{(c)}$$

Le lecteur qui aurait des difficultés dans le tracé des projections peut se référer utilement au n° 3.5. De (a) on tire

$$R_B = R_A.$$

De (b) on déduit

$$T = -2R_A \cos 45°.$$

Enfin, en substituant l'expression de T dans (c), on obtient

$$2R_A \sin 30° \cos 45° - 2R_A \cos 30° \sin 45° - Q = 0$$

ou

$$-2R_A \sin (45° - 30°) = Q,$$

d'où

$$R_A = R_B = -\frac{Q}{2 \sin 15°} = -\frac{50}{2 \cdot 0,259} = -96,5 \text{ kN}.$$

Ici R_A et R_B sont les valeurs algébriques des réactions. Si, pendant les calculs, on obtient une valeur négative de la réaction, cela signifie qu'on doit inverser le sens de cette dernière. Ainsi, les réactions $\boldsymbol{R}_A$ et $\boldsymbol{R}_B$ sont dirigées en réalité à l'opposé des directions montrées sur la figure ; cela revient à dire que les barres AD et BD ne sont pas tendues comme supposé mais comprimées. Quant à la tension de la corde, elle est égale à

$$T = 2 \cdot 96,5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 136 \text{ kN}.$$

E x e m p l e 1.6. Déterminer les efforts dans la flèche AB, le fût OB et les béquilles CB, DB de la grue de levage en fonction de l'angle de rotation α de la flèche ($-90^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$). Toutes les fixations sont articulées. Les valeurs des angles sont indiquées sur la figure 1.33, *a*.

S o l u t i o n. Considérons l'équilibre du nœud A. Le nœud est sollicité par une force donnée Q et les réactions R_1, R_2 des barres AO, AB. Supposons à priori que les deux barres sont tendues et dirigeons R_1 et R_2 de la façon repré-

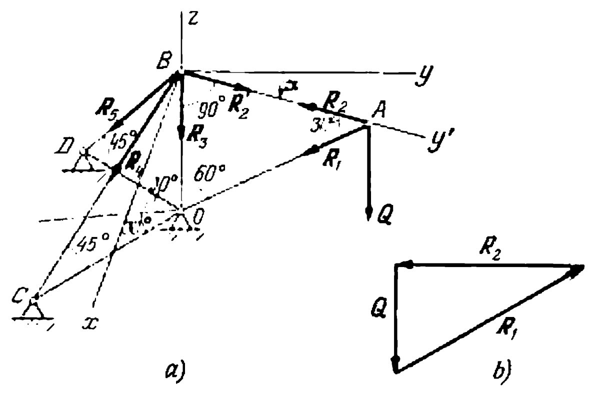


Fig. 1.33

sentée sur la figure 1.33, *a*. Toutes ces forces concourantes sont contenues dans le même plan vertical OAB ; l'équilibre du nœud A se définira donc par deux équations seulement, en assimilant BA à l'axe By' :

$$\sum Y' = R_1 \cos 150^\circ - R_2 = 0,$$

$$\sum Z = -Q + R_1 \cos 120^\circ = 0.$$

De ces équations on tire

$$R_1 = -\frac{Q}{\cos 60^\circ} = -2Q, \quad R_2 = -R_1 \cos 30^\circ = \sqrt{3}\, Q.$$

Puisque $R_1 < 0$, la barre AO est comprimée; la barre AB est tendue. On s'en assure par ailleurs en construisant le polygone des forces Q, R_1 et R_2 (fig. 1.33, *b*).

Considérons à présent l'équilibre du nœud B. Puisque la barre AB est tendue, sa réaction $R_2' = -R_2$ est appliquée au nœud B et orientée en dedans de la barre. En outre, le nœud B est sollicité par la réaction R_3 du fût OB et les réactions R_4, R_5 des béquilles BC, BD. Supposons comme précédemment, de façon arbitraire, que toutes les barres soient tendues. Nous avons un système de forces concourantes, non coplanaires, appliquées au nœud B. Ecrivons trois équations d'équilibre du système, compte tenu de ce que $R_2' = R_2 = \sqrt{3}Q$:

$$\sum X = \sqrt{3}\, Q \cos (90^\circ - \alpha) + R_4 \cos 45^\circ \cos 60^\circ + R_5 \cos 45^\circ \cos 120^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y = \sqrt{3}\, Q \cos \alpha + R_4 \cos 45^\circ \cos 150^\circ + R_5 \cos 45^\circ \cos 150^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum Z = -R_3 + R_4 \cos 135^\circ + R_5 \cos 135^\circ = 0. \quad (3)$$

Mettons les équations (1) et (2) sous la forme

$$\frac{\sqrt{2}}{4}(R_4-R_5)=-\sqrt{3}\,Q\sin\alpha,\qquad -\frac{\sqrt{6}}{4}(R_4+R_5)=-\sqrt{3}\,Q\cos\alpha,$$

d'où

$$R_4=\sqrt{2}\,Q(\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha),\qquad R_5=\sqrt{2}\,Q(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha).$$

L'équation (3) nous donne alors

$$R_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}(R_4+R_5)=-2Q\cos\alpha<0.$$

On en déduit que le fût OB est comprimé. Quant aux béquilles CB et DB, elles peuvent être tendues ou comprimées, en fonction de α. Les valeurs maximales et minimales de R_4 et R_5 se calculent sans peine, ce que nous omettrons cependant de faire ici.

Exercices

Exercice 1.1. Un fardeau de poids P est posé sur un plan incliné poli qui fait un angle α avec l'horizontale (fig. 1.34). Déterminer graphiquement, puis analytiquement la force T qu'on doit appliquer au fardeau sous un angle β par

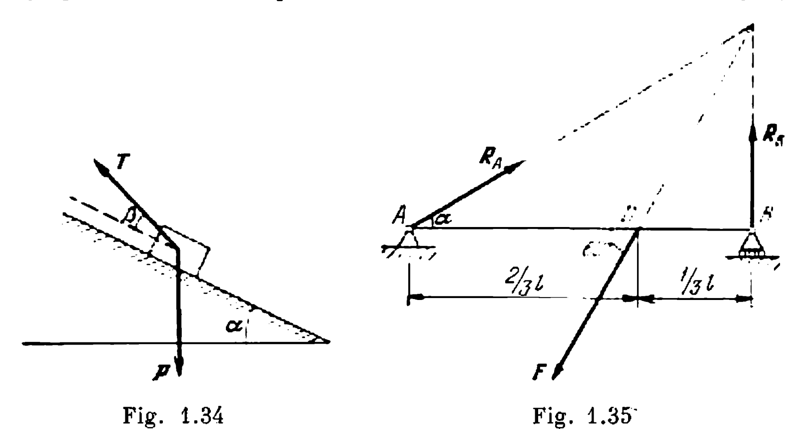


Fig. 1.34 Fig. 1.35

rapport au plan incliné pour assurer l'équilibre du fardeau ($\alpha+\beta<90°$).

Indication. La troisième force appliquée au fardeau est la réaction normale N du plan incliné.

Réponse.

$$T=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}P.$$

Exercice 1.2. Une extrémité de la poutre AB (fig. 1.35) est munie d'une articulation cylindrique et fixée sur un appui fixe; l'autre extrémité B de la poutre repose sur un rouleau. Une force F est appliquée au point D de la poutre. On demande de savoir les réactions des appuis en A et B.

Indication. Calculer d'abord l'angle α d'après le théorème des trois forces. Appliquer ensuite la méthode graphique ou analytique.

Réponse.

$$R_A=R_B=\frac{\sqrt{3}}{3}F=0{,}577F\qquad(\alpha=30°).$$

E x e r c i c e 1.3. La poutre AB (fig. 1.36) est articulée en A et soutenue par une barre CD. Les attaches en C et D sont articulées. $AC = CB$, $\widehat{ACD} = 90°$,

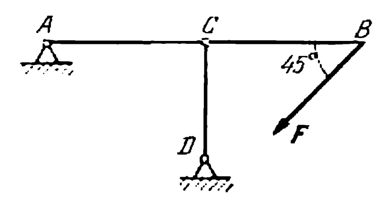


Fig. 1.36

le poids de la poutre est négligeable. Déterminer les réactions aux articulations A et C, sachant que la force agissant en B est égale à $F = 50$ kN.

I n d i c a t i o n. La réaction en C est dirigée suivant la barre CD. Appliquer le théorème des trois forces pour définir la direction de la réaction R_A en A.

R é p o n s e. $R_A = 50$ kN, $R_C = 70{,}7$ kN.

E x e r c i c e 1.4. Déterminer les efforts S dans les barres CA de longueur a, CB de longueur b et la tension de la chaîne CD de longueur d supportant le

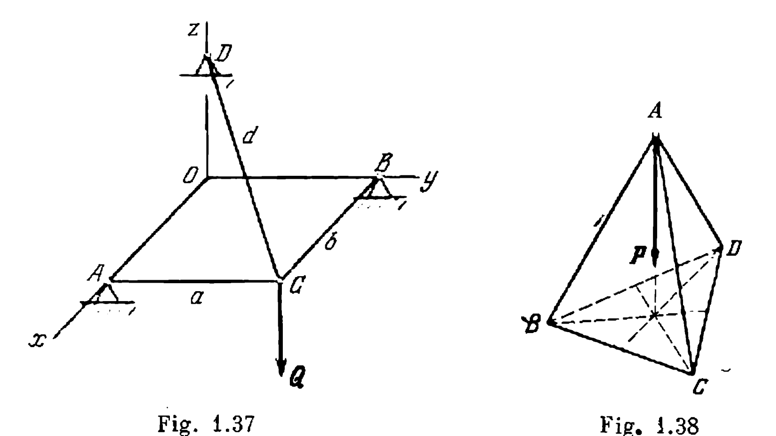


Fig. 1.37 Fig. 1.38

fardeau Q (fig. 1.37). Les deux barres sont perpendiculaires entre elles et contenues dans un plan horizontal.

R é p o n s e.

$$S_{CA} = -\frac{a}{OD} Q, \quad S_{CB} = -\frac{b}{OD} Q, \quad T_{CD} = \frac{d}{OD} Q,$$

où

$$OD = \sqrt{d^2 - a^2 - b^2}.$$

E x e r c i c e 1.5. Le trépied $ABCD$ (fig. 1.38) repose sur un sol poli horizontal. Ses trois pieds, de longueur égale l, sont liés aux points B, C, D par un fil BCD qui forme un triangle équilatéral de côtés égaux à l. Un fardeau P est suspendu en A. On demande de savoir les efforts S dans les pieds.

R é p o n s e.

$$S_{AB} = S_{AC} = S_{AD} = -\frac{\sqrt{6}}{6} P = -0{,}408P.$$

CHAPITRE II

SYSTÈME DE DEUX FORCES PARALLÈLES. THÉORIE DES COUPLES DE FORCES SUR LE PLAN

§ 1. Système de deux forces parallèles

On appelle *système plan* un système de forces qui sont contenues toutes dans un même plan.

Un cas particulier de système de forces plan est un système de forces coplanaires concourantes; les règles de composition de ces forces et les conditions d'équilibre du système ont été exposées dans le paragraphe précédent. Avant de passer à l'étude du cas général du système de forces plan, c'est-à-dire d'un système de forces dirigées arbitrairement dans le plan (chapitre III), nous examinerons un autre cas particulier de système plan, à savoir: le système de deux forces parallèles.

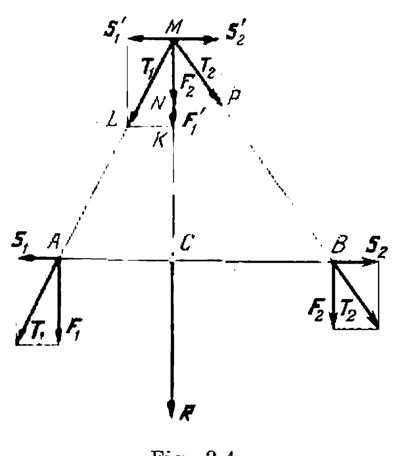


Fig. 2.1

1.1. Composition de deux forces parallèles de même sens. A la différence des forces concourantes, la composition de deux forces $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$, parallèles, de même sens, appliquées en deux points A et B du solide ne peut pas se faire directement par la règle du parallélogramme.

Appliquons au solide, en A et B, deux forces S_1, S_2 de valeur égale et de sens opposé (fig. 2.1). Rappelons que cela est légitime en vertu de l'axiome II (ch. I, nº 2.5). Faisons la composition des forces $\boldsymbol{F}_1$ et S_1, $\boldsymbol{F}_2$ et S_2 d'après la règle du parallélogramme: nous obtenons deux nouvelles forces $\boldsymbol{T}_1$ et $\boldsymbol{T}_2$ dont les directions viennent se couper en un point M. Portons $\boldsymbol{T}_1$ et $\boldsymbol{T}_2$ en M et décomposons-les en $\boldsymbol{F}'_1$, S'_1 et $\boldsymbol{F}'_2$, S'_2 respectivement, de la manière montrée sur la figure; supprimant S'_1 et S'_2, nous nous retrouvons en présence de deux forces $\boldsymbol{F}'_1$ et $\boldsymbol{F}'_2$ portées par la même droite. Ainsi donc, les forces $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ appliquées en A et B sont équivalentes aux forces $\boldsymbol{F}'_1$ et $\boldsymbol{F}'_2$ appliquées

en M; leur somme est égale à $\boldsymbol{R}$ ($R = F'_1 + F'_2$) et dirigée suivant la même droite. Le point C par lequel passe la ligne d'action de $\boldsymbol{R}$ partage le segment AB en parties inversement proportionnelles aux modules des forces $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$:

$$AC = \frac{F_2}{R} AB, \quad BC = \frac{F_1}{R} AB, \text{ ou } \frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}. \tag{2.1}$$

En effet, on a par similitude de $\Delta\, ACM$ et $\Delta\, LKM$

$$\frac{AC}{S_1} = \frac{CM}{F_1}, \text{ ou } AC \cdot F_1 = CM \cdot S_1. \tag{2.2}$$

Par similitude de $\Delta\, BCM$ et $\Delta\, PNM$

$$\frac{BC}{S_2} = \frac{CM}{F_2}, \text{ ou } BC \cdot F_2 = CM \cdot S_2. \tag{2.3}$$

Les relations (2.3) et (2.2) nous donnent $AC \cdot F_1 = BC \cdot F_2$, ou

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AC + BC}{F_2 + F_1} = \frac{AB}{R},$$

d'où (2.1).

Ainsi donc, *deux forces* $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ *parallèles, de même sens, admettent une résultante unique* $\boldsymbol{R}$ parallèle aux deux premières, de même sens,

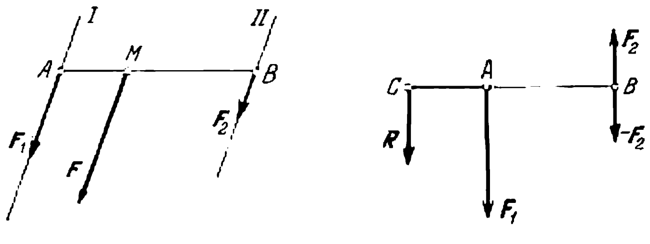


Fig. 2.2 Fig. 2.3

dont le module est égal à la somme des modules des deux forces. La ligne d'action de la résultante passe par le point C qui partage le segment AB en parties inversement proportionnelles aux modules des forces $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$.

La relation établie permet de décomposer la force $\boldsymbol{F}$ appliquée en M (fig. 2.2) en deux forces $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ portées par des droites I et II parallèles à $\boldsymbol{F}$ et situées de part et d'autre de $\boldsymbol{F}$. En effet, menons par M une droite jusqu'à l'intersection avec I et II; puisque toute force se laisse transférer le long de sa direction, nous admettrons que les composantes $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ sont appliquées aux points d'intersection A et B respectivement. Les modules se laissent calculer d'après les relations (2.1) après avoir changé R en F et C en M:

$$F_1 = \frac{BM}{AB} F, \quad F_2 = \frac{AM}{AB} F \quad (F_1 + F_2 = F). \tag{2.4}$$

1.2. Cas des forces parallèles de sens opposés. Soient appliquées en deux points A, B du solide deux forces $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ parallèles et de sens opposé (fig. 2.3). Imposons une restriction qui n'a pas été introduite pour les forces parallèles de même sens, en admettant que les modules des forces $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ ne sont pas égaux : posons par exemple $F_1 > F_2$.

Proposons-nous de faire la composition de deux forces parallèles de sens opposés. Décomposons la plus grande force $\boldsymbol{F}_1$ en deux forces parallèles de même sens, en procédant un peu autrement qu'en fin du nº 1.1 : au lieu de se donner les droites I et II, on se donne ici une des composantes, à savoir $-\boldsymbol{F}_2$, appliquée en B. Le module de la seconde composante $\boldsymbol{R}$ sera égal alors à $F_1 - F_2$; quant à son point d'application C, il se définit par la proportion

$$\frac{CA}{F_2} = \frac{AB}{F_1 - F_2}. \qquad (2.5)$$

Les forces $\boldsymbol{F}_2$ et $-\boldsymbol{F}_2$ appliquées en B forment un système de forces équilibré et peuvent donc être supprimées, en vertu de l'axiome II (ch. I, nº 2.5). Ecrivons les opérations effectuées sous la forme

$$\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2\} \backsim \{\boldsymbol{R}, -\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_2\} \backsim \boldsymbol{R},$$

ce qui revient à dire qu'un système donné de deux forces parallèles de sens opposés est équivalent à une résultante unique $\boldsymbol{R}$ dont la ligne d'action passe par C. Ecrivons une proportion dérivée de (2.5) :

$$\frac{CA + AB}{F_2 + (F_1 - F_2)} = \frac{CA}{F_2}, \quad \text{ou} \quad \frac{CB}{CA} = \frac{F_1}{F_2}. \qquad (2.6)$$

Ainsi donc, *deux forces $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ parallèles, de sens opposés, non égales en module ($F_1 > F_2$) admettent une résultante unique $\boldsymbol{R}$*, parallèle aux deux premières, du sens de la plus grande, dont le module est égal à la différence des modules des composantes :

$$R = F_1 - F_2. \qquad (2.7)$$

La ligne d'action de la résultante partage extérieurement le segment limité par les points d'application des composantes en parties inversement proportionnelles aux modules (voir (2.6)).

Proposons-nous maintenant de décomposer une force donnée $\boldsymbol{F}$ en deux forces $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ portées par des droites I et II parallèles à $\boldsymbol{F}$ et situées du même côté de $\boldsymbol{F}$ (fig. 2.4). Menons une droite par le point d'application M de $\boldsymbol{F}$ jusqu'à l'intersection avec I et II en A et B respectivement. La composante $\boldsymbol{F}_1$ est plus grande que $\boldsymbol{F}_2$, car son support est plus proche de celui de $\boldsymbol{F}$: elle est donc de même sens que $\boldsymbol{F}$, tandis que $\boldsymbol{F}_2$ est de sens contraire. Les modules des composantes se cherchent d'après les proportions (2.5) et (2.6) qui

s'écrivent sous la forme

$$\frac{F_1}{BM}=\frac{F_2}{AM}=\frac{F}{AB}.$$

On en déduit

$$F_1=\frac{BM}{AB}F, \quad F_2=\frac{AM}{AB}F \quad (F_1-F_2=F). \tag{2.8}$$

Les problèmes de composition des forces parallèles, envisagés ici et dans le n° 1.1, fournissent également la solution du problème de recherche d'une force propre à faire équilibre à deux forces parallèles. Nous avons dit dans le chapitre I, n° 2.4, que si un système de

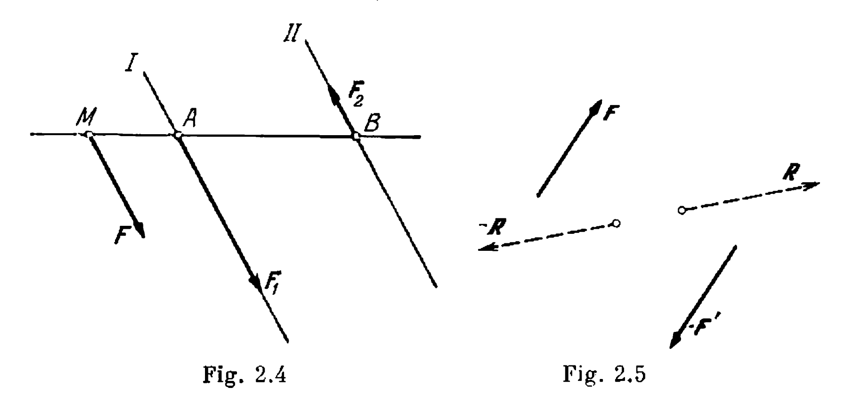


Fig. 2.4 Fig. 2.5

forces admet une résultante unique, la force directement opposée à celle-ci (c'est-à-dire égale en module, portée par la même droite et orientée dans le sens inverse) est la force équilibrante. D'une façon générale, la recherche de l'équilibrante se réduit à la recherche d'une résultante unique.

1.3. Couple de forces. Il reste à considérer le cas que nous avons exclu dans le n° 1.2: un système de deux forces $\boldsymbol{F}$, $-\boldsymbol{F}'$ parallèles, de sens opposés et de même module, appelé *couple de forces* (fig. 2.5).

L e m m e. *Un couple de forces ne peut pas être ramené à une résultante unique.*

D é m o n s t r a t i o n. Appliquons les formules (2.7) et (2.5). Il vient

$$R=0, \quad CA=\frac{AB}{0},$$

ce qui veut dire que la résultante est égale à zéro et passe par un point à l'infini. Cela revient à dire justement qu'on ne peut pas ramener un couple de forces à une résultante unique parallèle aux composantes du couple. Admettons à présent que le couple de forces

$\boldsymbol{F}$, $-\boldsymbol{F}'$ admet une résultante unique $\boldsymbol{R}$ qui n'est pas parallèle aux composantes du couple (fig. 2.5). Alors, ajoutant au système de forces $\boldsymbol{F}$, $-\boldsymbol{F}'$ une force $-\boldsymbol{R}$, nous obtenons un système de trois forces équilibrées $\boldsymbol{F}$, $-\boldsymbol{F}'$, $-\boldsymbol{R}$. En vertu du théorème des trois forces (ch. I, n° 2.6), les directions de ces trois forces doivent concourir en un point, ce qui est impossible. Il n'existe donc aucune résultante non parallèle aux forces du couple. Le lemme est démontré.

La proposition démontrée admet un énoncé équivalent: *un couple de forces ne peut pas être équilibré par une force unique.* Les forces $\boldsymbol{F}$ et $-\boldsymbol{F}'$ du couple ne sont d'ailleurs pas équilibrées elles-mêmes, car elles ont des supports différents (voir axiome I, ch. I, n° 2.5).

Un couple de forces provoque une rotation du solide, à moins qu'une liaison vienne s'y opposer. Un couple de forces est une grandeur mécanique à part entière, au même titre qu'une force isolée. Le paragraphe suivant sera consacré à la déduction des caractéristiques quantitatives des couples de forces et aux règles d'opérations qu'on peut effectuer sur les couples de forces.

§ 2. Théorie des couples de forces sur le plan

2.1. Moment d'une force par rapport à un point. C'est une des grandeurs fondamentales en statique. Soient une force $\boldsymbol{F}$ et un point O (fig. 2.6). Menons par O un plan contenant $\boldsymbol{F}$. Abaissons de O une perpendiculaire OP sur la direction AB de $\boldsymbol{F}$. La longueur de la perpendiculaire est le *bras de levier de la force* $\boldsymbol{F}$ *par rapport au point* O; ce point s'appelle le *pôle*.

Fig. 2.6

Le *moment de la force* $\boldsymbol{F}$ *par rapport au point* O est le produit du module F de la force par le bras de levier h, qui peut être affecté de signe positif ou négatif:

$$\text{mom}_O\,\boldsymbol{F} = \pm Fh. \qquad (2.9)$$

Nous admettons que le moment de la force est positif si la force fait tourner le plan dans le sens antihoraire (voir fig. 2.6); dans le cas contraire le moment de la force est considéré comme négatif, ce qui se traduit par le signe correspondant dans la formule (2.9). La dimension du moment d'une force est le produit de l'unité de force par l'unité de longueur. En unités SI (ch. I, n° 2.3) le moment d'une force est mesuré en newtons-mètres (N·m).

R e m a r q u e s. a) Par définition, le moment de la force reste inchangé quand on transfère le point d'application de la force en un point quelconque de sa ligne d'action.

b) Si $h = 0$, on a $\text{mom}_O \boldsymbol{F} = 0$; autrement dit, le moment par rapport à un point d'une force distincte de zéro est nul si et seulement si la direction de la force passe par le pôle.

c) La valeur absolue du moment d'une force est le double de l'aire du triangle construit sur la force et le pôle:

$$|\text{mom}_O \boldsymbol{F}| = Fh = 2S_{\triangle OAB}.$$

d) Le moment de la force facilite la détermination du point d'application C d'une résultante de forces parallèles de même sens. La proportion (2.1) se laisse représenter sous la forme

$$F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC,$$

ce qui signifie que

$$|\text{mom}_C \boldsymbol{F}_1| = |\text{mom}_C \boldsymbol{F}_2|.$$

Faisant intervenir les signes des moments des forces, on obtient

$$\text{mom}_C \boldsymbol{F}_1 + \text{mom}_C \boldsymbol{F}_2 = 0. \tag{2.10}$$

Dans le cas des forces parallèles de sens opposés nous avons en vertu de la proportion (2.6)

$$F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC,$$

ce qui nous ramène comme précédemment à (2.10). Ainsi donc, le point d'application de la résultante de deux forces parallèles est déterminé par la condition d'annulation de la somme des moments des forces composantes par rapport au point cherché.

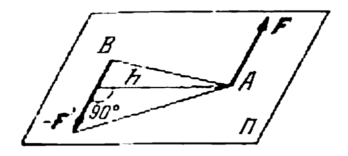


Fig. 2.7

2.2. Moment d'un couple de forces. Le plan Π qui contient les forces $\boldsymbol{F}$ et $-\boldsymbol{F}'$ du couple de forces (fig. 2.7) s'appelle *plan d'action du couple de forces*. La distance h séparant les lignes d'action des forces est le *bras de levier du couple de forces*.

Le *moment m du couple de forces* $\boldsymbol{F}$, $-\boldsymbol{F}'$ est le produit (positi ou négatif) du module de l'une des forces du couple par le **bras** de levier du couple:

$$m = \pm Fh. \tag{2.11}$$

Si le couple de forces tend à faire tourner son plan d'action dans le sens antihoraire, on prend dans (2.11) le signe positif; dans le cas contraire (rotation dans le sens horaire), on prend le signe négatif. Par exemple, le moment du couple de forces montré sur la figure 2.5 est négatif, et sur la figure 2.7, positif.

En regardant la figure 2.7 et les formules (2.9) et (2.11), on remarque que

$$m = \text{mom}_A (-\boldsymbol{F}') = \text{mom}_B \boldsymbol{F}, \tag{2.12}$$

c'est-à-dire que le moment d'un couple de forces est égal au moment de l'une des deux forces par rapport au point d'application de l'autre. Le moment du couple de forces est égal en valeur absolue au double de l'aire du triangle qui a pour base une des forces du couple, et pour hauteur le bras de levier. Le moment d'un couple de forces est mesuré avec les mêmes unités que le moment d'une force.

2.3. Théorème des couples coplanaires équivalents. Démontrons un théorème qui, avec ses corollaires, détermine les propriétés principales des couples sur le plan.

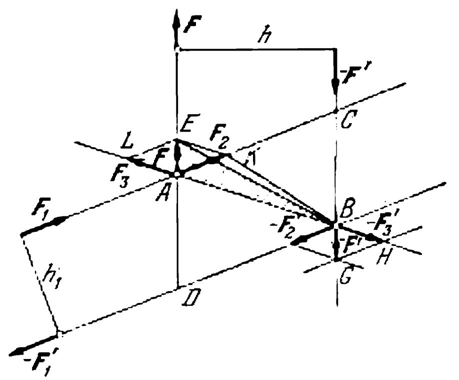


Fig. 2.8

Théorème. *Deux couples coplanaires présentant les mêmes moments (en valeur absolue) et les mêmes sens de rotation sont équivalents.*

Démonstration. Soient deux couples F, $-F'$ et F_1, $-F_1'$ contenus dans un même plan. Les moments de ces couples sont

$$F_1h_1 = Fh \qquad (2.13)$$

et leurs sens de rotation sont les mêmes.

a) Supposons d'abord que les forces F et F_1 ne sont pas parallèles (fig. 2.8). Pour démontrer l'équivalence, nous allons essayer de transformer le couple F, $-F'$, par des opérations élémentaires (voir ch. I, n° 2.4), en couple F_1, $-F_1'$. Transférons les points d'application de F et $-F'$ en A, B et décomposons ces forces en F_2, F_3 et $-F_2'$, $-F_3'$. De toute évidence, $F_2 = F_2'$ et $F_3 = F_3'$. Supprimant les forces équilibrées F_3 et $-F_3'$, nous voyons que le couple F, $-F'$ est équivalent au couple F_2, $-F_2'$:

$$\{F, \ -F'\} \backsim \{F_2, \ -F_2'\}. \qquad (2.14)$$

Il reste à montrer que $F_2 = F_1$. A cet effet, montrons que le moment du couple F_2, $-F_2'$ est égal à celui du couple F, $-F'$. En effet, le moment du couple F, $-F'$ est égal en valeur absolue au double de l'aire du triangle BAE (hachuré sur la figure 2.8), tandis que le moment du couple F_2, $-F_2'$ est égal au double de l'aire du triangle BAK. Or, ces deux triangles ont même aire, car ils ont même base AB et même hauteur (les sommets E et K appartenant à une droite parallèle à la base).

Exprimons les moments sous forme de produit du module de la force par le bras de levier. Il vient

$$F_2h_1 = Fh.$$

La confrontation avec (2.13) nous donne l'égalité

$$F_2 h_1 = F_1 h_1, \quad \text{ou} \quad F_2 = F_1.$$

Cela revient à dire que

$$\{\boldsymbol{F}_2, -\boldsymbol{F}_2'\} \backsim \{\boldsymbol{F}_1, -\boldsymbol{F}_1'\},$$

d'où l'on déduit en vertu de (2.14) que

$$\{\boldsymbol{F}, -\boldsymbol{F}'\} \backsim \{\boldsymbol{F}_1, -\boldsymbol{F}_1'\}.$$

Le théorème est démontré pour le cas a).

b) Supposons maintenant que les forces $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{F}_1$ sont parallèles (fig. 2.9). Les moments des couples $\boldsymbol{F}$, $-\boldsymbol{F}'$ et $\boldsymbol{F}_1$, $-\boldsymbol{F}_1'$ sont égaux comme précédemment:

$$F \cdot AB = F_1 \cdot CD. \tag{2.15}$$

Pour démontrer l'équivalence des couples, essayons comme précédemment de transformer le couple $\boldsymbol{F}$, $-\boldsymbol{F}'$ par des opérations

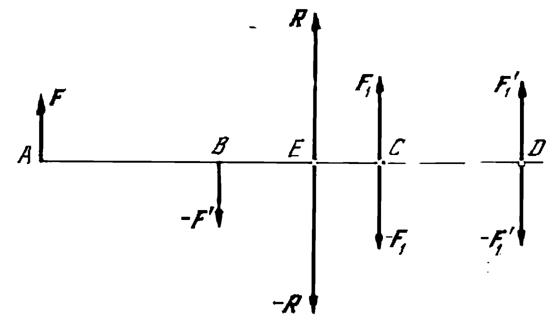


Fig. 2.9

élémentaires (voir ch. I, n° 2.4) en couple $\boldsymbol{F}_1$, $-\boldsymbol{F}_1'$. A cet effet, appliquons en C et D des forces équilibrées $\boldsymbol{F}_1$ et $-\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_1'$ et $-\boldsymbol{F}_1'$. La composition de $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{F}_1'$ nous donne une force unique $\boldsymbol{R}$ ($R = F + F_1$) appliquée en un point E tel que

$$F \cdot AE = F_1 \cdot ED.$$

Retranchons de cette égalité l'égalité (2.15):

$$F\,(AE - AB) = F_1\,(ED - CD),$$

c'est-à-dire que

$$F \cdot BE = F_1 \cdot EC. \tag{2.16}$$

Faisons à présent la composition des forces $-\boldsymbol{F}'$ et $-\boldsymbol{F}_1$. Leur résultante est égale en module à $\boldsymbol{R}$, orientée dans le sens inverse et appliquée au point E, ce qui ressort de (2.16). Supprimons les forces

équilibrées $\boldsymbol{R}$ et $-\boldsymbol{R}$: les forces $\boldsymbol{F}_1$ et $-\boldsymbol{F}_1'$ qui restent constituent le couple demandé.

Les opérations effectuées s'écriront comme suit:

$$\{\boldsymbol{F}, -\boldsymbol{F}'\} \backsim \{\boldsymbol{F}, -\boldsymbol{F}'\} + \{\boldsymbol{F}_1, -\boldsymbol{F}_1\} + \\ + \{\boldsymbol{F}_1', -\boldsymbol{F}_1'\} \backsim \{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}_1'\} + \{-\boldsymbol{F}', -\boldsymbol{F}_1\} + \\ + \{\boldsymbol{F}_1, -\boldsymbol{F}_1'\} \backsim \{\boldsymbol{R}, -\boldsymbol{R}\} + \{\boldsymbol{F}_1, -\boldsymbol{F}_1'\} \backsim \{\boldsymbol{F}_1, -\boldsymbol{F}_1'\}.$$

Le cas b) est démontré, ce qui achève la démonstration du théorème.

Ainsi donc, un couple de forces en tant que grandeur mécanique se caractérise complètement dans son plan d'action par la valeur du moment (signe compris).

Ce théorème donne lieu à deux corollaires:

1° Tout couple de forces se laisse transférer rigidement dans son plan d'action sans que son effet sur le solide s'en trouve changé.

2° L'effet du couple de forces reste inchangé si l'on change les valeurs des forces et le bras de levier, à condition que la valeur absolue du moment, c'est-à-dire le produit de la force par le bras de levier, et le sens de rotation du couple restent inchangés.

2.4. Composition des couples coplanaires. Condition d'équilibre d'un système de couples plan. Proposons-nous de faire la composition de couples contenus dans un même plan.

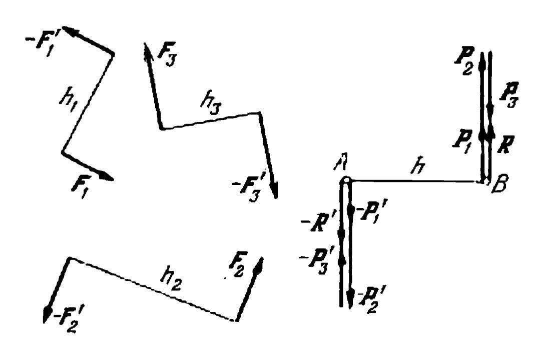


Fig. 2.10

Soient trois couples $\boldsymbol{F}_1$, $-\boldsymbol{F}_1'$; $\boldsymbol{F}_2$, $-\boldsymbol{F}_2'$; $\boldsymbol{F}_3$, $-\boldsymbol{F}_3'$; soient h_1, h_2, h_3 leurs bras de levier respectifs (fig. 2.10). Désignons les moments de ces couples par m_1, m_2 et m_3:

$$m_1 = F_1h_1, \qquad m_2 = F_2h_2, \qquad m_3 = -F_3h_3.$$

Prenons un segment de droite arbitraire $AB = h$ et réduisons les couples à ce segment. Les forces $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ qui forment des couples de bras de levier h équivalents aux couples donnés, seront déduites

des égalités

$$m_1 = P_1 h, \qquad m_2 = P_2 h, \qquad m_3 = -P_3 h;$$

il vient

$$P_1 = \frac{m_1}{h} = \frac{h_1}{h} F_1, \quad P_2 = \frac{m_2}{h} = \frac{h_2}{h} F_2, \quad P_3 = -\frac{m_3}{h} = \frac{h_3}{h} F_3.$$

Les forces $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ ont même support; le module de leur résultante $\boldsymbol{R}$ est égal à

$$R = P_1 + P_2 - P_3.$$

Désignons la résultante des forces $-\boldsymbol{P}_1'$, $-\boldsymbol{P}_2'$, $-\boldsymbol{P}_3'$ par $-\boldsymbol{R}'$,

$$R' = P_1' + P_2' - P_3';$$

égale en module et parallèle à $\boldsymbol{R}$, elle est orientée en sens inverse. Ainsi donc, les couples $\boldsymbol{F}_1$, $-\boldsymbol{F}_1'$; $\boldsymbol{F}_2$, $-\boldsymbol{F}_2'$; $\boldsymbol{F}_3$, $-\boldsymbol{F}_3'$ se réduisent à un couple unique $\boldsymbol{R}$, $-\boldsymbol{R}'$, dit *couple résultant* des couples de forces donnés.

Le moment m du couple résultant est

$$m = Rh = (P_1 + P_2 - P_3)\, h = m_1 + m_2 + m_3, \qquad (2.17)$$

c'est-à-dire que *le moment du couple résultant est égal à la somme algébrique des moments des couples composants.*

Si $P_1 + P_2 - P_3 = 0$, on a de même $P_1' + P_2' - P_3' = 0$, ce qui veut dire que le système des forces appliquées en A et B est en équilibre. Donc, les couples $\boldsymbol{F}_1$, $-\boldsymbol{F}_1'$; $\boldsymbol{F}_2$, $-\boldsymbol{F}_2'$; $\boldsymbol{F}_3$, $-\boldsymbol{F}_3'$ équivalents à ce système sont en équilibre eux aussi. Puisqu'on a $m = 0$, il vient

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0.$$

Ainsi donc, les couples donnés sont en équilibre si la somme algébrique de leurs moments est égale à zéro. Ceci est précisément la *condition d'équilibre des couples coplanaires* *). Le résultat dégagé se laisse étendre à un nombre quelconque de couples.

Exemple 2.1. La poutre horizontale AB (fig. 2.11) est sollicitée par un couple de forces de moment $m_1 < 0$. Déterminer la réaction aux appuis si l'appui gauche A est une articulation fixe et l'appui droit B un rouleau; la distance entre appuis $AB = l$.

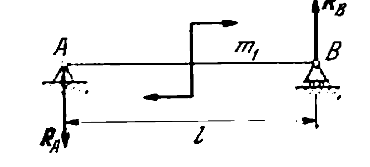


Fig. 2.11

Solution. Considérons l'équilibre de la poutre. Supprimons les liaisons en leur substituant les réactions $\boldsymbol{R}_A$ et $\boldsymbol{R}_B$. Maintenant la poutre est soumise à l'action d'un couple de forces de moment m_1, ainsi qu'à l'action des forces $\boldsymbol{R}_A$ et $\boldsymbol{R}_B$. Un couple de forces ne peut être équilibré que par un autre couple de forces: cela revient à dire que les réactions $\boldsymbol{R}_A$ et $\boldsymbol{R}_B$ forment nécessairement un

*) Plus exactement, c'est la condition d'équilibre des couples situés dans un plan ou dans des plans parallèles. Pour plus de détails, voir ch. V, nº 1.3.

couple de moment $-m_1$. La réaction $\boldsymbol{R}_B$ du rouleau horizontal étant dirigée verticalement vers le haut, on conçoit que $\boldsymbol{R}_A$ est de module égal et de sens opposé à $\boldsymbol{R}_B$:

$$\boldsymbol{R}_A = -\boldsymbol{R}_B.$$

Quant au moment du couple $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_B$, il est positif, car le couple à équilibrer présente un moment $m_1 < 0$. Ecrivons maintenant la condition d'équilibre des couples:

$$\sum m = m_1 + R_B l = 0.$$

Les modules des réactions cherchées seront alors

$$R_A = R_B = -\frac{m_1}{l} > 0$$

Exercices

Exercice 2.1. En quel point A de l'arbre (fig. 2.12) doit-on attacher une corde de longueur l pour abattre l'arbre en appliquant une force de traction minimale ?

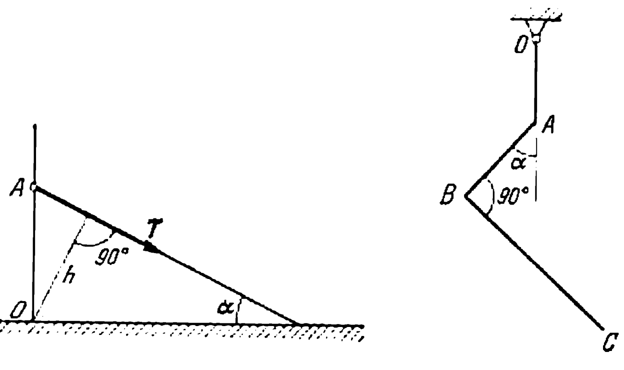


Fig. 2.12 Fig. 2.13

Indication. Le bras de levier h de la force de traction T par rapport au pied O de l'arbre, considéré comme fonction de l'angle α, doit être aussi long que possible.

Réponse. $\alpha = 45°$, $OA = l \sin \alpha = 0{,}707\, l$.

Exercice 2.2. Deux barres homogènes AB, BC ($BC = 2AB$) sont rigidement assemblées à 90° (fig. 2.13). L'extrémité A est suspendue à un fil. Déterminer la tension $\boldsymbol{T}$ du fil OA et l'angle α du système en position d'équilibre si le poids de AB est $\boldsymbol{P}$ et celui de BC est $2\boldsymbol{P}$.

Réponse. $T = 3P$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$.

CHAPITRE III

SYSTÈME DE FORCES PLAN

Si toutes les forces appliquées au solide sont contenues dans un même plan, on dit que le système de forces est *plan*. Soit un système plan formé par des forces F_1, F_2, . . ., F_n quelconques, c'est-à-dire disposées d'une façon arbitraire sur le plan. Portons les forces F_1 et F_2 au point de concours de leurs directions et faisons leur composition d'après la règle du parallélogramme : nous obtenons une résultante $R_{12} = F_1 + F_2$. Si les forces F_1, F_2 sont parallèles, R_{12} s'obtient par la règle de composition des forces parallèles. Faisant par le même procédé la composition de R_{12} avec la force F_3, nous obtenons une nouvelle résultante R_{123}, et ainsi de suite. Un cas particulier se présente lorsque les forces à composer forment un couple : on fait alors la composition de tous les couples trouvés en appliquant la règle définie au chapitre II, n° 2.4.

Après avoir effectué la composition successive de toutes les forces (et de tous les couples), on obtient dans le cas général une résultante générale R' et un couple résultant P, $-P'$. Il y a des cas particuliers où le moment du couple résultant est égal à zéro, la résultante générale est égale à zéro, ou enfin la résultante générale et le moment du couple résultant sont nuls tous les deux. Dans ces cas le système de forces considéré est équivalent à une résultante unique, ou à un couple résultant unique, ou encore à zéro (système de forces équilibré).

Or, dans le cas général, un tel mode de composition des forces s'avère peu commode. Nous utiliserons une méthode plus générale et plus commode, qui simplifie le calcul et facilite l'interprétation mécanique du problème.

§ 1. Réduction du système de forces plan à un centre donné

1.1. Lemme. *La force* $\boldsymbol{F}$ *appliquée en un point A est équivalente à un système de forces constitué par la force* $\boldsymbol{F}'$ *équipollente* *) *à* $\boldsymbol{F}$ *et appliquée en un point O, et par le couple* $\boldsymbol{F}$, $-\boldsymbol{F}'$.

*) Dans cet énoncé, nous voulons souligner que les vecteurs F et F' supposés libres sont équipollents, tandis que les forces F et F' ne sont pas équivalentes.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\boldsymbol{F}$ la force appliquée en A (fig. 3.1). Appliquons en O deux forces $\boldsymbol{F}'$, $-\boldsymbol{F}'$ directement opposées, parallèles et égales en module à $\boldsymbol{F}$. Nous obtenons un système de trois forces $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}'$, $-\boldsymbol{F}'$ équivalent à la force $\boldsymbol{F}$ appliquée en A : ce système peut être assimilé à une force $\boldsymbol{F}'$ équipollente à $\boldsymbol{F}$ et appliquée en O, et à un couple $\boldsymbol{F}$, $-\boldsymbol{F}'$. Ces relations s'écrivent sous la forme

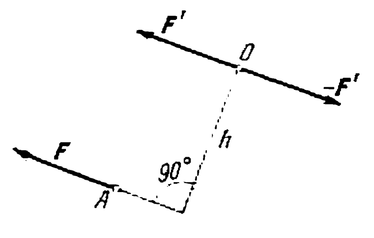


Fig. 3.1

$$\boldsymbol{F} \backsim \boldsymbol{F}' + \{\boldsymbol{F}, -\boldsymbol{F}'\}.$$

Le lemme est démontré.

Une telle substitution s'appelle *réduction de la force donnée à un point O* (centre de réduction). Le couple $\boldsymbol{F}$, $-\boldsymbol{F}'$ s'appelle *couple associé*. Son moment est égal à $m = \pm Fh$, c'est-à-dire au moment de la force $\boldsymbol{F}$ par rapport au centre de réduction O (voir (2.12)):

$$m = \text{mom}_O \boldsymbol{F}. \tag{3.1}$$

1.2. Méthode de Poinsot *). Résultante générale et moment résultant. Supposons, afin de simplifier les choses, que trois forces

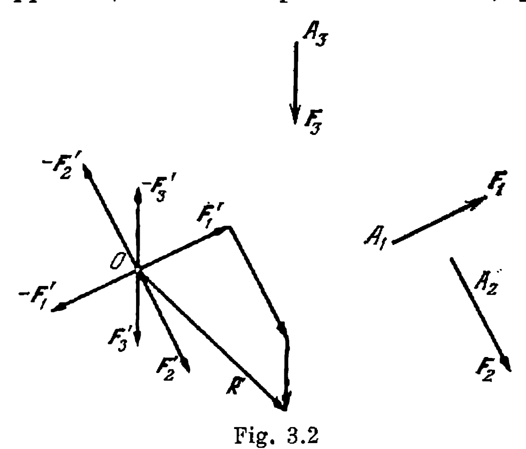


Fig. 3.2

$\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ soient appliquées en trois points A_1, A_2, A_3 (fig. 3.2). Choisissons un point quelconque O contenu dans le plan des forces et appliquons en ce point six forces équilibrées deux à deux: $\boldsymbol{F}_1'$ et $-\boldsymbol{F}_1'$, $\boldsymbol{F}_2'$ et $-\boldsymbol{F}_2'$, $\boldsymbol{F}_3'$ et $-\boldsymbol{F}_3'$. Le système de forces obtenu, qui est équivalent au système donné, peut être remplacé par un ensemble de trois forces $\boldsymbol{F}_1'$, $\boldsymbol{F}_2'$, $\boldsymbol{F}_3'$ appliquées en O et trois couples associés

*) L o u i s P o i n s o t, géomètre et mécanicien français (1777-1859).

$\boldsymbol{F}_1, -\boldsymbol{F}'_1$; $\boldsymbol{F}_2, -\boldsymbol{F}'_2$; $\boldsymbol{F}_3, -\boldsymbol{F}'_3$, ce qu'on exprime en écrivant

$$\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3\} \backsim \{\boldsymbol{F}'_1, \boldsymbol{F}'_2, \boldsymbol{F}'_3\} + \\ + \{\boldsymbol{F}_1, -\boldsymbol{F}'_1\} + \{\boldsymbol{F}_2, -\boldsymbol{F}'_2\} + \{\boldsymbol{F}_3, -\boldsymbol{F}'_3\}.$$

Faisant la composition de $\boldsymbol{F}'_1, \boldsymbol{F}'_2, \boldsymbol{F}'_3$ par la règle du polygone, nous obtenons une résultante $\boldsymbol{R}'$ appliquée en O:

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{F}'_1 + \boldsymbol{F}'_2 + \boldsymbol{F}'_3 = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = \sum \boldsymbol{F}_\nu. \qquad (3.2)$$

Le vecteur $\boldsymbol{R}'$ égal à la somme des vecteurs des forces données et appliqué au point O s'appelle *résultante générale* du système de forces donné. Faisant la composition des couples associés par la règle décrite au chapitre II, n° 2.4, on obtient un couple résultant $\boldsymbol{P}, -\boldsymbol{P}'$ dont le moment est égal à

$$m_O = m_1 + m_2 + m_3 = \\ = \text{mom}_O \boldsymbol{F}_1 + \text{mom}_O \boldsymbol{F}_2 + \text{mom}_O \boldsymbol{F}_3 = \sum \text{mom}_O \boldsymbol{F}_\nu. \quad (3.3)$$

Le scalaire m_O porte le nom de *moment résultant* du système de forces plan donné *par rapport au centre de réduction O*. Ici m_1, m_2, m_3 sont les moments des couples associés, qui sont égaux en vertu de (3.1) aux moments des forces données respectives par rapport au point O.

Toutes les opérations effectuées s'écriront sous la forme

$$\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3\} \backsim \boldsymbol{R}' + \{\boldsymbol{P}, -\boldsymbol{P}'\}.$$

On ne voit pas le couple résultant $\boldsymbol{P}, -\boldsymbol{P}'$ sur la figure 3.2. En effet, le couple est un effort de rotation dont on peut dire qu'il est « étalé » sur le plan et ne se définit pas complètement par son moment (voir ch. II, n° 2.3). Le couple résultant sera cependant représenté un peu plus tard, lors de la démonstration du théorème de V a r i g n o n.

Tout ce qui vient d'être dit reste valable quel que soit le nombre de forces. Dans le cas général, un système de forces plan est donc équivalent à une résultante générale $\boldsymbol{R}'$ (voir (3.2)) appliquée en un point arbitraire O, et à un couple résultant caractérisé par le moment résultant m_O (voir (3.3)). La méthode décrite de composition des forces sur le plan s'appelle *méthode de Poinsot de réduction du système de forces plan à un centre donné.*

De la description de la méthode, il découle que la résultante générale est indépendante du centre de réduction choisi ; par contre, le moment résultant dépend en général du point de réduction, car toute variation du centre de réduction fait varier les bras de levier des couples associés et les signes de leurs moments. Plus tard (ch. V, n° 2.2) nous citerons une formule qui établit la relation entre le moment résultant par rapport à un nouveau centre de réduction et le moment résultant par rapport au centre de réduction ancien. Dans

ce chapitre, nous nous dispenserons d'établir cette formule, car son absence ne nuit pas à la rigueur de l'exposé.

Passons en revue les cas particuliers qui se présentent lors de la réduction du système de forces plan.

1.3. Cas de réduction à un couple unique. Plaçons-nous d'abord dans le cas où la résultante générale $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{0}$, c'est-à-dire dans le cas où le polygone des forces connues est fermé, et le moment résultant $m_O \neq 0$. Dans ce cas le système de forces donné est équivalent à un couple résultant unique $\boldsymbol{P}$, $-\boldsymbol{P}'$ dont le moment m_O est défini par la formule (3.3).

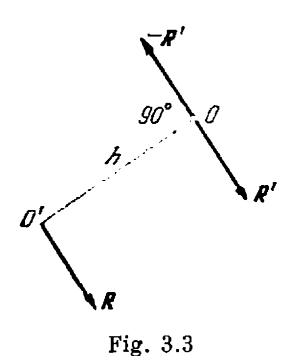


Fig. 3.3

Proposons-nous de choisir un autre centre de réduction O_1: la résultante générale reste nulle comme précédemment, et le moment m_{O_1} du couple résultant $\boldsymbol{P}_1$, $-\boldsymbol{P}_1'$ reste comme précédemment égal à m_O. Supposons en effet que $m_{O_1} \neq m_O$: cela signifie que, dans le cas particulier considéré, deux couples $\boldsymbol{P}$, $-\boldsymbol{P}'$ et $\boldsymbol{P}_1$, $-\boldsymbol{P}_1'$ ne sont pas équivalents entre eux tout en restant équivalents à un seul et même système de forces donné, ce qui est impossible.

1.4. Théorème de Varignon *). Plaçons-nous dans le deuxième cas particulier de réduction du système de forces plan, où la résultante générale $\boldsymbol{R}' \neq \boldsymbol{0}$. Le centre de réduction O restant le même, deux éventualités sont à considérer ici:

a) *Le moment résultant est égal à zéro*, $m_O = 0$. Cela revient à dire que le système de forces donné est équivalent à une résultante unique $\boldsymbol{R}'$ appliquée en O. Il ne s'agit pas de la résultante générale, ce que nous exprimerons en supprimant l'apostrophe et en écrivant $\boldsymbol{R}$ au lieu de $\boldsymbol{R}'$:

$$\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n\} \backsim \boldsymbol{R}.$$

Si donc la résultante générale est non nulle et le moment résultant des forces données par rapport au point O est égal à zéro, le système se réduit à une résultante unique

$$\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F}_\nu$$

dont la direction passe par le point O.

b) *Le moment résultant est non nul*, $m_O \neq 0$. Montrons que dans ce cas, de même que dans le cas précédent, le système de forces se réduit à une résultante unique, dont la direction ne passe pas, cette fois-ci, par le point O. Construisons le couple résultant de telle façon que l'une de ses forces composantes $(-\boldsymbol{R}')$ soit appliquée en O et orientée à l'opposé de la résultante générale $\boldsymbol{R}'$ (fig. 3.3). Le bras

*) Pierre Varignon, mécanicien français (1654-1722).

de levier h du couple résultant se définit à partir de l'égalité

$$m_O = \pm R'h, \tag{3.4}$$

exactement

$$h = \frac{|m_O|}{R'}.$$

La seconde force $\boldsymbol{R}$ du couple résultant sera appliquée alors en un point O' de la perpendiculaire élevée en O à la résultante générale $\boldsymbol{R}'$, du côté où le sens de rotation de $\boldsymbol{R}$ est conforme au signe du moment résultant m_O, et tel que $OO' = h$. Par exemple, dans le cas de la figure 3.3 on suppose que $m_O > 0$. Supprimons les forces $\boldsymbol{R}'$ et $-\boldsymbol{R}'$ appliquées en O: le système de forces donné est donc équivalent à une résultante unique

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}' = \sum \boldsymbol{F}_\nu$$

dont le point d'application est O'.

Théorème de Varignon (pour le système de forces plan). *Si le système de forces plan admet une résultante unique, son moment par rapport à un point quelconque est égal à la somme algébrique des moments par rapport à ce point de toutes les forces du système*:

$$\text{mom}_O\, \boldsymbol{R} = \sum \text{mom}_O\, \boldsymbol{F}_\nu. \tag{3.5}$$

Démonstration. On voit sur la figure 3.3 que le moment de la résultante $\boldsymbol{R}$ par rapport au point O est égal à $\pm Rh$, d'où l'on déduit, en vertu de (3.4), que

$$m_O = \text{mom}_O\, R.$$

D'autre part, le moment résultant m_O est égal, d'après la formule (3.3), à la somme algébrique des moments de toutes les forces données par rapport au même point O:

$$m_O = \sum \text{mom}_O\, \boldsymbol{F}_\nu.$$

La confrontation de ces deux dernières égalités nous ramène à la formule (3.5). Le théorème est démontré.

Il est supposé, dans le théorème de Varignon, que le système de forces plan donné admet une résultante unique; or, nous avons vu dans les nos 1.3 et 1.4 que cela a lieu si et seulement si la résultante générale du système de forces est non nulle.

Il reste à considérer le troisième cas particulier, le dernier, celui où la résultante générale et le moment résultant par rapport à O s'annulent tous les deux. Le paragraphe suivant est réservé tout entier à ce cas.

§ 2. Conditions d'équilibre du système de forces plan

2.1. Trois types de systèmes d'équations d'équilibre. Nous avons montré dans le paragraphe précédent que le système de forces plan se réduit dans le cas général à une résultante générale $\boldsymbol{R}'$ et à un couple résultant de moment m_O. Si la résultante générale $\boldsymbol{R}'$ et le moment résultant m_O s'annulent tous les deux, le système est équivalent à zéro, ou équilibré. Si une grandeur au moins, $\boldsymbol{R}'$ ou m_O, est non nulle, le système de forces plan se réduit soit à un couple résultant unique, soit à une résultante unique, ainsi qu'on l'a montré dans les n[os] 1.3 et 1.4. Les conditions nécessaires et suffisantes d'équilibre d'un système de forces plan *) sont donc

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{0}, \qquad m_O = 0. \tag{3.6}$$

Soulignons que s'il y a équilibre, le moment résultant est nul par rapport à n'i m p o r t e q u e l point du plan. Supposons en effet qu'il existe un point O_1 par rapport auquel le moment résultant est non nul, $m_{O_1} \neq 0$; avec $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{0}$, on se trouve alors en présence d'un système équilibré équivalent à un couple résultant de moment m_{O_1}, ce qui est impossible.

Projetons la résultante générale $\boldsymbol{R}'$ sur les axes de coordonnées Ox et Oy (non perpendiculaires en général); les relations (3.2) et (3.3) nous permettent d'écrire les conditions d'équilibre du système de forces plan sous forme analytique:

$$\begin{gathered} R'_x \equiv \sum X_\nu = 0, \quad R'_y \equiv \sum Y_\nu = 0, \\ m_O \equiv \sum \text{mom}_O\, \boldsymbol{F}_\nu = 0. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Nous avons démontré ce qui suit:

I. *Pour que le système de forces plan soit en équilibre, il faut et il suffit que*:

a) *la somme des projections de toutes les forces* du système sur chacun de *deux* axes de coordonnées arbitraires *soit égale à zéro*;

b) *la somme des moments de toutes les forces* par rapport à un point quelconque du plan *soit égale à zéro.*

Nous venons d'exprimer les conditions d'équilibre sous forme de trois équations (3.7) dont deux se rapportent aux projections et une aux moments. Maintenant nous allons déduire deux autres énoncés des conditions d'équilibre du système de forces plan.

Supposons que s'annulent les sommes des moments de toutes les forces par rapport à chacun des deux points arbitraires A, B et la somme des projections sur un axe Ax non perpendiculaire à AB:

$$\sum \text{mom}_A\, \boldsymbol{F}_\nu = 0, \quad \sum \text{mom}_B\, \boldsymbol{F}_\nu = 0, \quad \sum X_\nu = 0. \tag{3.8}$$

---

*) Il serait plus juste de dire « conditions d'équilibre d'un solide parfait sollicité par un système de forces plan ».

Montrons que le système est en équilibre. Supposons que le système soit réduit au point A. Conformément à la première condition, le moment résultant par rapport à A est égal à zéro:

$$m_A = \sum \text{mom}_A \boldsymbol{F}_\nu = 0,$$

si bien que le système de forces donné est équivalent à une résultante unique $\boldsymbol{R}$ appliquée en A (fig. 3.4). Montrons que $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$. D'après le théorème de Varignon (3.5) et la deuxième condition de (3.8), on a

$$\text{mom}_B \boldsymbol{R} = \sum \text{mom}_B \boldsymbol{F}_\nu = 0.$$

On a donc ou bien $R = 0$, ou bien la direction de $\boldsymbol{R}$ passe par le point B. Supposons que la seconde conjecture soit vraie. Traçons

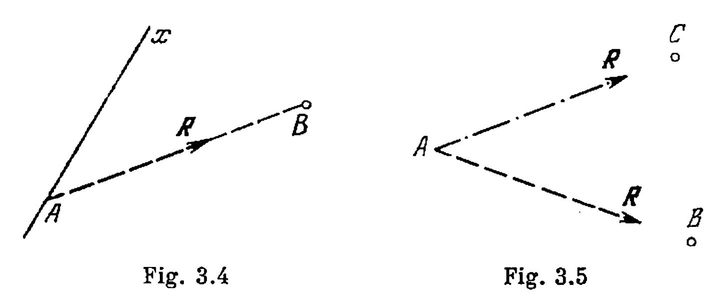


Fig. 3.4 Fig. 3.5

la résultante $\boldsymbol{R}$ (en trait pointillé sur la figure 3.4). C'est la troisième condition de (3.8) qui tombe alors en défaut, car on a

$$R_x \equiv \sum X_\nu \neq 0.$$

Si donc toutes les conditions (3.8) sont vérifiées, on a $R = 0$, ce qui revient à dire que le système de forces considéré est en équilibre. Les conditions (3.6) étant nécessaires, il en est de même des conditions (3.8). Nous venons donc de démontrer ce qui suit:

II. *Pour que le système de forces plan soit en équilibre, il faut et il suffit que*:

a) *la somme des moments de toutes les forces* par rapport à chacun des *deux* points arbitraires du plan *soit égale à zéro*;

b) *la somme des projections de toutes les forces sur un axe* (non perpendiculaire à la droite joignant les points dont il s'agit en (a)) *soit égale à zéro.*

Cette fois-ci les conditions d'équilibre se traduisent par deux équations pour les moments et une équation pour les projections (voir (3.8)).

Supposons enfin que les sommes des moments de toutes les forces par rapport à trois points non alignés A, B, C soient nulles:

$$\sum \text{mom}_A \boldsymbol{F}_\nu = 0, \quad \sum \text{mom}_B \boldsymbol{F}_\nu = 0, \quad \sum \text{mom}_C \boldsymbol{F}_\nu = 0. \tag{3.9}$$

Montrons que le système de forces est équilibré. Admettons que le système soit réduit à A. La première condition de (3.9) nous donne

$$m_A = 0,$$

et la deuxième,

$$\text{mom}_B \boldsymbol{R} = \sum \text{mom}_B \boldsymbol{F}_\nu = 0.$$

On a donc soit $R = 0$, soit $R \neq 0$, et la direction de $\boldsymbol{R}$ passe par B. Supposons que la seconde conjecture soit vraie et traçons la résultante $\boldsymbol{R}$ (en trait pointillé sur la figure 3.5). Conformément au théorème de Varignon (3.5) et à la troisième condition de (3.9)

$$\text{mom}_C \boldsymbol{R} = \sum \text{mom}_C \boldsymbol{F}_\nu = 0$$

et, puisque $\boldsymbol{R} \neq 0$, la direction de $\boldsymbol{R}$ doit passer également par le point C (en trait mixte sur la figure 3.5). Or, cela est impossible, car A, B et C ne sont pas alignés. Il y a contradiction; cela prouve qu'on a en réalité $R = 0$, c'est-à-dire que le système de forces est en équilibre. Puisque les conditions (3.6) sont nécessaires, on conçoit que les conditions d'équilibre (3.9) sont non seulement suffisantes mais aussi nécessaires. Nous avons démontré le théorème des trois moments:

III. *Pour que le système de forces plan soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des moments de toutes les forces par rapport à chacun de trois points non alignés du plan soit égale à zéro.*

Dans ce cas l'équilibre se définit par un système de trois équations (3.9) imposées aux moments.

2.2. Cas particuliers du système de forces plan. Considérons l'équilibre du solide soumis à l'action d'un système de forces plan. Chaque système de forces doit vérifier un certain nombre d'équations pour se trouver en équilibre. Dans le cas général d'un système de forces plan ces équations sont au nombre de trois et peuvent se présenter sous trois formes possibles (voir n° 2.1). Examinons à présent deux cas particuliers.

a) *Système plan de forces concourantes.* Les directions des forces coplanaires viennent se couper toutes en un point unique O. Le moment de chacune des forces par rapport à O est égal à zéro. La dernière des équations (3.7) devient identité, tandis que les deux premières équations

$$\sum X_\nu = 0, \qquad \sum Y_\nu = 0 \tag{3.10}$$

définissent l'équilibre du système plan de forces concourantes. On peut les déduire aussi du système d'équations (1.28), puisque les projections des forces coplanaires sur l'axe Oz perpendiculaire à leur plan sont égales à zéro.

b) *Système plan de forces parallèles.* Les directions des forces coplanaires sont toutes parallèles à l'axe Ox (fig. 3.6). La projection de chaque force sur l'axe Oy perpendiculaire à Ox est égale à zéro. La deuxième des équations du système (3.7) devient identité, tandis que la première et la troisième,

$$\sum X_\nu = 0, \quad \sum \mathrm{mom}_O \boldsymbol{F}_\nu = 0, \qquad (3.11)$$

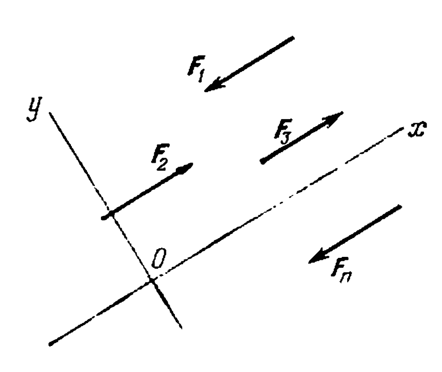


Fig. 3.6

définissent l'équilibre du système plan de forces parallèles. Remarquons que le premier membre de la première équation (3.11) est la somme algébrique des forces: cela veut dire que les modules des forces parallèles à Ox interviennent dans cette somme avec le signe positif si les forces sont de même sens que Ox, et avec le signe négatif si elles sont de sens contraires.

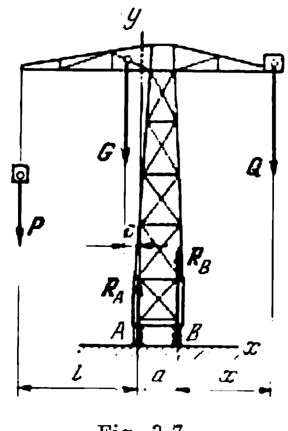


Fig. 3.7

E x e m p l e 3.1. Le poids de la grue roulante sans contrepoids est égal à G. La ligne d'action de G passe à une distance c du rail gauche A. L'écartement des rails $AB = a$. La force de levage du chariot de grue est égale à P, le porte-à-faux de la flèche est égal à l (fig. 3.7). Quels sont le plus petit poids Q du contrepoids et la plus grande distance x entre le contrepoids et la verticale du rail droit B garantissant la stabilité de l'engin en toute position du chariot, tant sous charge qu'à vide ?

S o l u t i o n. Considérons l'équilibre de la grue. Supprimons les liaisons, c'est-à-dire les rails, en leur substituant les réactions $\boldsymbol{R}_A$ et $\boldsymbol{R}_B$. L'engin est sollicité par un système de forces parallèles de sens opposés: les forces de poids $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{Q}$ sont orientées verticalement vers le bas, et les réactions des rails $\boldsymbol{R}_A$ et $\boldsymbol{R}_B$ sont orientées verticalement vers le haut.

P r e m i e r c a s. Le chariot porte un poids maximal en bout de la flèche, $p = P$. Il y a risque de basculement de la grue du côté gauche (autour du point A); nous mettrons donc la deuxième équation (3.11) sous la forme

$$\sum \mathrm{mom}_A F = Pl + Gc - Q(x + a) + R_B \cdot a = 0.$$

D'où

$$Pl + Gc - Q(x + a) = -R_B a.$$

Remarquons que $R_B \geqslant 0$, la réaction R_B ne s'annulant qu'au moment initial de basculement du côté gauche. Il vient donc

$$Pl + Gc - Q(x + a) \leqslant 0, \quad \text{ou} \quad Pl + Gc - Qa \leqslant Qx. \tag{1}$$

Deuxième cas. Le chariot ne porte aucun poids, $p = 0$. Il y a risque de basculement de la grue du côté droit (autour du point B); nous écrirons donc la deuxième équation (3.11) sous la forme

$$\sum \text{mom}_B F = G(c + a) - Qx - R_A a = 0,$$

d'où

$$G(c + a) - Qx = R_A a.$$

Puisque $R_A \geqslant 0$, l'égalité n'ayant lieu qu'au moment initial de basculement du côté droit, on a

$$G(c + a) - Qx \geqslant 0, \quad \text{ou} \quad Qx \leqslant G(c + a). \tag{2}$$

Les inégalités (1) et (2) peuvent s'écrire sous la forme

$$Pl + Gc - Qa \leqslant Qx \leqslant G(c + a);$$

leur compatibilité nécessite l'inégalité

$$Pl + Gc - Qa \leqslant G(c + a),$$

d'où

$$Q \geqslant \frac{Pl - Ga}{a} = Q_{\min}.$$

C'est le second membre de la dernière inégalité qui exprime le poids minimal du contrepoids. Si l'on a en particulier

$$Pl - Ga \leqslant 0,$$

le contrepoids devient inutile. Nous poserons que $Pl > Ga$. De l'inégalité (2) il ressort que

$$x \leqslant \frac{G(c+a)}{Q}.$$

Portons $Q_{\min}$ dans le dénominateur: nous obtenons la plus grande distance admissible entre la ligne d'action du contrepoids et le rail droit

$$x_{\max} = \frac{G(c+a)}{Q_{\min}} = \frac{G(c+a)}{Pl - Ga}\, a.$$

Nous n'avons pas appliqué la première équation (3.11), car nous n'avons pas eu à chercher des réactions inconnues. Connaissant p, Q et x, nous pourrions chercher les modules des réactions R_A et R_B à l'aide de deux équations (3.11); à partir des réactions, nous pourrions déterminer les forces de pression de la grue sur les rails, qui sont égales en module aux réactions.

c) *Condition d'équilibre du levier*. On entend par *levier* un solide qui peut tourner autour d'un axe fixe O sous l'action des forces $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ agissant dans un plan Oxy perpendiculaire à l'axe de rotation (fig. 3.8). Les leviers du premier et du second genre en sont les exemples les plus élémentaires.

En étudiant l'équilibre du levier, nous ajouterons aux forces connues les composantes des réactions de l'articulation O, à savoir X_O et Y_O. Elles ne figurent cependant pas dans la troisième équation (3.7), aussi l'égalité

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{mom}_O \boldsymbol{F}_\nu = 0 \tag{3.12}$$

est-elle la condition d'équilibre du levier.

Mettons les projections X_O et Y_O des réactions de l'articulation O sous forme explicite dans les deux premières équations (3.7):

$$X_O + \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu = 0,$$

$$Y_O + \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu = 0;$$

il vient

$$X_O = -\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu, \quad Y_O = -\sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu.$$

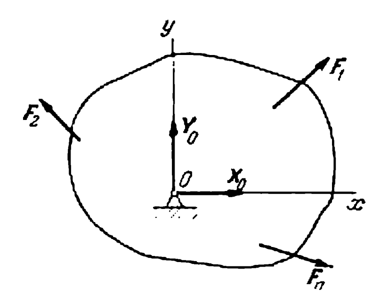


Fig. 3.8

2.3. Problèmes isostatiques et hyperstatiques. Passant aux exemples, signalons que les problèmes d'équilibre d'un système de forces plan doivent être abordés par analogie aux problèmes relatifs à un système de forces concourantes. Tout d'abord on s'établit sur un solide dont on envisage l'équilibre. Après avoir indiqué sur le dessin les forces données et les forces cherchées (les réactions de liaison y comprises) et choisi un système de coordonnées, on écrit les équations d'équilibre. L'équation des moments doit se rapporter de préférence au point de rencontre de la plus grande partie des forces inconnues. On peut utiliser n'importe laquelle des trois variantes de systèmes d'équations d'équilibre (n° 2.1), pourvu que les équations soient aussi simples que possible.

Si le nombre des forces inconnues (auxquelles se rapportent aussi des composantes isolées quand la direction de la force est inconnue) est égal au nombre des équations d'équilibre indépendantes qu'on peut établir pour la structure considérée, on dit que le problème est *statiquement déterminé*, ou *isostatique*. S'il y a plus de forces inconnues que d'équations d'équilibre indépendantes caractérisant la structure considérée (un solide ou un système de solides, voir n° 2.4 ci-après), on dit que le problème est *statiquement indéterminé*, ou *hyperstatique*.

Etudions à titre d'exemple l'équilibre d'une poutre horizontale sollicitée par des forces connues $\boldsymbol{P}_1$ et $\boldsymbol{P}_2$. La poutre s'appuie à gauche

sur une articulation fixe A, et à droite sur un rouleau B (fig. 3.9). On demande de savoir les réactions aux appuis.

Il y a trois composantes inconnues des réactions (voir ch. I, nº 2.9) X_A, Y_A, N_B pour trois équations d'équilibre: le problème est isostatique.

Considérons à présent l'équilibre d'une poutre horizontale AC fabriquée d'une seule pièce (non composée) qui repose sur un rouleau intermédiaire auxiliaire B (fig. 3.10). Il y a maintenant déjà quatre

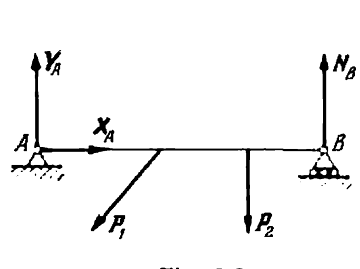


Fig. 3.9

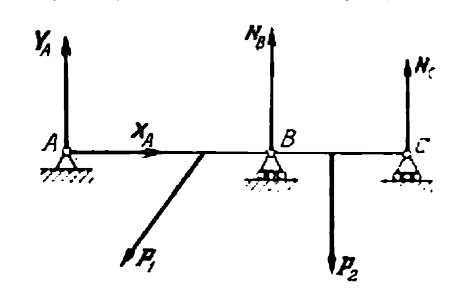


Fig. 3.10

composantes inconnues des réactions X_A, Y_A, N_C, N_B pour seulement trois équations d'équilibre indépendantes. Le problème de recherche des réactions aux appuis d'une poutre monobloc à trois appuis est hyperstatique: il peut être résolu par les méthodes de la résistance des matériaux en faisant intervenir la flexion de la poutre.

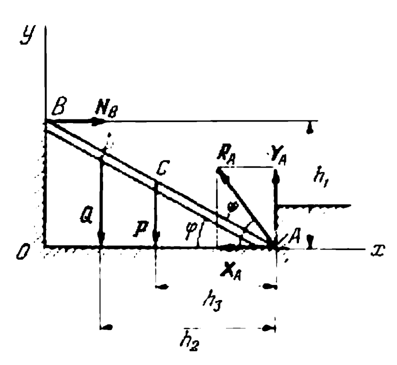


Fig. 3.11

Avant même d'aborder le problème, nous pouvons, en comptant les forces inconnues et en confrontant leur nombre avec celui des équations d'équilibre, dire d'emblée s'il s'agit d'un problème isostatique ou hyperstatique.

Exemple 3.2. Une échelle AB est adossée à un mur poli sous un angle φ par rapport à l'horizontale; le poids de l'échelle est P. Un homme de poids Q se tient dans un point D de l'échelle, à une distance de 1/3 de la longueur de l'échelle à partir de l'extrémité supérieure de celle-ci. Déterminer les efforts exercés par l'échelle sur le mur et sur l'appui (fig. 3.11).

Solution. Considérons l'équilibre de l'échelle AB. Remplaçons les liaisons par les réactions N_B perpendiculaire au mur (car celui-ci est poli) et R_A (réaction de l'appui). On ne connaît ni le module ni la direction de R_A, aussi sera-t-elle remplacée par deux composantes X_A, Y_A dirigées suivant les axes du système de coordonnées choisi Oxy. Pour mettre l'équilibre en équations, nous choisissons la variante (3.7). Calculons d'abord les bras de levier h_1, h_2 et h_3

des forces N_B, Q et P par rapport au point A (fig. 3.11):

$$h_1 = l\sin\varphi, \quad h_2 = \frac{2}{3}l\cos\varphi, \quad h_3 = \frac{1}{2}l\cos\varphi,$$

où $l = AB$ est la longueur de l'échelle. Ainsi donc,

$$\sum X = N_B + X_A = 0, \qquad \sum Y = -Q - P + Y_A = 0,$$

$$\sum \text{mom}_A F = Q\cdot\frac{2}{3}l\cos\varphi + P\cdot\frac{1}{2}l\cos\varphi - N_B l\sin\varphi = 0.$$

Divisons la dernière équation par $l\sin\varphi$ et explicitons N_B:

$$N_B = \left(\frac{2}{3}Q + \frac{1}{2}P\right)\operatorname{cotg}\varphi.$$

Les deux premières équations nous donnent

$$X_A = -N_B = -\left(\frac{2}{3}Q + \frac{1}{2}P\right)\operatorname{cotg}\varphi, \quad Y_A = Q + P$$

Le signe négatif de X_A indique que la projection de la force R_A sur l'axe Ox est négative, ce qui veut dire que la composante X_A est orientée vers la gauche (voir fig. 3.11). Le module et la direction de la réaction R_A se déduisent des formules

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}Q + \frac{1}{2}P\right)^2\operatorname{cotg}^2\varphi + (Q+P)^2},$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{Y_A}{|X_A|} = \frac{6(Q+P)}{4Q+3P}\operatorname{tg}\varphi,$$

où ψ est l'angle que fait la réaction R_A avec la direction négative de l'axe Ox.

Exemple 3.3. Une barre homogène AD de longueur $2l$ et de poids P bute en A dans un angle rentrant et repose en B sur un angle saillant. Les distances sont indiquées sur la figure 3.12; on a $l < \sqrt{a^2 + b^2} < 2l$. Déterminer les réactions.

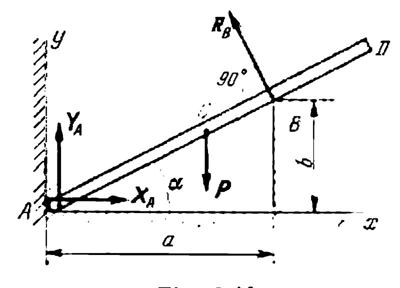


Fig. 3.12

Solution. Etudions l'équilibre de la barre AD. Supprimons les liaisons en les remplaçant par une réaction R_B perpendiculaire à la barre et une réaction R_A qui représente la somme géométrique de deux composantes normales X_A, Y_A. Traçons les axes de coordonnées comme il est montré sur la figure 3.12 et écrivons les équations d'équilibre:

$$\sum X = X_A + R_B\cos(90° + \alpha) = 0,$$

$$\sum Y = Y_A - P + R_B\cos\alpha = 0,$$

$$\sum \text{mom}_A F = -P\cdot AC\cos\alpha + R_B\, AB = 0.$$

Le module de R_B se déduit immédiatement de l'équation des moments:

$$R_B = \frac{AC}{AB}P\cos\alpha = \frac{la}{a^2+b^2}P,$$

car

$$AC = l, \quad AB = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

La première équation d'équilibre nous donne

$$X_A = R_B \sin\alpha = \frac{lab}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}} P.$$

De la deuxième équation d'équilibre on tire

$$Y_A = P - R_B \cos\alpha = \left[1 - \frac{la^2}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}\right] P$$

Le module et la direction de la réaction R_A se calculent par les formules

$$R_A = \sqrt{X_A^2+Y_A^2}, \quad \operatorname{tg}(\widehat{R_A, Ax}) = \frac{Y_A}{X_A}.$$

L'exemple 3.3 peut aussi être résolu graphiquement, en faisant intervenir le théorème des trois forces (ch. I, n° 2.6) et en construisant ensuite le triangle des forces P, R_A et R_B.

E x e m p l e 3.4. Une extrémité de la barre homogène AB de poids $Q = 200$ N prend appui sur le sol horizontal poli, et l'autre sur un plan poli

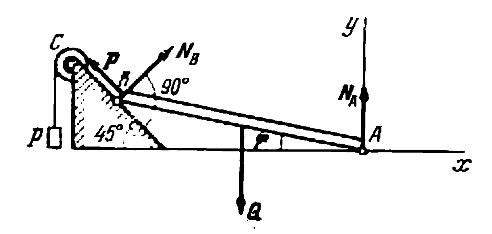


Fig. 3.13

incliné sous 45° sur l'horizontale. L'extrémité B de la barre est soutenue par une corde passée autour d'une poulie C et munie d'une charge de poids P. Le brin BC de la corde est parallèle au plan incliné. Sans tenir compte du frottement dans la poulie, déterminer le poids de la charge P et les efforts exercés sur le sol et sur le plan incliné (fig. 3.13).

S o l u t i o n. Considérons l'équilibre de la barre AB. On connaît la force Q appliquée au milieu de la barre et dirigée verticalement vers le bas. On ignore les réactions N_A, N_B et le poids de la charge P. Le sol et le plan incliné étant polis, les réactions N_A et N_B sont normales. La force P est dirigée suivant le brin BC de la corde. Les directions des axes de coordonnées choisis sont montrées sur la figure.

Ecrivons les équations d'équilibre sous la forme (3.7). La somme des projections de toutes les forces sur l'axe Ax est

$$\sum X = N_B \cos 45° + P \cos 135° = 0. \qquad \text{(a)}$$

La somme des projections de toutes les forces sur l'axe Ay est

$$\sum Y = -Q + N_A + N_B \cos 45° + P \cos 45° = 0. \qquad \text{(b)}$$

La somme des moments de toutes les forces par rapport au point B est

$$\sum \text{mom}_B \boldsymbol{F} = -Q\frac{AB}{2}\cos\varphi + N_A AB\cos\varphi = 0.$$

On tire de (c) et de (a) respectivement: $N_A = Q/2 = 100$ N, $N_B = P$. Portant ces valeurs dans (b), on obtient

$$2N_B\cos 45° = Q - N_A,$$

d'où

$$N_B = P = \frac{100}{2\cos 45°} = 70{,}7 \text{ N}.$$

Exemple 3.5. L'extrémité A de la barre homogène AB de poids P prend appui sur un plan poli horizontal, et son extrémité B, sur un plan poli vertical. A l'extrémité A de la barre est attaché un fil passé autour d'une poulie

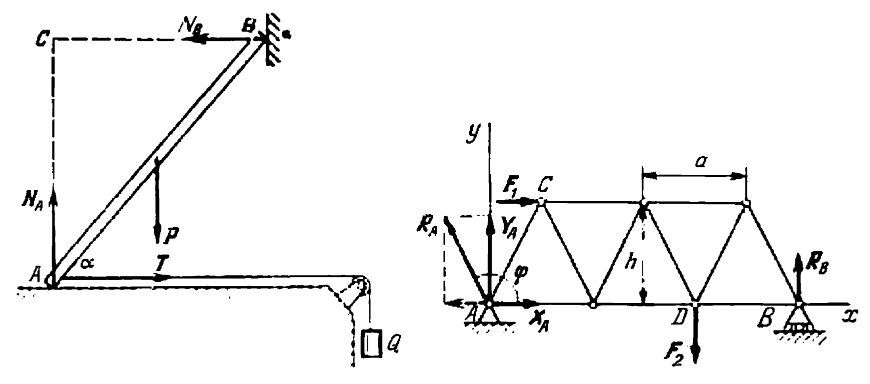


Fig. 3.14 Fig. 3.15

et muni d'une charge de poids Q. Sans tenir compte du frottement dans la poulie, déterminer l'angle α que fait la barre en équilibre avec le plan horizontal (fig. 3.14).

Solution. Considérons l'équilibre de la barre AB. Nous connaissons la force $\boldsymbol{P}$ appliquée au milieu de la barre AB et la force de tension $\boldsymbol{T}$ du fil, égale en module à Q ($T = Q$). Les deux plans d'appui étant polis, les réactions correspondantes N_A, N_B sont normales.

La troisième équation de (3.7) nous donnera la somme des moments par rapport au point de concours des directions des réactions N_A et N_B:

$$\sum \text{mom}_C \boldsymbol{F} = -P\frac{l}{2}\cos\alpha + Ql\sin\alpha = 0,$$

où l est la longueur de la barre. On en déduit l'équation pour l'angle α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P}{2Q}.$$

Les deux premières équations d'équilibre du système (3.7) nous fourniront N_A et N_B.

Exemple 3.6. Une ferme repose sur un appui fixe A et un appui mobile B. Toutes les barres horizontales de la ferme ont même longueur $a = 8$ m. La hauteur h de la ferme est 6 m. Aux nœuds C et D de la ferme sont appliquées une force horizontale $F_1 = 2$ kN et une force verticale $F_2 = 10$ kN. Déterminer les réactions aux appuis (fig. 3.15).

S o l u t i o n. La réaction R_B de l'appui mobile est dirigée perpendiculairement au plan d'appui et orientée vers le haut. Au lieu de la réaction R_A de l'appui fixe, prenons ses deux composantes X_A, Y_A portées par les axes de coordonnées montrés sur la figure.

Mettons en équations (3.8) les forces appliquées à la ferme en équilibre. La somme des projections de toutes les forces sur l'axe Ax est

$$\sum X = F_1 + X_A = 0. \qquad (a)$$

La somme des moments de toutes les forces par rapport au point A est

$$\sum \text{mom}_A F = -F_1h - F_2 \cdot 2a + R_B \cdot 3a = 0. \qquad (b)$$

La somme des moments de toutes les forces par rapport au point B est

$$\sum \text{mom}_B F = -F_1h + F_2a - Y_A \cdot 3a = 0. \qquad (c)$$

L'équation (a) nous donne $X_A = -F_1 = -2$ kN. Le signe négatif indique qu'en réalité la composante X_A est orientée dans le sens inverse de la figure. Sa direction vraie est tracée en trait pointillé. L'équation (b) nous donne

$$R_B = \frac{F_1h + 2F_2a}{3a} = 7{,}17 \text{ kN}.$$

Enfin, de l'équation (c)

$$Y_A = \frac{F_2a - F_1h}{3a} = 2{,}83 \text{ kN}.$$

La réaction d'appui totale R_A a comme module

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 3{,}47 \text{ kN}$$

et sa direction est définie par l'angle

$$\varphi = \text{arctg}\,\frac{Y_A}{X_A} = \text{arctg}\,(-1{,}42) = 125°$$

qu'elle fait avec l'axe Ax.

2.4. Equilibre d'un système de solides sous l'action de forces coplanaires. Les forces agissant sur une structure constituée par plusieurs corps solides parfaits peuvent être classées en deux groupes. Au premier groupe se rapportent les *forces extérieures*, c'est-à-dire les forces exercées sur la structure par des solides étrangers à celle-ci. S'y rapportent également les réactions de liaison, à l'exception des réactions aux points de contact des solides. Le second groupe est constitué par les *forces intérieures*, c'est-à-dire les forces d'interaction entre les solides qui forment la structure. Expliquons-le à l'aide d'un exemple.

Soit une structure constituée de deux solides: une poutre AB et une poutre CD, posées sur trois appuis A, D et E; la poutre AB repose librement sur la poutre CD (fig. 3.16). Les poids P et Q et les réactions des appuis R_A, R_D (verticales, car les actions données sont verticales), R_E sont extérieures par rapport à la structure considérée dans son ensemble. Au contraire, la pression de la poutre AB sur la poutre CD, représentée par la force R_C, au même titre

que la réaction de la poutre CD, représentée par $\boldsymbol{R}_B$, est une force intérieure. Soulignons que la force $\boldsymbol{R}_B$ est appliquée à la poutre AB et la force $\boldsymbol{R}_C$ à la poutre CD. Il convient de se référer en chaque cas à l'axiome III (principe de l'action et de la réaction, ch. I, n° 2.5) selon lequel $R_C = R_B$. S'agissant de l'équilibre du système dans son ensemble, les forces intérieures n'interviennent pas dans les

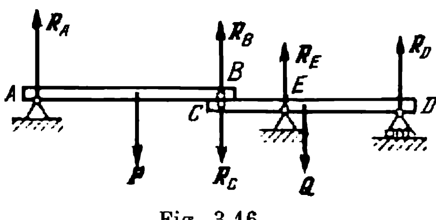


Fig. 3.16

équations d'équilibre, car elles « s'annulent deux à deux »: nous avons étudié cela en détail dans l'axiome V du n° 2.5 et dans le lemme du n° 2.7, ch. I.

Si la structure se compose de plusieurs solides, il convient de discuter son équilibre général, mais aussi l'équilibre de chacune

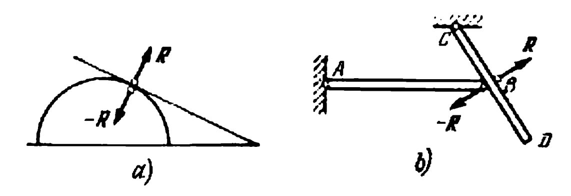


Fig. 3.17

de ses parties constitutives. Les solides peuvent être assemblés entre eux de différentes façons ; nous en verrons quelques-unes.

a) Les solides faisant partie de la structure s'appuient les uns sur les autres par des surfaces polies. Dans ce cas les forces intérieures, c'est-à-dire les forces de pression réciproques, sont dirigées suivant la normale commune à la tangente au point de contact (fig. 3.17, *a*), ou bien suivant la normale à la surface d'un solide au point de son contact avec l'autre (fig. 3.17, *b*).

b) Les solides sont liés entre eux par une barre inextensible dont les extrémités sont articulées aux solides, ou bien par un fil flexible inextensible (fig. 3.18). Les réactions de la barre sont dirigées suivant celle-ci dans le cas où le poids de la barre est à négliger ; quant à la réaction du fil flexible, elle est toujours orientée en dedans du fil.

c) Les solides sont articulés entre eux (fig. 3.19, point C). Puisque l'effort du solide A est transmis au solide B par l'intermédiaire d'une articulation, la direction de cet effort, c'est-à-dire de la réaction de

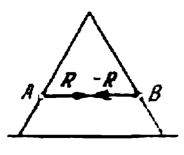


Fig. 3.18

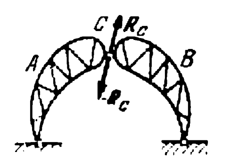
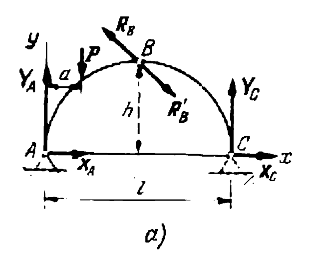


Fig. 3.19

l'articulation $\boldsymbol{R}_C$ (ou $-\boldsymbol{R}_C$, pour le cas réciproque), est inconnue à priori. Dans un tel problème, on décompose généralement la réaction de l'articulation suivant les deux axes de coordonnées.

E x e m p l e 3.7. Soit un arc ABC à trois articulations, de poids nul, sollicité par une force verticale $\boldsymbol{P}$. Toutes les dimensions sont indiquées sur la figure 3.20, *a*. Déterminer les réactions aux articulations A, B et C.



a) b)

Fig. 3.20

S o l u t i o n. La structure dont on envisage l'équilibre se compose de deux solides: un demi-arc AB et un demi-arc BC articulés en B. L'équilibre de l'ensemble est assuré par les forces suivantes:

— forces extérieures: force $\boldsymbol{P}$ et réactions $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_C$ des articulations A, C;

— forces intérieures: forces $\boldsymbol{R}_B$ et $\boldsymbol{R}'_B = -\boldsymbol{R}_B$, c'est-à-dire efforts mutuels des deux demi-arcs transmis par l'articulation B.

Désignons les projections des réactions $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_C$ sur les axes de coordonnées par X_A, Y_A et X_C, Y_C. L'équilibre de la structure tout entière — arc à trois articulations ABC assimilé à un solide parfait unique — se traduira par trois équations du type (3.7)

$$\sum X = X_A + X_C = 0, \quad \sum Y = Y_A + Y_C - P = 0,$$

$$\sum \text{mom}_A F = -Pa + Y_C \cdot 2l = 0.$$

Aucune force intérieure n'y figure. De la troisième équation on obtient

$$Y_C = \frac{Pa}{2l},$$

et de la deuxième,

$$Y_A = P - Y_C = \left(1 - \frac{a}{2l}\right) P.$$

Quant à la première, elle ne nous apprend rien d'autre que

$$X_A = -X_C.$$

Pour déterminer séparément X_A et X_C, ainsi que R_B, étudions l'équilibre d'une partie de la structure. Les schémas des forces en jeu sont représentés sur la figure 3.20, *b*. On choisit généralement la partie dans laquelle il y a le moins de forces en jeu. Dans le cas considéré, ce sera le demi-arc de droite BC. Mettons son équilibre en équations du type (3.7), supposant à priori que les projections X'_B et Y'_B soient positives (la composante Y'_B est montrée sur la figure 3.20, *b* en trait pointillé):

$$\sum X = X'_B + X_C = 0, \quad \sum Y = Y'_B + Y_C = 0,$$
$$\sum \mathrm{mom}_C\, F = -Y'_B l - X'_B h = 0.$$

D'où l'on tire

$$Y'_B = -Y_C = -\frac{Pa}{2l}, \quad X'_B = -\frac{l}{h} Y'_B = \frac{Pa}{2h}, \quad X_C = -X'_B = -\frac{Pa}{2h}$$

et donc

$$X_A = -X_C = \frac{Pa}{2h}.$$

La direction vraie de la composante Y'_B est montrée sur la figure 3.20, *b* en trait plein.

On n'a pas eu à discuter l'équilibre du demi-arc de gauche AB. Au lieu de considérer l'équilibre de la structure comme un tout, on pourrait envisager

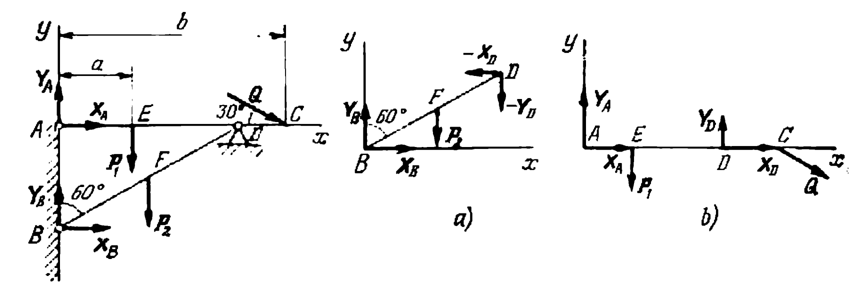


Fig. 3.21

séparément l'équilibre de ses deux parties: on obtiendrait au total six équations d'équilibre indépendantes pour six inconnues X_A, Y_A, X_C, Y_C, X'_B et Y'_B, compte tenu des égalités concernant les projections des forces intérieures: $X_B = -X'_B$, $Y_B = -Y'_B$.

E x e m p l e 3.8. Deux poutres AC et BD de longueur égale sont articulées entre elles en D et articulées à un mur vertical en A et B. La poutre AC est horizontale, la poutre BD fait un angle de 60° avec le mur. La poutre AC est sollicitée en E par une force verticale $P_1 = 20$ kN et en C par une force $Q = 50$ kN appliquée sous un angle de 30° sur l'horizontale. La poutre BD est sollicitée en F par une force verticale $P_2 = 20$ kN. Les dimensions connues sont $AE = a = 2$ m, $AC = BD = b = 6$ m. Déterminer les réactions dans les articulations A, B et D (fig. 3.21).

S o l u t i o n. L'équilibre des poutres AC et BD est assuré par l'action des forces connues P_1, P_2, Q et des forces inconnues X_A, Y_A, X_B, Y_B. On a donc quatre inconnues pour seulement trois équations d'équilibre relatives à la struc-

ture formée par les poutres AC et BD : le problème paraît de prime abord irrésoluble.

Cherchons les réactions en A et B. A cet effet, mettons en équations l'équilibre du système de poutres AC, BD considéré comme un ensemble monobloc. Projetons toutes les forces sur les axes Ax, Ay et écrivons l'équation de la somme des moments par rapport au point A. Il vient

$$\sum X = X_A + X_B + Q \cos 30° = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y = -P_1 - P_2 + Q \cos 120° + Y_A + Y_B = 0, \qquad (2)$$

$$\sum \text{mom}_A F = -P_1 a - P_2 \frac{b}{2} \cos 30° - Qb \sin 30° + X_B b \cos 60° = 0. \qquad (3)$$

Pour reconstituer l'équation qui manque, mettons en équations l'équilibre de la poutre BD en remplaçant l'action de AC sur BD par les composantes X_D, Y_D de la réaction R_D appliquée en D (fig. 3.21, *a*). Projetons toutes les forces appliquées à la poutre BD sur les axes de coordonnées Bx, By et écrivons l'équation de la somme des moments par rapport au point D. Il vient

$$\sum X = X_B - X_D = 0, \qquad (4)$$

$$\sum Y = -P_2 + Y_B - Y_D = 0, \qquad (5)$$

$$\sum \text{mom}_D F = P_2 \frac{b}{2} \sin 60° + X_B b \sin 30° - Y_B b \sin 60° = 0. \qquad (6)$$

Cela revient à se donner encore deux inconnues X_D, Y_D, soit six inconnues au total; or, aux trois équations d'équilibre existantes viennent s'ajouter trois autres équations. On obtient de cette façon un système de six équations qui permet de déterminer toutes les six composantes des réactions en A, B et D.

De l'équation (3)

$$X_B = \frac{1}{b \cos 60°} \left(P_1 a + \frac{1}{2} P_2 b \cos 30° + Qb \sin 30° \right) = 80,7 \text{ kN},$$

De l'équation (1)

$$X_A = -X_B - Q \cos 30° = -124 \text{ kN}.$$

Puis de l'équation (6)

$$Y_B = \frac{1}{2} P_2 + \frac{\sin 30°}{\sin 60°} X_B = 56,6 \text{ kN}.$$

De l'équation (2)

$$Y_A = P_1 + P_2 + Q \sin 30° - Y_B = 8,4 \text{ kN}$$

et finalement des équations (4) et (5)

$$X_D = X_B = 80,7 \text{ kN}, \qquad Y_D = Y_B - P_2 = 36,6 \text{ kN}.$$

Un système d'équations suffisant pour déterminer les réactions inconnues peut être obtenu d'une autre façon, si l'on envisage séparément l'équilibre des poutres BD et AC sans faire intervenir les conditions d'équilibre de la structure considérée dans son ensemble, c'est-à-dire sans écrire les équations (1) à (3). En effet, projetons toutes les forces appliquées à la poutre AC sur les axes de coordonnées et écrivons les équations pour la somme des moments par rapport au point A (fig. 3.21, *b*). Il vient

$$\sum X = X_A + X_D + Q \cos 30° = 0, \qquad (7)$$

$$\sum Y = -P_1 + Q \cos 120° + Y_A + Y_D = 0, \qquad (8)$$

$$\sum \text{mom}_A F = -P_1 a - Qb \sin 30° + Y_D b \sin 60° = 0. \qquad (9)$$

Les équations (4) à (9) nous donneront bien sûr les mêmes valeurs des réactions que précédemment.

Soulignons que les équations (7) à (9) peuvent être utilisées pour vérifier la solution de (1) à (6), ces équations étant considérées dans ce cas comme conditions d'équilibre de la poutre AC. Nous laissons au lecteur le soin de porter les valeurs trouvées de X_A, Y_A, X_D, Y_D dans les équations (7) à (9) et de constater que ces conditions sont identiquement vérifiées. On pourrait aussi chercher la solution du système (4) à (9) et utiliser pour le contrôle le système (1) à (3), considéré comme conditions d'équilibre de la structure tout entière.

Remarquons qu'en discutant l'équilibre de l'une quelconque des poutres, AC ou BD, la direction des composantes X_D et Y_D de la réaction n'a aucune importance. Or, en discutant l'équilibre de la seconde poutre, les composantes de la réaction au point considéré devraient être orientées dans le sens inverse, en vertu du principe de l'action et de la réaction.

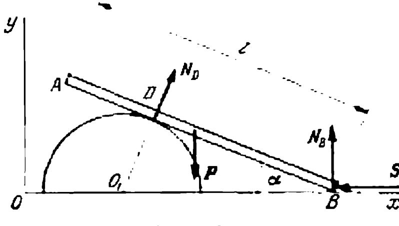


Fig. 3.22

Exercices

Exercice 3.1. Une barre homogène AB de longueur l et de poids P repose en son extrémité B sur le plan horizontal OB, et en son point D sur la surface polie d'un cylindre circulaire droit; $BD = 2l/3$ (fig. 3.22). Quelle force horizontale S doit-on appliquer en B pour maintenir la barre sous un angle donné α par rapport à l'horizontale ? Quelles sont les forces de pression exercées par la barre sur le plan et le cylindre ?

Réponse. $S = \frac{3}{8} P \sin 2\alpha$, $N_B = \left(1 - \frac{3}{4}\cos^2\alpha\right) P$, $N_D = \frac{3}{4} P \cos\alpha$. Les forces de pression sur le plan et sur le cylindre sont de module égal et de sens opposés aux réactions N_B et N_D.

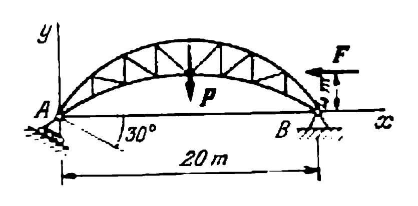


Fig. 3.23

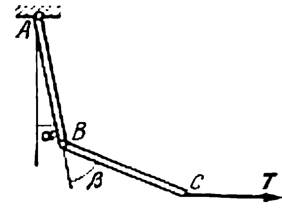


Fig. 3.24

Exercice 3.2. Un arc en treillis repose en B sur une articulation fixe et en A sur un rouleau dont le plan d'appui fait un angle de 30° avec l'horizontale. Le poids propre de l'arc est $P = 100$ kN. La résultante des forces de pression du vent F est égale en module à 20 kN, dirigée parallèlement à AB et appliquée à 4 m au-dessus de la droite AB (fig. 3.23). On demande de savoir les réactions aux appuis.

Réponse. $X_B = -11{,}2$ kN, $Y_B = 46{,}0$ kN, $R_A = 62{,}4$ kN.

Exercice 3.3. Deux barres homogènes identiques sont articulées entre elles en B. L'extrémité A de la première barre est articulée à un point fixe A. L'extrémité libre C de la seconde barre est sollicitée par une force horizontale T égale en module à $\sqrt{3}\, P/2$, où P est le poids de chaque barre. Déterminer les angles α et β en position d'équilibre et les modules des efforts N_A, N_B en A et B (fig. 3.24).

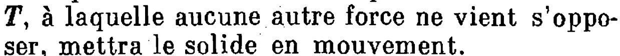
Réponse. $\alpha = \beta = 30°$, $N_B = \sqrt{7}\, P/2$, $N_A = \sqrt{19}\, P/2$.

CHAPITRE IV

SYSTÈME DE FORCES PLAN. FROTTEMENT. FERMES

§ 1. Frottement

1.1. Frottement de glissement. On appelle *frottement de glissement* la résistance qui s'oppose au glissement de deux solides rugueux en contact.

Soit un solide de poids P reposant sur une surface horizontale. Appliquons à ce solide une force horizontale $\boldsymbol{T}$. Si les surfaces des solides en contact sont polies, la réaction normale N de la surface d'appui sera équilibrée par la force $\boldsymbol{P}$, tandis que la force motrice

$\boldsymbol{T}$, à laquelle aucune autre force ne vient s'opposer, mettra le solide en mouvement.

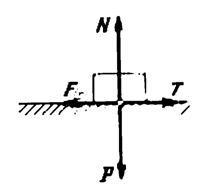


Fig. 4.1

Supposons maintenant que les surfaces des solides en contact sont rugueuses. Il se peut alors que le solide reste au repos malgré l'action de la force $\boldsymbol{T}$. En ce cas la force $\boldsymbol{T}$ est équilibrée par une autre force, de même direction mais de sens opposé à $\boldsymbol{T}$: on l'appelle *force de frottement de glissement* $\boldsymbol{F}_{fr}$ (fig. 4.1). La force de frottement de glissement, qui est une force résistante, agit dans le plan tangent aux deux surfaces de contact dans le sens opposé à la force motrice.

Proposons-nous d'augmenter progressivement la force motrice $\boldsymbol{T}$. Tant que le solide reste au repos, la force de frottement de glissement fait équilibre à chaque instant à la force T, augmentant avec elle jusqu'à une valeur maximale $\boldsymbol{F}_{max}$. Cette valeur correspond au cas limite de l'équilibre du solide, c'est-à-dire à l'instant où celui-ci est à mi-chemin entre le repos et le mouvement.

Nous pouvons faire la conclusion suivante: au repos relatif, le module de la force de frottement de glissement peut prendre des valeurs différentes, *la valeur maximale n'étant atteinte qu'à l'instant initial du mouvement relatif*:

$$F_{fr} \leqslant F_{max}. \tag{4.1}$$

L'égalité correspond au cas limite de l'équilibre du solide. La force de frottement qui agit lorsque le solide est au repos s'appelle *force*

de frottement de repos, ou *force de frottement statique*. La loi qui suit a été déduite en 1699 par Guillaume Amontons, mécanicien français (1663-1705), d'une série d'expériences, pour être corroborée plus tard, en 1781, par des expériences plus fines faites par Charles Coulomb, physicien français (1736-1806).

Loi d'Amontons-Coulomb. *La valeur maximale du module de la force de frottement de repos est proportionnelle à la pression normale du solide sur la surface d'appui*:

$$F_{max} = fN. \qquad (4.2)$$

Le facteur de proportionnalité f porte le nom de *coefficient de frottement de glissement*. C'est une grandeur sans dimension, qui est fonction du matériau des surfaces en contact et de l'état de ces surfaces (humidité, température, fini). L'inégalité (4.1) s'écrit maintenant sous une forme légèrement différente:

$$F_{tr} \leqslant fN.$$

Voici les valeurs du coefficient de frottement de glissement f pour quelques matériaux:

Acier sur glace	0,027
Acier sur acier	0,15
Bronze sur fonte	0,16
Bronze sur fer	0,19
Cuir sur fonte	0,28
Chêne sur chêne	0,54 à 0,62

La force de frottement qui agit quand un solide se déplace sur l'autre est, elle aussi, proportionnelle à la réaction normale:

$$F = f'N.$$

Le coefficient de frottement de glissement en mouvement f' est également fonction de la vitesse de mouvement, tout en restant inférieur au coefficient de frottement au repos:

$$f' < f.$$

Revenons au cas où les solides sont au repos. La réaction totale d'une surface rugueuse $\boldsymbol{R}$, compte tenu du frottement, est déterminée en module et en direction par la diagonale du rectangle construit sur la réaction normale et la force de frottement:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_{tr}.$$

La direction de la réaction totale $\boldsymbol{R}$ fait un angle β avec la normale à la surface d'appui du côté opposé à la force motrice $\boldsymbol{T}$ (fig. 4.2, *a*). Plus la force $\boldsymbol{T}$ est grande (la force $\boldsymbol{F}_{tr}$ augmentant en conséquence), plus la direction de $\boldsymbol{R}$ s'écarte de la normale. L'écart maximal est constaté au moment où $\boldsymbol{F}_{tr}$ devient égale à $\boldsymbol{F}_{max}$. La valeur maximale de l'angle d'écart β de la réaction totale $\boldsymbol{R}$ par rapport à la normale

s'appelle *angle de frottement* φ. De la figure 4.2, *b* et de la formule (4.2)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{max}}{N} = f. \quad (4.3)$$

Plus le coefficient de frottement de glissement f est petit, moins l'angle de frottement φ est grand : si $f = 0$, on a $\varphi = 0$. Dans ce cas idéal les surfaces des solides en contact sont dites *parfaitement polies*. La réaction d'une surface parfaitement polie est dirigée suivant la normale à cette surface (voir ch. I, n° 2.9).

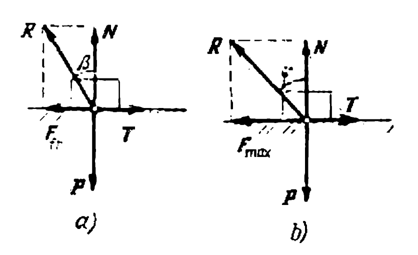


Fig. 4.2

Appliquons au solide reposant sur une surface horizontale plane dépolie (rugueuse) une force Q sous un angle ψ par rapport à la normale à la surface (fig. 4.3, *a*). Pour mettre le solide en mouvement, le module de la force S égal à

$$S = Q \sin \psi$$

doit être plus grand que la valeur maximale du module de la force de frottement, égale à

$$F_{max} = fN = fQ \cos \psi.$$

Autrement dit, il doit y avoir l'inégalité

$$Q \sin \psi \geqslant fQ \cos \psi,$$

ou

$$f = \operatorname{tg} \varphi \leqslant \operatorname{tg} \psi,$$

d'où

$$\psi \geqslant \varphi. \quad (4.4)$$

Il ressort de l'inégalité (4.4) que si l'inclinaison de la force appliquée Q par rapport à la normale est inférieure à l'angle de frottement φ, le solide garde son équilibre quelle que soit la valeur de la force exercée. Le domaine de l'espace limité sur la figure 4.3, *b* par des demi-droites inclinées de l'angle φ sur la verticale s'appelle *domaine de frottement* (hachuré sur la figure). Si le solide peut se déplacer en toute direction sur le plan, le domaine de frottement sera limité par la surface d'un cône circulaire *) droit de demi-angle au sommet φ, dit *cône de frottement*. Aucune force Q passant par le sommet du cône de frottement intérieurement à celui-ci ne peut provoquer le mouvement du solide. En regardant la figure 4.2, *b*, on remarque

*) Dans le cas où les surfaces de frottement sont homogènes et isotropes, le cône est circulaire ; il n'en est pas toujours ainsi.

également que la réaction totale au repos $\boldsymbol{R}$ appliquée au sommet du cône peut prendre une direction quelconque à l'intérieur du cône de frottement. Remarquons enfin que, dans tous les raisonnements précédents, on fait abstraction du poids du solide.

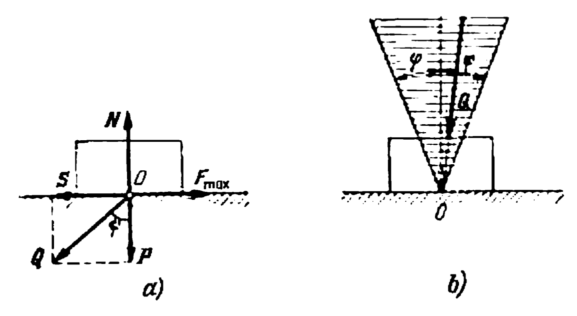


Fig. 4.3

Les problèmes dans lesquels interviennent les forces de frottement sont résolus par les méthodes habituelles; la seule différence réside dans le fait qu'en calculant les réactions de liaison, on tient compte des forces de frottement.

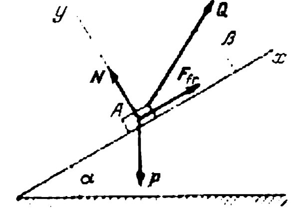


Fig. 4.4

Exemple 4.1. Un solide A de poids P repose sur un plan incliné rugueux de pente α. Une force Q est appliquée au solide sous un angle β par rapport au plan incliné (fig. 4.4). Quelle est la valeur de Q en état d'équilibre si l'angle de frottement du solide sur le plan est égal à φ et si en outre $\varphi < \beta < 90° - \varphi$?

Solution. Considérons l'équilibre du solide A. Remplaçons la liaison — le plan incliné rugueux — par les réactions: réaction normale N et force de frottement F_{fr}. L'axe Ax sera dirigé vers le haut suivant le plan incliné. Supposant que les dimensions du solide soient petites, on se trouve en présence d'un système de forces concourantes dans le plan. Les équations d'équilibre se présentent alors sous la forme

$$\sum X = -P \sin \alpha \pm F_{fr} + Q \cos \beta = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y = N - P \cos \alpha + Q \sin \beta = 0. \qquad (2)$$

De la deuxième équation nous déduisons la pression normale du solide sur le plan:

$$N = P \cos \alpha - Q \sin \beta. \qquad (2')$$

En établissant les conditions d'équilibre, deux cas sont à considérer:

a) Le solide A peut se mettre en mouvement en descendant le plan incliné. La force de frottement F_{fr} est dirigée alors vers le haut; il ressort de (1) et (2') que

$$F_{fr} = P \sin \alpha - Q \cos \beta \leqslant F_{max} = fN = \operatorname{tg} \varphi \, (P \cos \alpha - Q \sin \beta).$$

D'où

$$Q\,(\cos\beta - \operatorname{tg}\varphi\sin\beta) \geqslant P\,(\sin\alpha - \operatorname{tg}\varphi\cos\alpha).$$

Multiplions les deux membres par $\cos\varphi$. Il vient

$$Q\cos(\beta+\varphi) \geqslant P\sin(\alpha-\varphi), \quad \text{ou} \quad Q \geqslant \frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\beta+\varphi)}\,P. \tag{3}$$

b) Le solide A peut se mettre en mouvement en remontant le plan incliné. La force de frottement F_{fr} est dirigée alors vers le bas ; il ressort de (1) et (2') que

$$F_{fr} = Q\cos\beta - P\sin\alpha \leqslant F_{max} = \operatorname{tg}\varphi\,(P\cos\alpha - Q\sin\beta).$$

Transformons cette inégalité :

$$(\cos\beta + \operatorname{tg}\varphi\sin\beta)\,Q \leqslant (\sin\alpha + \operatorname{tg}\varphi\cos\alpha)\,P.$$

Il vient

$$Q \leqslant \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)}\,P \tag{4}$$

Réunissons les inégalités (3) et (4):

$$\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\beta+\varphi)}\,P \leqslant Q \leqslant \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)}\,P$$

Si ces inégalités sont vérifiées, le solide A est en équilibre. Dans le cas parti-

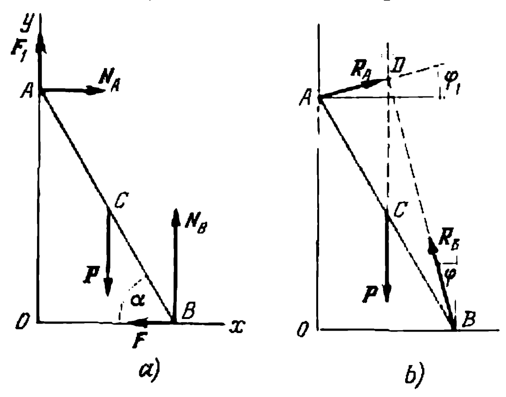


Fig. 4.5

culier où la force Q est inexistante, seule reste la condition

$$\sin(\alpha - \varphi) \leqslant 0, \quad \text{ou} \quad \alpha \leqslant \varphi.$$

Cela signifie qu'indépendamment du poids P, le solide A reste en équilibre sur le plan incliné rugueux tant que l'angle d'inclinaison α reste inférieur à l'angle de frottement φ.

Exemple 4.2. L'échelle AB est appuyée contre un mur rugueux et sur un sol rugueux. Le coefficient de frottement de l'échelle sur le mur est égal à f_1. Déterminer le coefficient de frottement f de l'échelle sur le sol si l'angle d'inclinaison maximal de l'échelle sur l'horizontale assurant l'équilibre de l'échelle est égal à α (fig. 4.5, *a*).

Solution. Etudions l'équilibre de l'échelle. Les forces exercées sur celle-ci se réduisent au poids de l'échelle P et aux réactions d'appui en A et B.

Puisqu'on se place par définition dans le cas limite où l'échelle est à mi-chemin entre le repos et le glissement, les modules des forces de frottement sont égaux à $F_1 = f_1N_A$ et $F = fN_B$, les forces étant dirigées à l'inverse du mouvement possible de l'échelle. Traçons les axes de coordonnées comme il est montré sur la figure 4.5, *a*. L'échelle est sollicitée par un système de forces plan. Ecrivons trois équations d'équilibre en désignant la longueur de l'échelle par $2l$:

$$\sum X = N_A - fN_B = 0, \quad \sum Y = f_1N_A - P + N_B = 0,$$
$$\sum \text{mom}_B F = Pl \cos \alpha - N_A \cdot 2l \sin \alpha - f_1 N_A \cdot 2l \cos \alpha = 0.$$

De la troisième équation

$$N_A = \frac{\cos \alpha}{2(\sin \alpha + f_1 \cos \alpha)} P.$$

Portons cette valeur dans la deuxième équation. Il vient

$$N_B = P - f_1N_A = \frac{2 \sin \alpha + f_1 \cos \alpha}{2(\sin \alpha + f_1 \cos \alpha)} P.$$

La première équation d'équilibre nous fournit le coefficient de frottement cherché:

$$f = \frac{N_A}{N_B} = \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha + f_1 \cos \alpha}.$$

Ce problème peut être résolu graphiquement. Représentons la réaction en A par une force unique R_A dirigée sous un angle $\varphi_1 = \text{arctg} f_1$ par rapport à la normale (fig. 4.5, *b*). L'échelle est sollicitée alors par un système plan de trois forces non parallèles P, R_A et R_B. Quand l'échelle est en équilibre, les directions de ces trois forces doivent se couper en un point (théorème des trois forces, voir ch. I, nº 2.6). Prolongeons donc les directions connues des forces P et R_A jusqu'à leur intersection en D. La droite BD est le support de la force R_B, et la tangente de l'angle φ est égale au coefficient de frottement cherché. Nous laissons au lecteur le soin de trouver cette réponse par la méthode géométrique.

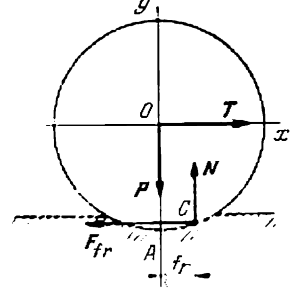


Fig. 4.6

1.2. Frottement de roulement. Par *frottement de roulement* on entend la résistance qui a lieu quand un solide roule sur l'autre. Soit un rouleau cylindrique de poids P, de rayon R, reposant sur un plan horizontal (fig. 4.6) et sollicité en son centre de gravité par une force motrice horizontale T. La surface d'appui se déforme sous l'action du poids du rouleau, si bien que le point d'application des réactions N et F_{fr} se déplace de A vers un point intermédiaire C. Mettons en équations l'équilibre du rouleau en commençant par la somme des projections des forces sur les axes Ox et Oy:

$$\sum X = T - F_{fr} = 0, \quad \sum Y = N - P = 0.$$

D'où

$$F_{fr} = T, \quad N = P.$$

Ainsi donc, en position d'équilibre le rouleau est sollicité par deux couples de forces : le premier couple $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{fr}}$ tend à mettre le rouleau en mouvement, tandis que le second couple $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{N}$ s'y oppose. Le moment du couple antagoniste s'appelle *moment de résistance au roulement* m_{r} ; il est égal au moment de la force $\boldsymbol{N}$ par rapport au point A,

$$m_{\mathrm{r}} = \mathrm{mom}_A \boldsymbol{N}.$$

A chaque instant d'équilibre les deux couples de forces s'annulent réciproquement (ceci est précisément la troisième équation d'équilibre) :

$$\sum \mathrm{mom}_A \boldsymbol{F} = \mathrm{mom}_A \boldsymbol{N} - TR = 0, \quad \text{ou} \quad m_{\mathrm{r}} = TR. \qquad (4.5)$$

A l'instant où le solide se met en mouvement, le moment résistant atteint sa valeur maximale. Les expériences montrent que cette valeur est proportionnelle à la pression normale,

$$(m_{\mathrm{r}})_{\max} = f_{\mathrm{r}} N. \qquad (4.6)$$

Le coefficient de proportionnalité f_{r}, dit *coefficient de frottement de roulement*, est mesuré en unités de longueur. Il peut être assimilé à la plus grande longueur de déplacement de $\boldsymbol{N}$ dans le cas d'équilibre limite (fig. 4.6).

Voici les valeurs du coefficient de frottement de roulement pour quelques matériaux :

Rouleau acier sur plan acier	0,005 cm
Rouleau bois sur plan acier	0,03 à 0,04 cm
Rouleau bois sur plan bois	0,05 à 0,06 cm

Au repos, le moment du couple de frottement de roulement ne dépasse jamais sa valeur maximale, $m_{\mathrm{r}} \leqslant (m_{\mathrm{r}})_{\max}$; avec (4.5) et (4.6), cela nous donne

$$TR \leqslant f_{\mathrm{r}} N,$$

d'où

$$T \leqslant \frac{f_{\mathrm{r}}}{R} N. \qquad (4.7)$$

L'inégalité (4.7) fixe la condition pour qu'il n'y ait pas de roulement. D'autre part, pour que le rouleau ne glisse pas, il faut que le module de $\boldsymbol{T}$ soit plus petit que la valeur maximale du module de la force de frottement de glissement :

$$T \leqslant fN.$$

En général f_{r}/R est beaucoup plus petit que le coefficient de frottement de glissement f ; c'est pourquoi, quand le repos est perturbé, le rouleau se met à rouler sur la surface d'appui sans glisser sur cette dernière.

§ 2. Fermes de barres planes

2.1. Notion de ferme. On appelle *ferme* (ou *treillis*) une structure géométriquement invariable constituée d'éléments rectilignes articulés et destinée à encaisser des charges extérieures et à les transmettre aux appuis. Si toutes les charges sont appliquées aux articulations, les éléments de la ferme s'appellent *barres*. Si les forces extérieures s'appliquent non seulement sur les articulations mais

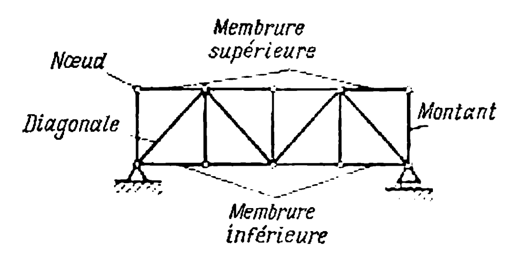
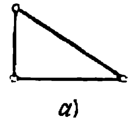
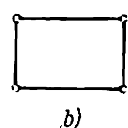
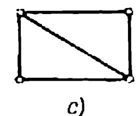


Fig. 4.7

aussi sur les points des éléments de la ferme, on dit que la ferme est constituée par des *poutres*. Une poutre est sollicitée non seulement en compression et en extension mais aussi en flexion. Une ferme







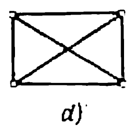


Fig. 4.8

plane a tous ses éléments situés dans un même plan. Dans le texte qui suit, nous nous bornerons à considérer des *fermes planes constituées par des barres.*

Le point d'articulation des barres s'appelle *nœud.* La partie basse de la ferme est la *membrure inférieure*, et la partie haute, la *membrure supérieure* (fig. 4.7). Les barres verticales portent le nom de *montants*, et les barres inclinées, *diagonales.*

Toute structure de barres articulées n'est pas forcément une ferme. La définition de la ferme sous-entend son indéformabilité géométrique, ou rigidité. Le moyen le plus facile d'obtenir une ferme consiste à assembler trois barres par des articulations (fig. 4.8, *a*). Un tel triangle de barres sera indéformable (rigide) et opposera donc une résistance aux forces appliquées. Par contre, un assemblage de quatre barres articulées en quatre points (fig. 4.8, *b*) se déforme sous l'action des forces appliquées dans les articulations et n'est donc pas une ferme. Un tel assemblage est désigné en mécanique sous le terme

de *mécanisme*. Pour faire de ce quadrilatère une ferme, il suffit de relier ses sommets opposés par une barre (fig. 4.8, *c*). Ajoutons encore une barre en la plaçant entre les deux autres sommets (fig. 4.8, *d*): la structure obtenue est toujours une ferme. Il y a cependant une différence notable entre les deux fermes: celle de la figure 4.8, *c* n'a pas de barres surabondantes, alors que celle de la figure 4.8, *d* en contient une.

Si l'on ne peut pas, dans une ferme, supprimer une barre sans compromettre l'indéformabilité géométrique de l'ensemble, on dit

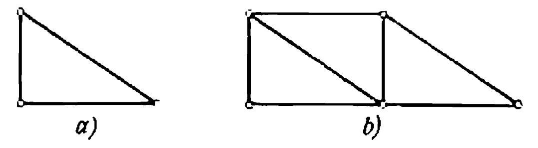


Fig. 4.9

que *la ferme n'a pas de barres surabondantes*. Si l'on peut supprimer une ou plusieurs barres sans que la ferme devienne déformable, on dit que *la ferme présente des barres surabondantes*. En statique, on ne considère que des fermes sans barres surabondantes.

Calculons le rapport qui doit exister entre le nombre de nœuds et le nombre de barres pour que la ferme soit sans barres surabondantes.

Considérons une ferme triangulée simple, c'est-à-dire formée par des triangles où les côtés sont constitués par les barres et les sommets par les nœuds. La ferme présentant un minimum de nœuds est un triangle formé de trois barres, qui s'assemblent en trois nœuds (fig. 4.9, *a*). Chaque fois qu'on y ajoute un nœud, on est obligé d'adjoindre deux nouvelles barres, afin que la ferme reste géométriquement indéformable et sans barres surabondantes (fig. 4.9, *b*). Ainsi donc, si le nombre total des nœuds est n, la ferme possède $n - 3$ nœuds ajoutés, c'est-à-dire autres que les trois nœuds du triangle minimal. Ajouter un nouveau nœud revient à ajouter deux nouvelles barres; de ce fait, ajouter $n - 3$ nœuds revient à ajouter deux fois $n - 3$ barres. Avec les trois barres du triangle minimal, on obtient le nombre total m des barres de la ferme, qui est lié au nombre n de ses nœuds par la relation

$$m = 2(n - 3) + 3 = 2n - 3. \tag{4.8}$$

Si $m < 2n - 3$, la ferme devient géométriquement déformable (devient un mécanisme); si $m > 2n - 3$, la ferme comporte des barres surabondantes.

En calculant les fermes, on distingue les cas isostatiques (statiquement déterminés) et hyperstatiques (statiquement indéterminés). Si les réactions d'appui et les efforts dans les barres se laissent dé-

terminer par les méthodes de statique du solide, on dit que la ferme est *statiquement déterminée*, ou *isostatique*; dans le cas contraire la ferme est dite *statiquement indéterminée*, ou *hyperstatique*. Il se trouve que toute ferme sans barres surabondantes, munie d'appuis convenables (voir ch. III, n° 2.3), est isostatique; une ferme possédant au moins une barre surabondante est toujours hyperstatique.

Dans le texte qui suit, nous admettons toujours que:

a) toutes les barres de la ferme sont rigoureusement rectilignes;

b) le frottement dans les articulations est inexistant;

c) toutes les charges exercées sur la ferme sont contenues dans son plan et appliquées seulement dans les nœuds.

Le poids des barres sera négligé.

Dans ces hypothèses les barres de la ferme seront sollicitées seulement en traction et en compression, jamais en flexion. En effet,

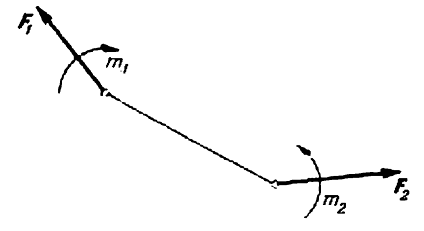


Fig. 4.10

puisqu'on néglige le poids des barres et que les forces sont appliquées seulement dans les nœuds, chaque barre reste en équilibre sous l'action des forces et des moments transmis par les nœuds (fig. 4.10). Puisque le frottement dans les articulations est nul, les moments aux articulations s'annulent. Chaque barre reste donc en équilibre sous l'action des deux forces appliquées en ses extrémités (dans les nœuds). Or, nous savons déjà que ce cas se produit si et seulement si les deux forces ont même module, sont portées par la droite joignant leurs points d'application et sont orientées dans les sens opposés. Ainsi donc, sous les hypothèses retenues *les barres des fermes* soumises aux charges *subissent soit une compression, soit une traction.*

Les efforts dans les barres de la ferme dépendent des forces exercées sur la ferme. Puisque ces forces comprennent les réactions dans les appuis de la ferme, on doit, avant de chercher les efforts dans les barres, déterminer les réactions d'appui.

2.2. Méthode des nœuds *). Cherchons les efforts dans les barres de la ferme montrée sur la figure 4.11, *a*. Ici $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ sont des for-

*) Dans la méthode des nœuds, les polygones de forces peuvent être rassemblés de manière à former un polygone unique, dit *diagramme de Crémona* (d'après le nom de son inventeur, mathématicien et mécanicien italien Luigi Crémona (1830-1903)). Pour plus de détails, voir S. Targ, *Eléments de mécanique rationnelle*, 3e édition, M., « Mir », 1978.

ces connues appliquées dans les nœuds C, D, E. Il convient de déterminer préalablement les réactions d'appui $\boldsymbol{R}_A$ et $\boldsymbol{R}_B$.

La méthode proposée consiste à isoler par la pensée le nœud A en substituant à l'action de la ferme sur A les réactions des barres *1* et *2*, notées $\boldsymbol{R}_1$ et $\boldsymbol{R}_2$ et dirigées suivant les barres. Puisque le nœud A est en équilibre, le triangle des forces $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_1$ et $\boldsymbol{R}_2$ est fermé. Dans ce triangle (fig. 4.11, *b*), déterminons les modules et les directions de $\boldsymbol{R}_1$ et $\boldsymbol{R}_2$. Ceci fait, isolons le nœud suivant, construisons le polygone des forces, déterminons les modules et les directions des réactions des autres barres, et ainsi de suite, jusqu'à déterminer les réactions de toutes les barres.

L'ordre d'examen des nœuds n'a pas d'importance en général. Il convient de se rappeler toutefois que la condition d'équilibre du

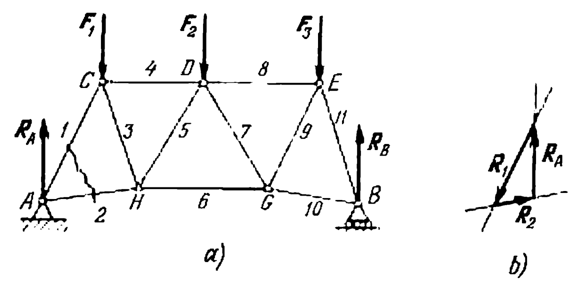


Fig. 4.11

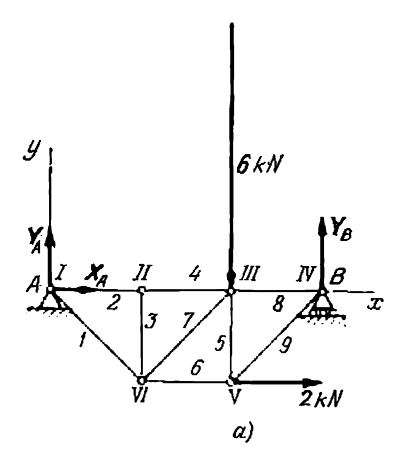
nœud permet de déterminer les *réactions de deux barres tout au plus*; il y a donc intérêt, dans l'exemple considéré, à commencer par les nœuds A ou B, car les autres nœuds réunissent trois barres ou plus. Après avoir déterminé les réactions des barres *1* et *2* ou *10* et *11*, on peut passer au nœud C ou E ; par contre, on ne peut pas envisager l'équilibre du nœud D qui réunit quatre barres aux réactions inconnues.

Soulignons une fois de plus que *la condition d'équilibre du nœud nous fournit la r é a c t i o n de la barre*, c'est-à-dire l'effort exercé par la barre sur le nœud ; quant à l'effort exercé par le nœud sur la barre, il sera de module égal mais de sens opposé. Par exemple (fig. 4.11, *b*), la réaction $\boldsymbol{R}_1$ de la barre *1* est dirigée vers le nœud A, tandis que la réaction $\boldsymbol{R}_2$ de la barre *2*, au contraire, est dirigée à partir du nœud. Ainsi donc, le nœud A exercera sur la barre *1* un effort opposé à $\boldsymbol{R}_1$, c'est-à-dire un effort de compression, et sur la barre *2*, un effort opposé à $\boldsymbol{R}_2$, c'est-à-dire un effort de traction. Si la réaction de la barre est dirigée *vers le nœud, la barre est comprimée*; si la réaction est dirigée *à partir du nœud, la barre est tendue*.

Pour déterminer les efforts dans les barres aboutissant au nœud, on peut faire intervenir les conditions d'équilibre analytiques d'un

nœud isolé (3.10) ; or, dans le cas considéré, la méthode graphique est plus simple et plus claire.

E x e m p l e 4.3. Déterminer les réactions d'appui et les efforts dans les barres de la ferme à treillis en N qui est représentée, avec les charges appliquées, sur la figure 4.12, *a*. Toutes les barres horizontales et verticales sont de même longueur *a*.



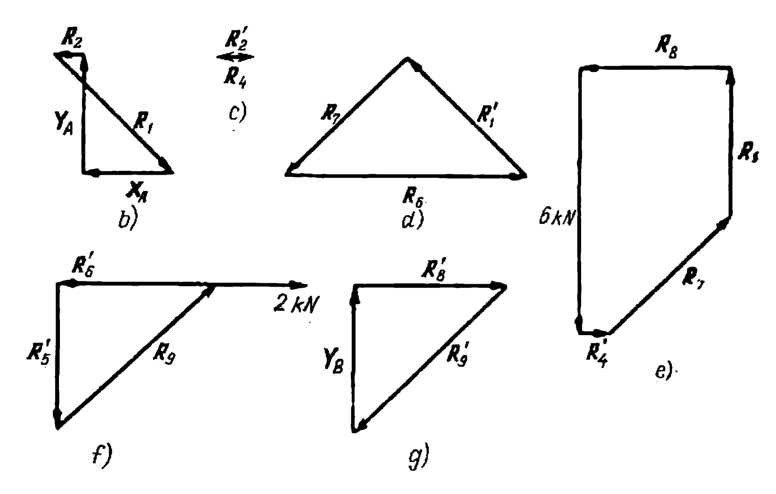


Fig. 4.12

S o l u t i o n. Cherchons d'abord les réactions d'appui ; sur la figure 4.12, *a* leurs composantes sont désignées par X_A, Y_A et Y_B. Mettons en équations l'équilibre de la ferme dans son ensemble :

$$\sum X = 2 + X_A = 0, \quad \sum Y = -6 + Y_A + Y_B = 0,$$

$$\sum \mathrm{mom}_A F = 2a - 6 \cdot 2a + Y_B \cdot 3a = 0.$$

De la première équation on trouve $X_A = -2$ kN, de la troisième, $Y_B = 4{,}33$ kN et de la deuxième, $Y_A = 2{,}67$ kN.

Avant de passer à la recherche des efforts dans les barres, voyons si la ferme est isostatique ou non. Le nombre des nœuds est $n = 6$ et le nombre des barres est $m = 9$. Portons ces valeurs dans (4.8) ; il vient

$$9 = 2 \cdot 6 - 3,$$

ce qui veut dire que la ferme est bien isostatique.

Marquons par des chiffres romains tous les nœuds et numérotons toutes les barres. Choisissons l'échelle de représentation des forces : 1 kN ~ 2/3 cm.

Commençons par le nœud *I*. Construisons le polygone des forces en traçant d'abord les forces connues : ce sont en l'occurrence les composantes des réactions X_A (dirigée vers la gauche) et Y_A. Puis menons par l'origine du vecteur X_A une droite parallèle à l'une des barres, par exemple à la barre *1*, et par l'extrémité du vecteur Y_A, une droite parallèle à l'autre barre *2*. Fermons le polygone des forces comme il est montré sur la figure 4.12, *b* et désignons les réactions des barres *1* et *2* par $\boldsymbol{R}_1$ et $\boldsymbol{R}_2$. Le nœud *I* exerce sur la barre *1* un effort opposé à $\boldsymbol{R}_1$ (effort de traction), et sur la barre *2*, un effort opposé à $\boldsymbol{R}_2$ (effort de compression). On obtient le même résultat en remarquant que la réaction $\boldsymbol{R}_1$ est dirigée à partir du nœud (la barre *1* est tendue), et la réaction $\boldsymbol{R}_2$, vers le nœud (la barre *2* est comprimée).

Après le nœud *I*, nous ne pouvons pas passer au nœud *VI*, car il réunit, en plus de la barre *1*, trois autres barres (*3*, *6*, *7*) dont les efforts sont inconnus. Nous passons donc au nœud *II*. Ici la force connue est la réaction $\boldsymbol{R}'_2$ de la barre *2* dirigée vers la droite, car la barre *2* est comprimée. Le polygone des forces se réduit à un segment (fig. 4.12, *c*). Cela revient à dire que l'effort dans la barre *3* est nul, tandis que la barre *4* est comprimée, de même que la barre *2*.

Après le nœud *II* nous ne pouvons pas passer au nœud *III* (trois barres *5*, *7*, *8* aux efforts inconnus!) ; nous passerons donc au nœud *VI* (fig. 4.12, *d*). Puisque la barre *1* est tendue, la réaction $\boldsymbol{R}'_1$ de la barre *1*, c'est-à-dire la force avec laquelle la barre *1* agit sur le nœud *VI*, est dirigée à l'opposé de $\boldsymbol{R}_1$ (fig. 4.12, *b*). La réaction $\boldsymbol{R}_6$ est dirigée à partir du nœud, et la réaction $\boldsymbol{R}_7$, vers le nœud. Autrement dit, la barre *6* est tendue et la barre *7* comprimée.

Nous pouvons passer désormais indifféremment au nœud *III* ou au nœud *V*. Les polygones des forces pour les nœuds *III* et *V* sont représentés sur les figures 4.12, *e* et 4.12, *f*, et le triangle des forces pour le nœud *IV*, sur la figure 4.12, *g*.

Soulignons que les réactions $\boldsymbol{R}'_i$ et $\boldsymbol{R}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ sont de module égal mais de sens opposés, car elles caractérisent les mêmes barres mais s'appliquent aux nœuds situés aux extrémités opposées de la barre. Présentons les résultats obtenus sous forme d'un tableau, utilisant l'échelle et affectant les efforts de compression de signe négatif :

n° de la barre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effort, kN	3,8	−0,7	0	−0,7	−3,3	5,3	−3,8	−3,3	4,7

2.3. Méthode des sections (méthode de Ritter *)). La méthode des sections est une méthode analytique de détermination des efforts dans les barres de la ferme. Nous prendrons à titre d'exemple la ferme montrée sur la figure 4.13, *a* et chargée par les forces $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$.

---

*) August Ritter, mécanicien allemand (1826-1906).

Comme dans les cas précédents, le calcul commence par la détermination des réactions d'appui X_A, Y_A, Y_B. Puis on passe à la détermination des efforts dans les barres. Par exemple, pour déterminer les efforts dans les barres *4*, *5*, *6*, nous sectionnerons par la pensée la ferme suivant la ligne *I-I* et nous envisagerons l'équilibre de la partie gauche (ou droite) de la ferme. L'action de la partie droite de la ferme sur la partie gauche est transmise par les efforts S_4, S_5, S_6 qui sont dirigés suivant les barres *4*, *5*, *6* à partir des nœuds correspondants (chaque effort étant donc assimilé à une traction). Les efforts inconnus S_4, S_5, S_6 seront déduits de la condition d'équilibre de la partie gauche de la ferme. Ceci fait, nous ferons une autre

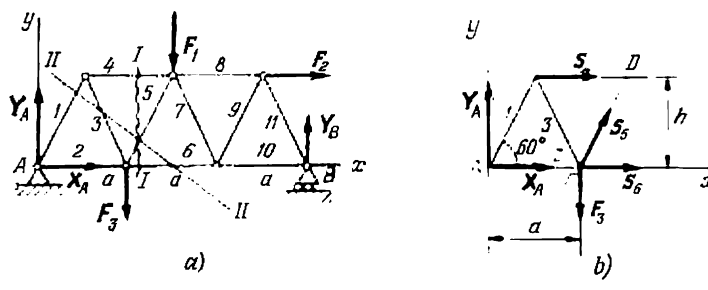


Fig. 4.13

section dans un autre endroit de la ferme, puis nous chercherons les efforts dans les barres sectionnées, et ainsi de suite. L'endroit et l'ordre des sections n'ont pas d'importance ; il convient de se rappeler toutefois que le nombre de barres sectionnées (donc aussi le nombre d'efforts inconnus) ne doit pas être supérieur au nombre d'équations d'équilibre qu'on peut écrire pour la partie considérée de la ferme. Par exemple, la section *II-II* ne convient pas, car elle rencontre quatre barres *1*, *3*, *5*, *6* ; on a alors quatre efforts inconnus S_1, S_3, S_5, S_6, pour lesquels on ne dispose que de trois équations d'équilibre.

Nous avons convenu précédemment de diriger les efforts cherchés dans les barres à partir du nœud correspondant. S'il se trouve que l'effort est positif, c'est qu'il agit bien dans le sens représenté: la barre est tendue. Si la solution montre que l'effort est négatif, c'est qu'il agit dans la section à l'opposé de la direction représentée, c'est-à-dire vers le nœud : la barre est comprimée. Ainsi donc, en dirigeant les efforts inconnus dans les barres à partir du nœud et en les déterminant par les équations d'équilibre de la partie considérée de la ferme, nous pouvons juger non seulement de la valeur mais aussi du sens d'action de l'effort dans la barre : *si l'effort est positif, la barre est tendue, si l'effort est négatif, la barre est comprimée.*

La méthode de Ritter est une variante de la méthode des sections de la ferme. Elle consiste essentiellement à utiliser les équations

d'équilibre (3.9) (ou (3.8)) pour la ferme « coupée ». Pour la recherche des efforts (fig. 4.13, *b*), nous ferons intervenir le théorème des trois moments ou les équations (3.8). Parmi les trois points considérés sur le plan, nous choisirons d'abord le point C où se rencontrent les efforts S_5 et S_6. La première des équations (3.9)

$$\sum \text{mom}_C \boldsymbol{F} = -Y_A a - S_4 h = 0$$

ne comprendra donc qu'un seul effort inconnu S_4, à côté des forces extérieures et des réactions d'appui dont le moment par rapport à C est non nul. On a donc

$$S_4 = -\frac{a}{h} Y_A,$$

autrement dit, si $Y_A > 0$, on a $S_4 < 0$; la barre *4* est comprimée.

Passons ensuite au point D où se rencontrent les directions des efforts S_4 et S_5. La deuxième équation d'équilibre (3.9) s'écrira comme suit:

$$\sum \text{mom}_D \boldsymbol{F} = F_3 \cdot \frac{1}{2} a + X_A h - Y_A \cdot \frac{3}{2} a + S_6 h = 0.$$

Elle nous donne

$$S_6 = \frac{a}{2h} (3Y_A - F_3) - X_A.$$

Comme troisième point, on doit choisir enfin le point de concours des directions de S_4 et S_6. Or, dans notre cas, ces directions sont parallèles. Nous ferons donc intervenir les équations d'équilibre sous la forme (3.8) ; la troisième équation (les deux premières coïncidant avec celles du théorème des trois moments) s'écrira comme suit:

$$\sum Y = Y_A - F_3 + S_5 \cos 30° = 0.$$

Elle nous fournit le dernier des trois efforts:

$$S_5 = \frac{1}{\cos 30°} (F_3 - Y_A).$$

L'avantage de la méthode de Ritter réside en ce que chaque effort se détermine indépendamment des autres, au moyen d'une équation unique. Cet avantage se fait surtout sentir dans le cas où l'on cherche des efforts isolés, et non l'ensemble des efforts en jeu.

Exemple 4.4. Déterminer les réactions d'appui et les efforts dans les barres de la ferme montrée avec les charges appliquées sur la figure 4.14. Les barres verticales et horizontales ont même longueur a ; $F_1 = 3$ kN, $F_2 = 8$ kN.

Solution. On a $n = 8$ nœuds et $m = 13$ barres. Portons ces valeurs dans (4.8) ; il vient $13 = 2 \cdot 8 - 3$. La ferme est isostatique.

Cherchons les réactions d'appui. Annulant les sommes des projections de toutes les forces sur les axes Ax, Ay et écrivant l'équation des moments par rap-

port au point A, nous obtenons

$$\sum X = F_1 - X_A = 0, \qquad \sum Y = -F_2 + Y_A + Y_B = 0,$$
$$\sum \text{mom}_A F = -F_1 a - F_2 \cdot 2a + Y_B \cdot 3a = 0.$$

D'où

$$X_A = F_1 = 3 \text{ kN}, \qquad Y_B = \frac{1}{3}(F_1 + 2F_2) = 6{,}33\text{kN},$$
$$Y_A = F_2 - Y_B = 1{,}67\text{kN}.$$

Déterminons les efforts dans les barres par la méthode des sections.

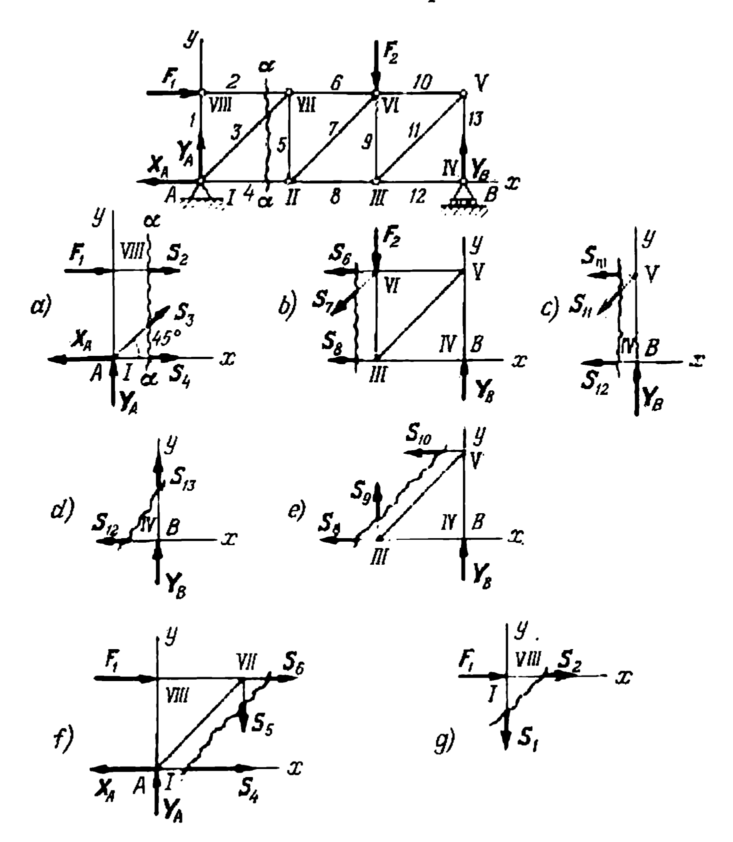


Fig. 4.14

Faisons d'abord la section α-α, les efforts dans les barres étant supposés dirigés à partir des nœuds. Les conditions d'équilibre de la partie gauche de la ferme (fig. 4.14, *a*) se traduisent par trois équations

$$\sum X = F_1 - X_A + S_2 + S_3 \cos 45° + S_4 = 0,$$
$$\sum Y = Y_A + S_3 \cos 45° = 0, \qquad \sum \text{mom}_A F = -F_1 a - S_2 a = 0$$

qui nous donnent

$$S_2 = -F_1 = -3\text{ kN},\quad S_3 = -\frac{1}{\cos 45^\circ} Y_A = -2{,}36\text{ kN},$$

$$S_4 = -F_1 + X_A - S_2 - S_3 \cos 45^\circ = 4{,}67\text{ kN}.$$

Sectionnons les barres *6*, *7* et *8* et mettons en équations l'équilibre de la partie droite de la ferme (fig. 4.14, *b*):

$$\sum X = -S_6 + S_7 \cos 135^\circ - S_8 = 0,$$

$$\sum Y = -F_2 + Y_B + S_7 \cos 135^\circ = 0,\quad \sum \text{mom}_{VI} F = Y_B a - S_8 a = 0$$

(équation des moments par rapport au nœud *VI*). D'où

$$S_8 = Y_B = 6{,}33\text{ kN},\quad S_7 = \frac{Y_B - F_2}{\cos 45^\circ} = -2{,}36\text{ kN},$$

$$S_6 = -S_8 + S_7 \cos 45^\circ = -4{,}67\text{ kN}.$$

Sectionnons ensuite les barres *10*, *11*, *12* et examinons l'équilibre de la partie droite de la ferme (fig. 4.14, *c*). Les équations d'équilibre s'écrivent comme suit:

$$\sum X = -S_{10} + S_{11} \cos 135^\circ - S_{12} = 0,$$

$$\sum Y = Y_B + S_{11} \cos 135^\circ = 0,\quad \sum \text{mom}_V F = -S_{12} a = 0$$

(équation des moments par rapport au nœud *V*). De ces équations

$$S_{12} = 0,\quad S_{11} = \frac{1}{\cos 45^\circ} Y_B = 8{,}95\text{ kN},$$

$$S_{10} = -S_{12} - S_{11} \cos 45^\circ = -6{,}33\text{ kN}.$$

Pour déterminer l'effort dans la barre *13*, nous coupons les barres *13* et *12* et nous considérons l'équilibre de la partie de la ferme montrée sur la figure 4.14, *d*, c'est-à-dire du nœud *B*. Projetons toutes les forces sur l'axe *By*. Il vient

$$\sum Y = Y_B + S_{13} = 0,$$

d'où

$$S_{13} = -Y_B = -6{,}33\text{ kN}.$$

Pour déterminer l'effort dans la barre *9*, nous faisons une section rencontrant les barres *8*, *9*, *10* et nous étudions l'équilibre de la partie de la ferme représentée sur la figure 4.14, *e*. Projetons toutes les forces sur l'axe *By*. Il vient

$$\sum Y = Y_B + S_9 = 0,$$

d'où

$$S_9 = -Y_B = -6{,}33\text{ kN}.$$

Procédons d'une façon analogue pour déterminer l'effort dans la barre *5* (fig. 4.14, *f*): faisons une section de façon à couper les barres *4*, *5*, *6*, supprimons la partie droite de la ferme et annulons la somme des projections de toutes les forces sur l'axe *Ay*. Il vient

$$\sum Y = Y_A - S_5 = 0,$$

d'où

$$S_5 = Y_A = 1{,}67\text{ kN}.$$

Examinons en dernier lieu l'équilibre du nœud *VIII* (fig. 4.14, *g*). Il vient

$$S_1 = 0.$$

Présentons les résultats du calcul sous forme d'un tableau:

n° de la barre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Effort, kN	0	−3,00	−2,36	4,67	1,67	−4,67	−2,36	6,33	−6,33	−6,33	8,95	0	−6,33

En discutant l'équilibre des différentes parties de la ferme, nous avons orienté les efforts dans les barres à partir des nœuds; de ce fait, les efforts affectés de signe négatif provoquent la compression des barres, et les efforts affectés de signe positif, la traction des barres.

Nous n'avons pas appliqué la méthode de Ritter dans l'exemple 4.4, afin de montrer qu'elle ne s'impose pas toujours dans la méthode des sections.

Exercices

E x e r c i c e 4.1. Un solide de poids P est animé d'un mouvement uniforme sur une surface horizontale rugueuse sous l'action d'une force T dont la direction fait un angle β sur l'horizontale (fig. 4.15). Pour quelle valeur de β la force T a le module le moins élevé si l'angle de frottement est égal à φ ?

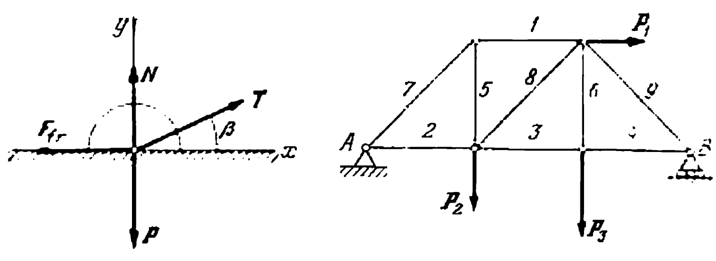


Fig. 4.15 Fig. 4.16

I n d i c a t i o n. Considérer la force de frottement F_{fr}.

R é p o n s e. $\beta = \varphi$, $T_{min} = P \sin \varphi$.

E x e r c i c e 4.2. Une poutre homogène prend appui sur le sol et le mur qui présentent les mêmes coefficients de frottement f. Déterminer l'angle α que fait la poutre avec le sol en position d'équilibre.

R é p o n s e. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2f}{1-f^2}$.

E x e r c i c e 4.3. Soit une ferme (fig. 4.16) dont toutes les barres horizontales et verticales ont même longueur a. Les nœuds de la ferme sont sollicités par des forces $P_1 = 10$ kN, $P_2 = 20$ kN, $P_3 = 30$ kN. Déterminer les réactions d'appui en A, B et les efforts dans les barres.

R é p o n s e. $X_A = -10$ kN, $Y_A = 20$ kN, $R_B = 30$ kN.

n° de la barre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effort, kN	−20	30	30	30	20	30	−28,3	0	−42,4

CHAPITRE V

SYSTÈME DE FORCES QUELCONQUE

§ 1. Vecteur moment d'une force et théorie des couples dans l'espace

1.1. Représentation vectorielle du moment d'une force par rapport à un point. En examinant un système de forces plan (ch. II, nº 2.1), nous avons représenté le moment d'une force par rapport à un point par une grandeur algébrique égale en valeur absolue au produit de la force par son bras de levier ou, ce qui revient au même, au double de l'aire du triangle OAB (fig. 5.1):

$$\text{mom}_O\, \boldsymbol{F} = \pm Fh = \pm 2S_{\Delta OAB}.$$

Dans le cas d'un système de forces quelconque (gauche, ou spatial) une telle définition s'avère insuffisante, car deux forces peuvent exercer des actions différentes sur un solide tout en présentant des moments égaux par rapport à un point. En étudiant la statique dans l'espace, on doit connaître non seulement la valeur du moment de la force mais aussi l'orientation du plan du triangle OAB. Pour que le moment de la force par rapport au point O puisse caractériser complètement l'action de cette force sur le solide, on doit représenter le moment en question par un vecteur perpendiculaire au plan OAB.

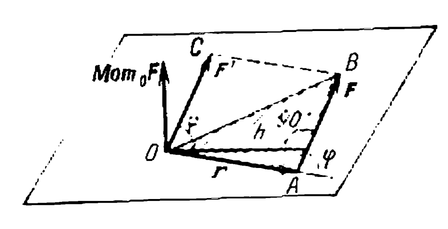


Fig. 5.1

Le *vecteur moment* (ou *moment vectoriel*) *de la force* **F** *par rapport au point O* est un vecteur appliqué en O, égal en module au produit de **F** par son bras de levier, dirigé suivant la perpendiculaire au plan qui contient **F** et O et orienté du côté d'où l'on voit le solide tourner dans le sens antihoraire sous l'action de la force **F** (soit d'après la règle de la vis à droite). Nous désignerons le vecteur moment de la force **F** par rapport au point O par le symbole $\mathbf{Mom}_O\, \boldsymbol{F}$ (fig. 5.1). Le module Fh du vecteur moment est égal au double de l'aire du triangle OAB ou, ce qui revient au même, à l'aire du parallélogramme $OABC$. Ce dernier peut être assimilé au parallélogramme formé

par les vecteurs F' et r, où F' est un vecteur égal au vecteur force F et appliqué en O, et r le rayon vecteur du point d'application de la force F. Le module du vecteur moment est égal donc à

$$\mathrm{Mom}_O F = Fh = rF \sin \varphi. \tag{5.1}$$

R e m a r q u e s. a) Par définition, le vecteur moment d'une force ne change pas quand on transfère le point d'application de la force le long de sa ligne d'action.

b) De la formule (5.1) il ressort que le vecteur moment de la force F par rapport au point O s'annule quand $F = 0$, $r = 0$ ou $\varphi = 0$ ($\varphi = 180°$). Le premier cas est celui où la force devient égale à zéro ; dans les deux autres cas la direction de la force passe par le point O.

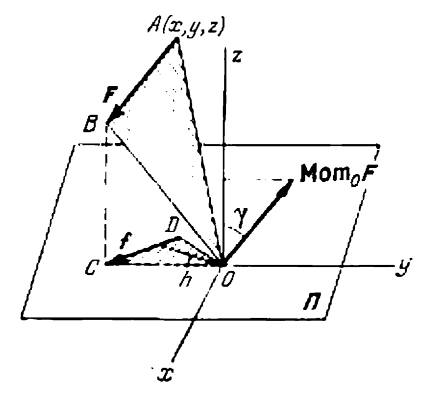


Fig. 5.2

Le vecteur $\mathbf{Mom}_O F$ (vecteur moment de la force F par rapport au point O) est égal en module à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs r et F, est perpendiculaire au plan de ces vecteurs et orienté de telle façon qu'en se plaçant en son extrémité, on voie l'angle entre r et F' parcouru dans le sens antihoraire. Se rappelant la définition du produit vectoriel de deux vecteurs (1.12), on s'assure que $\mathbf{Mom}_O F$ est le produit vectoriel des vecteurs r et F. Ainsi donc, *le vecteur moment d'une force F par rapport à un point O est un vecteur lié en O et égal au produit vectoriel du rayon vecteur du point d'application de la force par le vecteur force*:

$$\mathbf{Mom}_O F = [r, F]. \tag{5.2}$$

1.2. Moment d'une force par rapport à un axe. Soient une force F et un axe Oz (fig. 5.2). Menons un plan Π perpendiculaire à Oz de telle façon que l'axe Oz vienne percer le plan Π en O.

Le *moment de la force F par rapport à l'axe Oz* est le moment du vecteur projection f de cette force sur le plan Π perpendiculaire à Oz (on dit aussi composante f du vecteur F dans le plan Π) par rapport au point O où l'axe Oz perce le plan Π.

De même que dans le n° 2.1 du ch. II, nous admettons que le moment est positif si, en regardant du côté de la direction positive de l'axe Oz, nous voyons le solide tourner dans le sens antihoraire sous l'action du vecteur projection f de la force sur le plan. Le moment de la force F par rapport à l'axe Oz sera noté $\mathrm{mom}_{Oz} F$. Il ressort de la définition ci-dessus que le moment de la force F par

rapport à l'axe Oz est un scalaire égal en valeur absolue au double de l'aire du triangle OCD :

$$\mathrm{mom}_{Oz}\,\boldsymbol{F} = \mathrm{mom}_O\,\boldsymbol{f} = \pm fh = \pm 2S_{\triangle OCD}. \tag{5.3}$$

Les cas où le moment d'une force non nulle par rapport à un axe est égal à zéro sont les suivants:

a) la direction de la force rencontre l'axe: dans ce cas le bras de levier $h = 0$, car la direction du vecteur projection de la force sur un plan perpendiculaire à l'axe passe nécessairement par le point en lequel l'axe vient percer le plan;

b) la force est parallèle à l'axe: dans ce cas la projection de $\boldsymbol{F}$ sur un plan perpendiculaire à l'axe est un point, si bien qu'on a $f = 0$.

Dans le premier cas comme dans l'autre, le vecteur force et l'axe doivent être contenus dans un même plan.

Démontrons un lemme qui établit une relation entre le vecteur moment d'une force par rapport à un point et le moment de cette force par rapport à un axe qui passe par ce point.

L e m m e. *La projection du vecteur moment d'une force par rapport à un point sur un axe passant par ce point est égale au moment de la force par rapport à cet axe.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient une force $\boldsymbol{F}$ représentée par le vecteur $\boldsymbol{AB}$ (fig. 5.2) et un axe Oz. Menons un plan Π perpendiculaire à Oz de telle façon que l'axe Oz vienne percer le plan Π en O. Le vecteur moment $\mathbf{Mom}_O\boldsymbol{F}$ par rapport au point O a pour module le double de l'aire du triangle OAB:

$$\mathrm{Mom}_O\,\boldsymbol{F} = 2S_{\triangle OAB}$$

et est dirigé perpendiculairement au plan du triangle OAB, formant un angle γ avec l'axe Oz. Projetons le vecteur $\mathbf{Mom}_O\boldsymbol{F}$ sur l'axe Oz; il vient

$$(\mathbf{Mom}_O\,\boldsymbol{F})_{Oz} = \mathrm{Mom}_O\,\boldsymbol{F}\cdot\cos\gamma = 2S_{\triangle OAB}\cos\gamma. \tag{5.4}$$

Or, $S_{\triangle OAB}\cos\gamma = \pm S_{\triangle OCD}$, car l'aire de la projection est égale à l'aire de la figure projetée multipliée par le cosinus de l'angle entre le plan de la projection et le plan de la figure; l'angle entre les plans OAB et Π est égal à l'angle entre les perpendiculaires correspondantes, donc à γ. Au lieu de (5.4), on peut écrire

$$(\mathbf{Mom}_O\,\boldsymbol{F})_{Oz} = \pm\,2S_{\triangle OCD}. \tag{5.5}$$

Identifiant (5.5) et (5.3), on s'assure que

$$(\mathbf{Mom}_O\,\boldsymbol{F})_{Oz} = \mathrm{mom}_{Oz}\,\boldsymbol{F}, \tag{5.6}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Utilisant cette relation et la représentation du vecteur moment d'une force par rapport à un point sous forme d'un produit vectoriel (5.2), cherchons l'expression analytique des moments d'une force par rapport aux axes de coordonnées. Mettons la formule (5.2) sous la forme (1.16) en tenant compte de ce que les projections du rayon vecteur d'un point sur les axes de coordonnées sont égales aux coordonnées de ce point:

$$\mathbf{Mom}_O \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}. \tag{5.7}$$

Plaçons l'origine des coordonnées en O et projetons l'égalité (5.7) sur les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz (fig. 5.2). Les expressions obtenues sont analogues à (1.17):

$$\begin{aligned} (\mathbf{Mom}_O \boldsymbol{F})_{Ox} &= \mathrm{mom}_{Ox} \boldsymbol{F} = yZ - zY, \\ (\mathbf{Mom}_O \boldsymbol{F})_{Oy} &= \mathrm{mom}_{Oy} \boldsymbol{F} = zX - xZ, \\ (\mathbf{Mom}_O \boldsymbol{F})_{Oz} &= \mathrm{mom}_{Oz} \boldsymbol{F} = xY - yX. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Ici x, y, z sont les coordonnées du point d'application de la force $\boldsymbol{F}$, tandis que X, Y et Z sont les projections de $\boldsymbol{F}$ sur les axes Ox, Oy, Oz.

Entendons-nous bien sur la nature des vecteurs considérés. Des définitions du moment d'une force dans le cas d'un système de forces plan (ch. II, n° 2.1), du moment d'une force par rapport à un axe et du vecteur moment d'une force par rapport à un centre, il ressort que ces grandeurs scalaires et vectorielles restent inchangées quand on transfère le point d'application de la force en un point quelconque de sa ligne d'action. La notion de moment ne s'applique donc pas seulement aux vecteurs liés (nous le verrons en dynamique) mais aussi aux vecteurs glissants. Quant aux vecteurs libres, la notion de moment n'a pas de sens, car une translation peut annuler le bras de levier, donc aussi le moment.

1.3. Théorème de l'équivalence des couples dans l'espace. Nous avons montré dans le ch. II, n° 2.3, que deux couples coplanaires sont équivalents quand ils ont même moment (en valeur absolue) et même sens de rotation. Nous démontrerons maintenant le théorème de l'équivalence de deux couples dans l'espace.

Théorème. *Deux couples sont équivalents s'ils sont contenus dans deux plans parallèles, possèdent des moments égaux en valeur absolue et ont le même sens de rotation.*

Démonstration. Soit un couple $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ ($F_1 = F_2 = F$) de bras de levier AB dans le plan Π (fig. 5.3). Prenons dans un plan Π' parallèle à Π un segment CD égal et parallèle à AB. Appliquons

aux points C et D des forces équilibrées $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{F}_4$, $\boldsymbol{F}_5$, $\boldsymbol{F}_6$ égales en valeur et en direction aux forces du couple donné ($F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = F$). La résultante des forces $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_5$ a pour module $F_1 + F_5$, est parallèle à ses composantes et appliquée au milieu du segment AD; la résultante de $\boldsymbol{F}_2$ et $\boldsymbol{F}_4$ a pour module $F_2 + F_4$, est parallèle à ses composantes et appliquée au milieu du segment BC. Puisque les résultantes de $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_5$ et de $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_4$ sont appliquées en un même point (les diagonales du parallélogramme $ABDC$ se coupent en leur milieu), égales en module et orientées dans les sens opposés, on peut les négliger. Restent les forces $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{F}_6$ formant un couple de moment égal à celui du couple $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ (les deux couples ont les forces de même

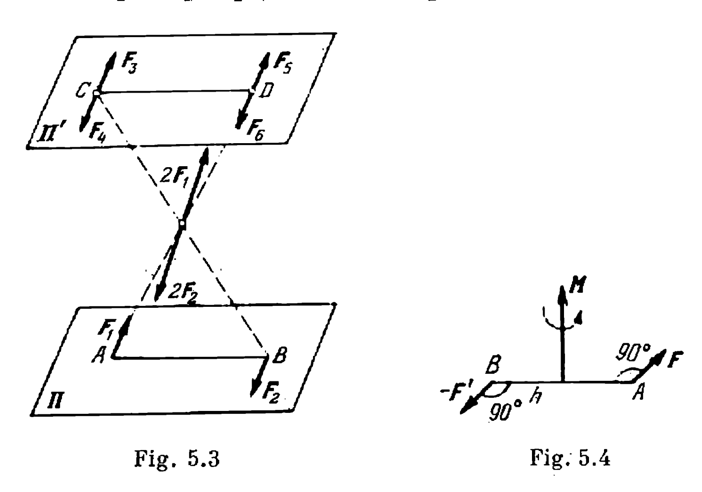


Fig. 5.3 Fig. 5.4

module et les mêmes bras de levier), dirigé de la même façon mais contenu dans un plan parallèle Π'. Puisque le couple $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{F}_6$ contenu dans le plan Π' peut être remplacé par tout autre couple ayant même moment et même sens de rotation (voir le théorème démontré dans le ch. II, n° 2.3), on peut substituer au couple donné $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ appartenant au plan Π tout autre couple situé dans un plan parallèle, présentant le même moment et le même sens de rotation. Le théorème est démontré.

1.4. Représentation vectorielle du moment d'un couple. Pour définir l'action d'un couple sur un solide, il suffit de définir le plan d'action du couple, la valeur absolue de son moment (axe) et le sens de rotation. Les trois facteurs énumérés peuvent être définis en représentant le moment du couple par un vecteur $\boldsymbol{M}$ perpendiculaire au plan d'action du couple et ayant pour module la valeur absolue du moment du couple:

$$M = Fh.$$

L'orientation du vecteur $\boldsymbol{M}$ est définie par la règle de la vis à droite: cela signifie qu'en regardant de l'extrémité du vecteur, on voit tourner le solide sollicité par le couple dans le sens antihoraire (fig. 5.4). Etant donné qu'on peut transporter un couple tant dans son plan que dans un plan parallèle sans changer l'effet du couple sur le solide, il est possible d'effectuer la translation du vecteur moment d'un couple dans l'espace. De ce fait, *le vecteur moment d'un couple est un vecteur libre.*

De la figure 5.4 et de la définition du vecteur moment d'une force par rapport à un point (n° 1.1), il ressort que

$$\boldsymbol{M} = \mathbf{Mom}_A\,(-\boldsymbol{F}') = \mathbf{Mom}_B\,\boldsymbol{F}, \quad M = Fh. \tag{5.9}$$

Un vecteur moment donné ne correspond pas à un couple de forces unique mais à une infinité de couples équivalents situés dans des

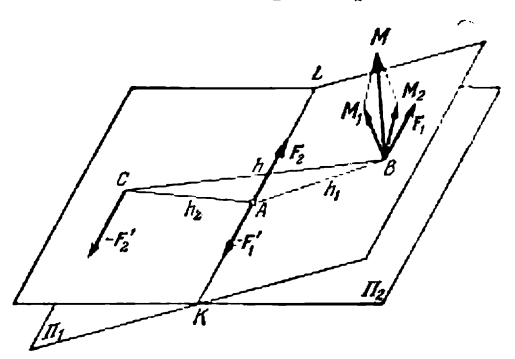


Fig. 5.5

plans parallèles. La correspondance entre le vecteur moment d'un couple et le couple de forces lui-même n'est pas biunivoque: à tout couple de forces correspond un vecteur moment unique, mais la réciproque n'est pas vraie.

1.5. Théorème de la composition des couples dans l'espace. *Deux couples situés dans deux plans sécants* *) *sont équivalents à un couple unique dont le vecteur moment est égal à la somme géométrique des vecteurs moments des couples donnés.*

Démonstration. Soient deux couples situés dans deux plans sécants Π_1, Π_2 (fig. 5.5). Supposons que les forces $\boldsymbol{F}_1$, $-\boldsymbol{F}_1'$ ($F_1 = F_1' = F$) forment le premier couple de vecteur moment $\boldsymbol{M}_1$. Orientons le premier couple de telle façon que la force $-\boldsymbol{F}_1'$ soit appliquée à un point A situé sur la droite d'intersection KL des

*) Si les couples étaient situés dans deux plans parallèles, on pourrait les transporter dans l'un de ces deux plans d'après le théorème démontré dans le n° 1.3 et les composer d'après la règle énoncée dans le ch. II, n° 2.4.

plans et dirigée suivant KL ; son bras de levier h_1 sera perpendiculaire à KL. Transformons le couple de vecteur moment $\boldsymbol{M}_2$ situé dans Π_2 de telle sorte que les modules de ses composantes $\boldsymbol{F}_2$ et $-\boldsymbol{F}'_2$ soient égaux à F, puis orientons ce couple de telle façon que la force $\boldsymbol{F}_2$ soit appliquée au point A et dirigée suivant KL dans le sens inverse de $-\boldsymbol{F}'_1$. Le bras de levier du second couple h_2 sera perpendiculaire, lui aussi, à KL. On peut négliger les forces $-\boldsymbol{F}'_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ qui se font équilibre. La composition des couples nous donne donc un troisième couple de composantes $\boldsymbol{F}_1$ et $-\boldsymbol{F}'_2$, de bras de levier $CB = h$ et de vecteur moment $\boldsymbol{M}$ de module $M = Fh$. Le couple $\boldsymbol{F}_1$, $-\boldsymbol{F}'_2$ est appelé *couple résultant*. Nous montrerons que le vecteur moment $\boldsymbol{M}$ du couple résultant est égal à la somme géométrique des vecteurs moments $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ des couples à composer.

Puisque tout vecteur moment peut être transporté dans l'espace parallèlement à lui-même, nous placerons l'origine des vecteurs $\boldsymbol{M}_1$ et $\boldsymbol{M}_2$ au point B ; le vecteur $\boldsymbol{M}_1$ est perpendiculaire au plan Π_1, et le vecteur $\boldsymbol{M}_2$ est perpendiculaire au plan Π_2. Les modules de $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ sont égaux respectivement à $M_1 = Fh_1$ et $M_2 = Fh_2$. Faisons la composition des vecteurs $\boldsymbol{M}_1$ et $\boldsymbol{M}_2$ d'après la règle du parallélogramme : le vecteur résultant est $\boldsymbol{M}$. Il s'agit de montrer que le vecteur $\boldsymbol{M}$ est égal au vecteur moment du couple $\boldsymbol{F}_1$, $-\boldsymbol{F}'_2$; autrement dit, on veut montrer que le vecteur $\boldsymbol{M}$ est perpendiculaire au plan de $\boldsymbol{F}_1$ et $-\boldsymbol{F}'_2$, a pour module Fh et est orienté de telle façon qu'en se plaçant en son extrémité, on voie le plan tourner dans le sens antihoraire sous l'action des forces $\boldsymbol{F}_1$ et $-\boldsymbol{F}'_2$.

Le triangle BCA et le triangle formé par les vecteurs $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}_1$ sont semblables, parce que les côtés $\boldsymbol{M}_1$ et $\boldsymbol{M}_2$ sont proportionnels aux côtés AB et CA :

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{Fh_1}{Fh_2} = \frac{h_1}{h_2},$$

et les angles BAC et $\widehat{(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}_1)}$ sont égaux (leurs côtés sont réciproquement perpendiculaires). Par similitude des triangles

$$\frac{M}{M_1} = \frac{h}{h_1},$$

d'où

$$M = \frac{h}{h_1} M_1 = \frac{h}{h_1} Fh_1 = Fh.$$

Ensuite, puisque $\boldsymbol{M}_1 \perp \boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{M}_2 \perp \boldsymbol{F}_1$, le plan des vecteurs $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ est perpendiculaire à $\boldsymbol{F}_1$, d'où $\boldsymbol{M} \perp \boldsymbol{F}_1$. D'autre part, $\boldsymbol{M}_1 \perp$ $\perp BA$ et les angles CBA et $\widehat{(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}_1)}$ sont égaux (angles entre côtés homologues dans les triangles semblables), d'où $\boldsymbol{M} \perp BC$. Il s'ensuit que le vecteur $\boldsymbol{M}$ est perpendiculaire à $\boldsymbol{F}_1$ et à BC, c'est-à-dire perpendiculaire au plan qui contient $\boldsymbol{F}_1$ et $-\boldsymbol{F}'_2$.

Enfin, en regardant la figure 5.5, on remarque qu'en se plaçant à l'extrémité du vecteur $\boldsymbol{M}$, on voit le plan tourner dans le sens antihoraire sous l'action des forces $\boldsymbol{F}_1$ et $-\boldsymbol{F}'_2$.

Ainsi donc, le vecteur $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2$ est bien égal au vecteur moment du couple résultant. En d'autres termes, le vecteur moment du couple résultant est égal à la somme géométrique des vecteurs moments des couples composants. Le théorème est démontré.

S'il s'agit de faire la composition de plusieurs couples situés d'une façon arbitraire dans l'espace, on cherche le couple résultant unique en appliquant successivement la règle de composition de deux couples démontrée ci-dessus. De même que pour la recherche de la résultante de plusieurs forces, le moyen le plus facile de déterminer le moment du couple résultant est la règle du polygone: *le vecteur moment du couple résultant est le vecteur fermant le polygone construit sur les vecteurs moments des couples à composer.*

La condition d'équilibre des couples s'énonce comme suit: *les couples situés d'une façon arbitraire dans l'espace se trouvent en équilibre si la somme géométrique de leurs vecteurs moments est égale à zéro.*

Si les couples sont disposés dans un même plan ou dans des plans parallèles, la condition d'équilibre énoncée ci-dessus entraîne que la somme algébrique de leurs moments doit être égale à zéro (voir ch. II, fin du nº 2.4).

§ 2. Réduction d'un système de forces quelconque à un centre donné

2.1. Méthode de Poinsot. Résultante générale et moment résultant. Rappelons les opérations qu'on peut effectuer sur les forces appliquées au solide en vertu des axiomes de la statique (ch. I, nºs 2.4 à 2.6):

a) Transporter les forces le long de leur direction.

b) Faire la composition des forces appliquées en un point d'après la règle du polygone.

c) Ajouter ou supprimer un système de forces équilibré.

Deux systèmes de forces réductibles l'un à l'autre par les opérations élémentaires a), b), c) ont été appelés équivalents. Nous nous proposons maintenant d'obtenir un système de forces équivalent au système donné, sous sa forme la plus élémentaire. Par analogie au cas plan (ch. III, nº 1.2), nous utiliserons à cet effet, dans le cas général, la méthode de Poinsot de réduction du système de forces à une force et un couple.

Soient trois forces $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ appliquées en trois points A_1, A_2, A_3 et non coplanaires en général (fig. 5.6). Prenons un point arbitraire O et transférons en ce point les forces $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ en utilisant le lemme sur la réduction de la force donnée à un point arbitraire (ch. III, nº 1.1). Nous obtenons un système de trois forces $\boldsymbol{F}'_1$, $\boldsymbol{F}'_2$, $\boldsymbol{F}'_3$ appliquées

en O et de trois couples associés F_1, $-F_1'$; F_2, $-F_2'$; F_3, $-F_3'$ de vecteurs moments respectifs M_1, M_2, M_3.

Faisant la somme géométrique des forces F_1', F_2', F_3' appliquées au point O, nous obtenons la *résultante générale* du système de forces R':

$$R' = F_1' + F_2' + F_3' = F_1 + F_2 + F_3 = \sum F_\nu. \quad (5.10)$$

La résultante générale est appliquée, elle aussi, au point O.

Faisant la somme géométrique de tous les vecteurs moments des couples associés, nous obtenons le *vecteur moment M_O du couple ré-*

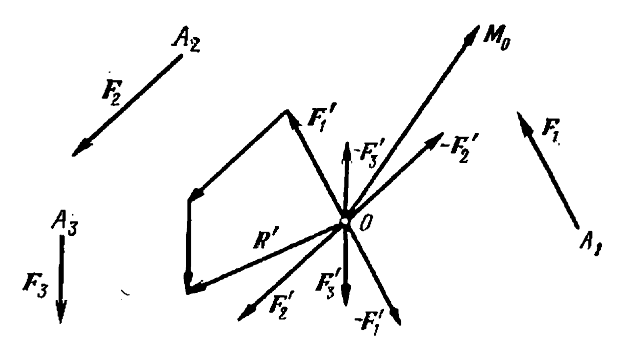


Fig. 5.6

sultant P, $-P'$, ou *moment résultant* du système de forces donné:

$$M_O = M_1 + M_2 + M_3 = \sum M_\nu. \quad (5.11)$$

Puisque le vecteur moment du couple associé est égal au vecteur moment de la force par rapport au centre de réduction (voir (5.9)), on a

$$M_O = \mathrm{Mom}_O\, F_1 + \mathrm{Mom}_O\, F_2 + \mathrm{Mom}_O\, F_3 = \sum \mathrm{Mom}_O\, F_\nu. \quad (5.12)$$

Tout ce qui vient d'être dit à propos de trois forces reste valable pour n forces. Ainsi donc, tout système de forces situées d'une façon arbitraire dans l'espace se laisse réduire, dans le cas général, à une résultante appliquée au centre de réduction, équipollente à la résultante générale, et à un couple résultant de vecteur moment M_O (moment résultant) égal *) à la somme géométrique des vecteurs moments de toutes les forces données par rapport au centre de réduction.

Nous ne voyons pas sur la figure 5.6 le couple résultant P, $-P'$ lui-même mais seulement son vecteur moment M_O (moment résultant du système de forces donné). En effet, nous avons vu dans le

*) N'oublions pas que le vecteur moment d'un couple est un vecteur libre.

n° 1.4 que le vecteur moment ne caractérise pas un couple de forces unique mais une infinité de couples équivalents situés dans des plans parallèles. De ce fait, le couple résultant ne se définit pas de façon univoque mais à une équivalence près.

Déterminons analytiquement le module et la direction de la résultante générale et du moment résultant d'un système quelconque de n forces par rapport à un centre de réduction O.

Plaçons l'origine des coordonnées au centre de réduction; le point d'application de la force $\boldsymbol{F}_\nu$ aura comme coordonnées x_ν, y_ν, z_ν; les projections de $\boldsymbol{F}_\nu$ sur les axes de coordonnées seront égales à X_ν, Y_ν, Z_ν ($\nu = 1, \ldots, n$). Projetons (5.10) sur les axes de coordonnées: nous obtenons les projections de la résultante générale $\boldsymbol{R}'$ sur les axes Ox, Oy, Oz:

$$R'_x = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu, \quad R'_y = \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu, \quad R'_z = \sum_{\nu=1}^{n} Z_\nu. \tag{5.13}$$

Le module de la résultante générale sera déterminé à partir de la formule

$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y + R'^2_z}, \tag{5.14}$$

et les cosinus des angles entre la résultante générale et les axes de coordonnées, par les formules

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{R}', Ox}) = \frac{R'_x}{R'}, \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{R}', Oy}) = \frac{R'_y}{R'}, \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{R}', Oz}) = \frac{R'_z}{R'}. \tag{5.15}$$

Projetant (5.12) sur les axes de coordonnées et faisant intervenir la relation (5.6) entre les moments de la force par rapport à un point et par rapport à un axe passant par ce point (voir n° 1.2), on obtient

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{mom}_{Ox} \boldsymbol{F}_\nu, \\ M_{Oy} &= \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{mom}_{Oy} \boldsymbol{F}_\nu, \\ M_{Oz} &= \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{mom}_{Oz} \boldsymbol{F}_\nu, \end{aligned} \tag{5.16}$$

ou, en exprimant les moments de la force par rapport à l'axe à l'aide des formules (5.8),

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= \sum_{\nu=1}^{n} (y_\nu Z_\nu - z_\nu Y_\nu), \\ M_{Oy} &= \sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu X_\nu - x_\nu Z_\nu), \\ M_{Oz} &= \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu Y_\nu - y_\nu X_\nu). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Le module du moment résultant et les cosinus des angles entre le moment résultant et les axes de coordonnées seront déterminés par les formules

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}, \qquad (5.18)$$

$$\cos(\widehat{M_O, Ox}) = \frac{M_{Ox}}{M_O}, \quad \cos(\widehat{M_O, Oy}) = \frac{M_{Oy}}{M_O}, \quad \cos(\widehat{M_O, Oz}) = \frac{M_{Oz}}{M_O}. \qquad (5.19)$$

2.2. Changement du moment résultant en fonction du centre de réduction. Invariants d'un système de forces. De même que pour un système plan, la résultante générale d'un système de forces quelconque reste inchangée quand on choisit un nouveau centre de réduction, car elle est égale à la somme géométrique des vecteurs forces composantes du système. Invariante par tout changement du centre de réduction, *la résultante générale est* donc *un invariant* du système de forces donné.

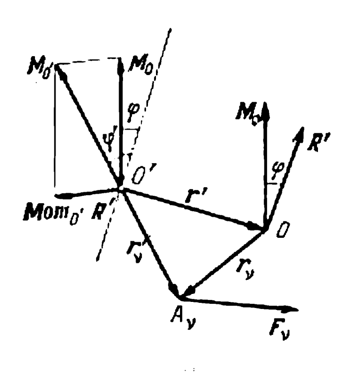


Fig. 5.7

Voyons ce que devient le moment résultant d'un système de forces quelconque quand on passe à un nouveau centre de réduction. Soit un système de forces quelconque réduit à une résultante $\boldsymbol{R}'$ appliquée en un point O et à un couple résultant dont le vecteur moment est égal au moment résultant $\boldsymbol{M}_O$ par rapport au même point (fig. 5.7). Choisissons un nouveau centre de réduction O'. Le rayon vecteur de l'ancien centre de réduction par rapport à O' sera noté $\boldsymbol{r}'$, et le rayon vecteur du point d'application A_ν de la force $\boldsymbol{F}_\nu$, $\boldsymbol{r}'_\nu$. On a alors

$$\boldsymbol{r}'_\nu = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}_\nu.$$

Le vecteur moment de la force $\boldsymbol{F}_\nu$ par rapport au nouveau centre de réduction O' est égal, en vertu de (5.2), à

$$\mathbf{Mom}_{O'}\boldsymbol{F}_\nu = [\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}_\nu, \boldsymbol{F}_\nu] =$$
$$= [\boldsymbol{r}', \boldsymbol{F}_\nu] + [\boldsymbol{r}_\nu, \boldsymbol{F}_\nu] = [\boldsymbol{r}', \boldsymbol{F}_\nu] + \mathbf{Mom}_O \boldsymbol{F}_\nu. \qquad (5.20)$$

Faisons la somme des vecteurs moments de toutes les forces du système par rapport à O' : nous obtenons le moment résultant par rapport au nouveau centre de réduction:

$$\boldsymbol{M}_{O'} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{Mom}_{O'} \boldsymbol{F}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} [\boldsymbol{r}', \boldsymbol{F}_\nu] + \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{Mom}_O \boldsymbol{F}_\nu. \qquad (5.21)$$

Puisque le vecteur $\boldsymbol{r}'$ reste le même pour toutes les $\boldsymbol{F}_\nu$, le premier terme de la somme peut s'écrire comme suit:

$$\sum_{\nu=1}^{n} [\boldsymbol{r}', \boldsymbol{F}_\nu] = \left[\boldsymbol{r}', \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{F}_\nu\right] = [\boldsymbol{r}', \boldsymbol{R}'] = \mathbf{Mom}_{O'} \boldsymbol{R}',$$

ce qui veut dire que le premier terme de (5.21) est le vecteur moment par rapport à O' de la résultante générale $\boldsymbol{R}'$ appliquée en O; quant au second terme de (5.21), c'est le moment résultant de toutes les forces du système par rapport au point O:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{Mom}_O \boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{M}_O.$$

Il vient définitivement

$$\boldsymbol{M}_{O'} = \mathbf{Mom}_{O'} \boldsymbol{R}' + \boldsymbol{M}_O, \tag{5.22}$$

c'est-à-dire que le *moment résultant* d'un système de forces quelconque par rapport à un *nouveau* centre de réduction est égal à son *moment résultant* par rapport à l'*ancien* centre de réduction *augmenté du vecteur moment* par rapport au *nouveau* centre *de la résultante générale* appliquée à l'*ancien* centre.

En faisant la projection de (5.22) sur la direction de la résultante générale et en nous rappelant que $\mathbf{Mom}_{O'} \boldsymbol{R}' \perp \boldsymbol{R}'$, nous obtenons l'égalité

$$M_{O'} \cos \varphi' = M_O \cos \varphi. \tag{5.23}$$

La projection du moment résultant du système de forces donné sur la direction de sa résultante générale est une constante, invariante par le choix du centre de réduction.

Cette propriété peut être formulée autrement: le produit scalaire du moment résultant du système de forces par la résultante générale de ce système est une constante, invariante par le choix du centre de réduction.

En effet, multiplions les deux membres de l'égalité (5.23) par R'; il vient

$$R' M_{O'} \cos \varphi' = R' M_O \cos \varphi. \tag{5.24}$$

Or, le produit des modules de deux vecteurs par le cosinus de l'angle entre ces derniers est le produit scalaire des vecteurs.

Tout système de forces se caractérise donc par deux quantités invariantes par le choix du centre de réduction:

— la résultante générale du système de forces;

— la projection du moment résultant sur la direction de la résultante générale (ou produit scalaire de la résultante générale par le moment résultant).

La première quantité est l'*invariant vectoriel*, et la seconde, l'*invariant scalaire*.

2.3. Système réductible à un couple unique. Nous avons vu dans le nº 2.1 qu'un système de forces situées d'une façon arbitraire dans l'espace se laisse réduire dans le cas général à une force résultante, équipollente à la résultante générale $\boldsymbol{R}'$, et à un couple résultant dont le vecteur moment est égal au moment résultant $\boldsymbol{M}_O$ du système par rapport au centre de réduction. Considérons les cas particuliers qui peuvent se présenter. Supposons d'abord que la résultante générale soit égale à zéro : le polygone de forces données est fermé et le moment résultant est non nul,

$$\boldsymbol{R}' = 0, \quad \boldsymbol{M}_O \neq 0.$$

Dans ce cas le système de forces est équivalent à un couple résultant $\boldsymbol{P}$, $-\boldsymbol{P}'$ dont le vecteur moment $\boldsymbol{M}_O$ se définit par (5.12) :

$$\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n\} \backsim \{\boldsymbol{P}, -\boldsymbol{P}'\}.$$

Il s'agit d'un système de forces quelconque réductible à un couple unique.

Choisissons un nouveau centre de réduction O' (fig. 5.7) : le moment résultant reste inchangé en vertu de la formule (5.22), si bien que

$$\boldsymbol{M}_{O'} = \boldsymbol{M}_O.$$

Ce fait résulte également d'un raisonnement tout aussi élémentaire. Etant vecteur libre, le vecteur moment $\boldsymbol{M}_O$ du couple résultant est susceptible de s'appliquer à un point quelconque. De même, le couple résultant lui-même se laisse réaliser en un plan quelconque perpendiculaire au vecteur moment $\boldsymbol{M}_O$.

2.4. Système réductible à une force unique. Théorème de Varignon. Le deuxième cas particulier est celui où la résultante générale est non nulle, $\boldsymbol{R}' \neq 0$. Trois possibilités se présentent alors :

a) Pour le centre de réduction choisi O le moment résultant est égal à zéro :

$$\boldsymbol{R}' \neq 0, \quad \boldsymbol{M}_O = 0.$$

Dans ce cas le système de forces est équivalent à une force (résultante unique $\boldsymbol{R}$) équipollente à la résultante générale et appliquée au centre de réduction O :

$$\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n\} \backsim \boldsymbol{R}.$$

Autrement dit, si le système de forces se réduit à un centre O sans donner naissance à un couple résultant, il est équivalent à une force résultante unique :

$$\boldsymbol{R} = \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{F}_\nu.$$

b) Pour le centre de réduction choisi O le moment résultant est perpendiculaire à la résultante générale:

$$\boldsymbol{R}' \neq 0, \quad \boldsymbol{M}_O \neq 0, \quad \boldsymbol{M}_O \perp \boldsymbol{R}' \quad (\boldsymbol{M}_O\boldsymbol{R}' = 0).$$

Montrons que dans ce cas le système de forces se réduit aussi à une force unique, qui ne passe cependant pas par le point O. La résultante générale $\boldsymbol{R}'$ est contenue par hypothèse dans un plan perpendiculaire au moment résultant $\boldsymbol{M}_O$ par rapport au point O. On peut donc réaliser le couple résultant de façon que l'une de ses composantes, $-\boldsymbol{R}'$, soit directement opposée à $\boldsymbol{R}'$ (fig. 5.8). Le bras de levier h du couple résultant se déduit de l'égalité

$$M_O = R'h,$$

d'où

$$h = \frac{M_O}{R'}.$$

Fig. 5.8

La seconde force $\boldsymbol{R}$ du couple résultant $\boldsymbol{R}$, $-\boldsymbol{R}'$ sera appliquée alors au point O', extrémité de la perpendiculaire de longueur h élevée en O au plan de $\boldsymbol{M}_O$ et $\boldsymbol{R}'$ dans un sens tel qu'en se plaçant à l'extrémité du vecteur $\boldsymbol{M}_O$, on voie tourner le plan dans le sens antihoraire autour du point O sous l'action de la force $\boldsymbol{R}$ (voir fig. 5.8). Supprimons les forces $\boldsymbol{R}'$ et $-\boldsymbol{R}'$ appliquées en O: le système de forces s'avère équivalent à une force unique,

$$\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n\} \backsim \boldsymbol{R},$$

c'est-à-dire à la résultante *appliquée en O'*. Cette dernière est comme précédemment équipollente à la résultante générale:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}' = \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{F}_\nu,$$

mais sa ligne d'action ne passe plus par le point O.

Ainsi donc, pour qu'un système de forces quelconque soit réductible à une force unique, il suffit que son moment résultant soit nul ou perpendiculaire à la résultante générale. Dans les deux cas l'invariant scalaire (voir la fin du n° 2.2) est égal à zéro. Nous verrons dans le n° 2.5 que cette condition est non seulement suffisante mais aussi nécessaire pour l'existence d'une résultante unique.

Démontrons le t h é o r è m e d e V a r i g n o n sur le moment de la résultante d'un système de forces quelconque (nous l'avons déjà démontré pour un système plan dans le ch. III, n° 1.4) :

Le vecteur moment de la résultante d'un système de forces donné (si elle existe) par rapport à un point quelconque est égal à la somme des vecteurs moments de toutes les forces du système par rapport à ce même point.

Démonstration. Soit un système de forces réductible à une force résultante unique $\boldsymbol{R}$ appliquée en un point O. Choisissons un point arbitraire A. Selon le théorème de changement du moment résultant en fonction du centre de réduction, le moment résultant $\boldsymbol{M}_A$ de toutes les forces du système par rapport au point A s'écrira par analogie à (5.22):

$$\boldsymbol{M}_A = \mathbf{Mom}_A \boldsymbol{R} + \boldsymbol{M}_O. \tag{5.25}$$

Puisque le moment résultant $\boldsymbol{M}_O$ en O est égal à zéro (le système étant réductible à une force unique en O), on a

$$\boldsymbol{M}_A = \mathbf{Mom}_A \boldsymbol{R}. \tag{5.26}$$

En vertu de la formule (5.12) le moment résultant $\boldsymbol{M}_A$ est la somme des vecteurs moments de toutes les forces du système par rapport au point A:

$$\boldsymbol{M}_A = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{Mom}_A \boldsymbol{F}_\nu.$$

Il vient définitivement

$$\mathbf{Mom}_A \boldsymbol{R} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{Mom}_A \boldsymbol{F}_\nu, \tag{5.27}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Reste à considérer la troisième éventualité pour $\boldsymbol{R}' \neq \mathbf{0}$, à savoir le cas où le moment résultant $\boldsymbol{M}_O$ n'est pas perpendiculaire à la résultante générale $\boldsymbol{R}'$.

2.5. Système réductible à un torseur. Axe central. Nous avons vu dans les n[os] 2.3 et 2.4 qu'un système composé de n forces est équivalent, suivant le cas, soit à un couple unique si sa résultante générale est égale à zéro, soit à une force unique (la résultante) si son moment résultant est nul ou perpendiculaire à la résultante générale. Voyons maintenant comment se présente le système le plus élémentaire équivalent à un système de n forces situées d'une façon arbitraire dans l'espace dans le cas général, c'est-à-dire lorsque la résultante générale et le moment résultant sont tous les deux non nuls et font entre eux un angle $\varphi \neq 90°$:

$$0 \leqslant \varphi < 90°, \quad \text{ou} \quad 90° < \varphi \leqslant 180°.$$

Soit un système de n forces réductible en un point O à une force résultante $\boldsymbol{R}'$ et à un couple résultant dont le vecteur moment est égal au moment résultant $\boldsymbol{M}_O$; la résultante et le moment forment un angle $\varphi \neq 90°$ (fig. 5.9). Décomposons le vecteur $\boldsymbol{M}_O$ en deux vecteurs: $\boldsymbol{M}'_O$ parallèle à $\boldsymbol{R}'$ et $\boldsymbol{M}''_O$ perpendiculaire à $\boldsymbol{R}'$. Dans le plan contenant la résultante générale $\boldsymbol{R}'$ et perpendiculaire à $\boldsymbol{M}''_O$, substituons à $\boldsymbol{R}'$ et au couple de vecteur moment $\boldsymbol{M}''_O$ une force unique $\boldsymbol{R}$ équivalente et appliquée en un point O' (voir n° 2.4); portons le

vecteur M'_O en O'. Ainsi donc, le système de n forces considéré est équivalent à une force $\boldsymbol{R}$ et à un couple $\boldsymbol{P}$, $-\boldsymbol{P}'$ qui agit dans un plan perpendiculaire à $\boldsymbol{R}$ (fig. 5.10).

L'ensemble d'une force et d'un couple dont le plan d'action est perpendiculaire à la force est désigné sous le terme de *torseur*.

Un système de forces quelconque *se réduit* donc *à un torseur dans le cas général* où sa résultante générale est non nulle et non perpendiculaire au moment résultant. Le torseur est la forme la plus élé-

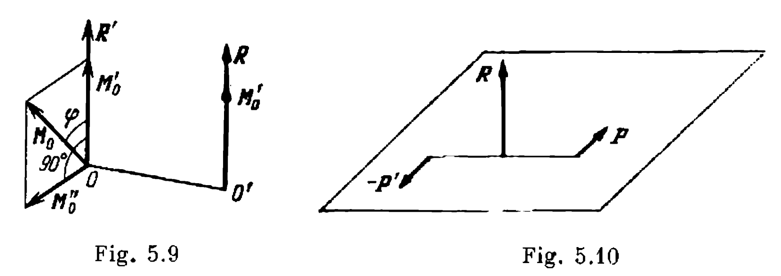


Fig. 5.9

Fig. 5.10

mentaire à laquelle puisse être réduit un système de forces quelconque dans le cas général. La ligne d'action de la force faisant partie du torseur porte le nom d'*axe central* du système de forces donné (*axe du torseur*).

On montre que le moment résultant du système de forces par rapport à tout point de l'axe central présente une valeur minimale.

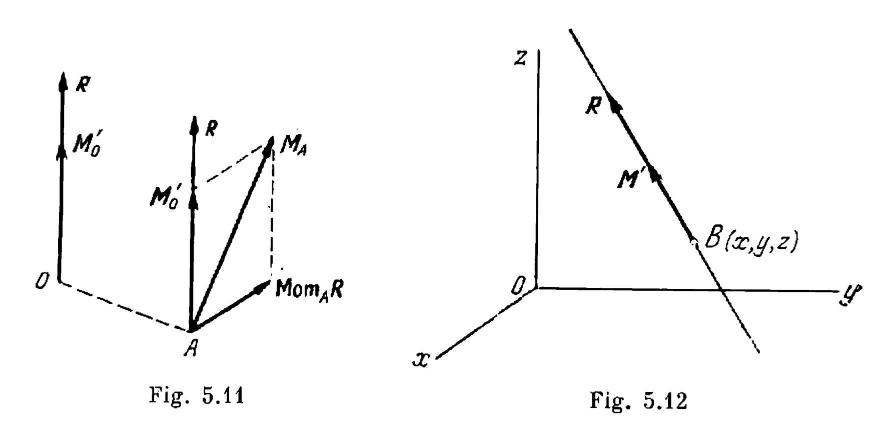


Fig. 5.11

Fig. 5.12

En effet, prenons un point A n'appartenant pas à l'axe central et transférons en ce point la force $\boldsymbol{R}$ et le couple de vecteur moment M'_O : nous obtenons la même force $\boldsymbol{R}$ mais un vecteur moment différent M_A (fig. 5.11). Ce dernier est égal à la somme géométrique de M'_O et du vecteur moment du couple associé égal au vecteur moment

de $\boldsymbol{R}$ par rapport à A (voir formule (5.22)) :

$$\boldsymbol{M}_A = \mathbf{Mom}_A \boldsymbol{R} + \boldsymbol{M}'_O.$$

Puisque $\boldsymbol{M}'_O \perp \mathbf{Mom}_A \boldsymbol{R}$, on a

$$M_A = \sqrt{M_O'^2 + (\mathrm{Mom}_A \boldsymbol{R})^2} > M'_O. \qquad (5.28)$$

Etablissons les formules qui permettent de déterminer les éléments du torseur en fonction des projections X_ν, Y_ν, Z_ν des forces du système sur les axes de coordonnées et des coordonnées x_ν, y_ν, z_ν de leurs points d'application ($\nu = 1, 2, \ldots, n$).

Le module de la force $\boldsymbol{R}$ équipollente à la résultante générale $\boldsymbol{R}'$ du système de forces se laisse calculer d'après la formule connue

$$R = \sqrt{R_x'^2 + R_y'^2 + R_z'^2}$$

dans laquelle

$$R'_x = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu, \quad R'_y = \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu, \quad R'_z = \sum_{\nu=1}^{n} Z_\nu.$$

Le module du vecteur moment $\boldsymbol{M}'_O$ est égal à la valeur absolue de la projection du moment résultant sur la direction de la résultante générale, c'est-à-dire à

$$M'_O = |M_O \cos\varphi| = \frac{1}{R'} M_O R' |\cos\varphi| = \frac{1}{R'} |(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{R}')|, \qquad (5.29)$$

où $(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{R}')$ est le produit scalaire des vecteurs $\boldsymbol{M}_O$ et $\boldsymbol{R}'$.

Puisque la résultante générale $\boldsymbol{R}'$ et le produit scalaire du moment résultant par la résultante générale sont des invariants statiques, les modules R et M'_O de la force et du vecteur moment du couple qui composent le torseur sont invariants par le choix du centre de réduction. Dans le texte qui suit, nous écrirons donc partout $\boldsymbol{M}'$ au lieu de $\boldsymbol{M}'_O$, car nous pouvons omettre l'indice O.

Portant dans (5.29) l'expression du produit scalaire en fonction des projections des vecteurs à multiplier, on obtient

$$M' = \frac{1}{R'} |M_{Ox} R'_x + M_{Oy} R'_y + M_{Oz} R'_z|, \qquad (5.30)$$

où M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} sont les sommes des moments de toutes les forces du système par rapport aux axes Ox, Oy, Oz.

Etablissons maintenant les équations de l'axe central.

Plaçons l'origine des coordonnées en un point quelconque O non situé sur l'axe central (fig. 5.12). Choisissons ensuite un point B de coordonnées x, y, z situé sur l'axe central et portons en ce point les origines du vecteur force $\boldsymbol{R}$ et du vecteur moment du couple $\boldsymbol{M}'$ formant torseur. Mettons en équation le moment résultant du système de forces par rapport au point O en faisant intervenir la relation entre

les moments en cas de changement du centre de réduction (formule (5.22)):

$$\boldsymbol{M}_O = \mathbf{Mom}_O \boldsymbol{R} + \boldsymbol{M}'.$$

En termes de projections sur les axes de coordonnées, on a

$$M_{Ox} = \text{mom}_{Ox}\boldsymbol{R} + M'_x,$$
$$M_{Oy} = \text{mom}_{Oy}\boldsymbol{R} + M'_y,$$
$$M_{Oz} = \text{mom}_{Oz}\boldsymbol{R} + M'_z,$$

d'où

$$M'_x = M_{Ox} - \text{mom}_{Ox}\boldsymbol{R},$$
$$M'_y = M_{Oy} - \text{mom}_{Oy}\boldsymbol{R}, \qquad (5.31)$$
$$M'_z = M_{Oz} - \text{mom}_{Oz}\boldsymbol{R}.$$

Les moments de $\boldsymbol{R}$ par rapport aux axes de coordonnées se laissent déterminer par les formules (5.8):

$$\text{mom}_{Ox}\boldsymbol{R} = yR'_z - zR'_y,$$
$$\text{mom}_{Oy}\boldsymbol{R} = zR'_x - xR'_z, \qquad (5.32)$$
$$\text{mom}_{Oz}\boldsymbol{R} = xR'_y - yR'_x.$$

L'axe central est le lieu géométrique des centres de réduction pour lesquels la résultante générale $\boldsymbol{R}'$ est parallèle au vecteur moment $\boldsymbol{M}'$. Par conséquent, les projections de ces vecteurs sur les axes de coordonnées sont proportionnelles:

$$\frac{M'_x}{R'_x} = \frac{M'_y}{R'_y} = \frac{M'_z}{R'_z}.$$

Portant dans ces proportions les valeurs de M'_x, M'_y, M'_z tirées de (5.31) et utilisant (5.32), on obtient les équations de l'axe central:

$$\frac{M_{Ox} - (yR'_z - zR'_y)}{R'_x} = \frac{M_{Oy} - (zR'_x - xR'_z)}{R'_y} = \frac{M_{Oz} - (xR'_y - yR'_x)}{R'_z}. \qquad (5.33)$$

Posant dans ces équations successivement $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, on obtient comme solutions les coordonnées des points en lesquels l'axe central vient percer les plans de coordonnées.

E x e m p l e 5.1. Six forces $P_1 = 3$ kN, $P_2 = 4$ kN, $P_3 = 2$ kN, $P_4 = 5$ kN, $P_5 = 1$ kN, $P_6 = 6$ kN agissent suivant les arêtes d'un parallélépipède rectangle de longueurs 4 m, 8 m, 6 m respectivement. On demande de mettre ce système de forces sous forme élémentaire et de déterminer les coordonnées x, y du point en lequel l'axe central du système vient percer le plan Oxy (fig. 5.13).

S o l u t i o n. Pour mettre le système de forces sous forme élémentaire, cherchons tout d'abord les projections de sa résultante générale sur les axes de coordonnées et calculons la somme des moments de toutes les forces par rapport

à chacun des axes de coordonnées:

$$R'_x = P_3 + P_4 - P_6 = 1 \text{ kN}, \quad R'_y = 0, \quad R'_z = P_1 + P_2 - P_5 = 6 \text{ kN},$$

$$M_{Ox} = -P_5 \cdot 8 = -8 \text{ kN}\cdot\text{m *)},$$

$$M_{Oy} = -P_2 \cdot 4 + P_3 \cdot 6 + P_4 \cdot 6 + P_5 \cdot 4 = 30 \text{ kN}\cdot\text{m},$$

$$M_{Oz} = -P_4 \cdot 8 + P_6 \cdot 8 = 8 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

Ainsi donc, ni la résultante générale ni le vecteur résultant ne sont égaux à zéro. Pour vérifier si le système en question ne se laisse pas réduire à une force unique, il ne reste qu'à voir si la résultante générale n'est pas perpendiculaire au moment résultant. A cet effet, exprimons le produit scalaire de la résultante générale par le moment résultant en fonction des projections des vecteurs à multiplier:

$$(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{M}_O) = R'_x M_{Ox} + R'_y M_{Oy} + R'_z M_{Oz} = 40 \neq 0.$$

Ainsi donc, la résultante générale et le moment résultant ne sont ni nuls ni perpendiculaires. Cela revient à dire que le système de forces se réduit à un torseur. Calculons la force $\boldsymbol{R}$ et le vecteur moment $\boldsymbol{M}'$ du couple qui composent le torseur. Le module de la force est égal à

$$R = R' = \sqrt{R_x'^2 + R_y'^2 + R_z'^2} = 6{,}08 \text{ kN},$$

et le module du vecteur moment M' du couple est égal, conformément à (5.30), à

$$M' = \frac{1}{6{,}08} \left| -8 \cdot 1 + 30 \cdot 0 + 8 \cdot 6 \right| = 6{,}58 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

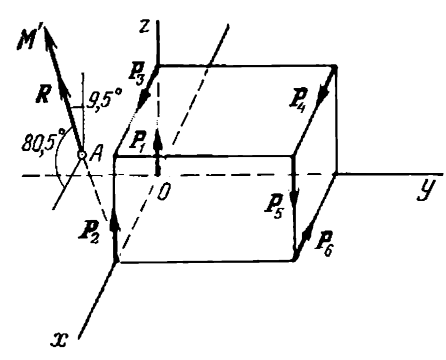


Fig. 5.13

Puisque la direction de l'axe central se confond avec celle de la résultante générale, les cosinus des angles formés par l'axe central et les axes de coordonnées se déterminent d'après les formules (5.15):

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{R}, Ox}) = \frac{R'_x}{R'} = \frac{1}{6{,}08} = 0{,}164, \quad (\widehat{\boldsymbol{R}, Ox}) = 80{,}5°,$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{R}, Oy}) = \frac{R'_y}{R'} = \frac{0}{6{,}08} = 0, \quad (\widehat{\boldsymbol{R}, Oy}) = 90°,$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{R}, Oz}) = \frac{R'_z}{R'} = \frac{6}{6{,}08} = 0{,}987, \quad (\widehat{\boldsymbol{R}, Oz}) = 9{,}5°.$$

L'axe central est contenu dans un plan perpendiculaire à l'axe Oy et fait un angle de 80,5° avec le plan Oxy.

Pour déterminer les coordonnées du point de rencontre A de l'axe central avec le plan Oxy, mettons $z = 0$ dans les équations de l'axe central (5.33):

$$\frac{-8-(y \cdot 6 - 0)}{1} = \frac{30-(0-x \cdot 6)}{0} = \frac{8-(0-y \cdot 1)}{6}.$$

*) 1 kilonewton-mètre est égal à 1000 newtons-mètres (ch. I, n° 2. 3).

Les coordonnées x et y se définiront donc par les deux équations

$$30 + 6x = 0, \qquad 6(-8 - 6y) = 8 + y.$$

De ces équations

$$x_A = -5 \text{ m}, \quad y_A = -\frac{56}{37} \text{ m}.$$

L'orientation du torseur dans l'espace est illustrée sur la figure 5.13.

§ 3. Conditions d'équilibre d'un système de forces quelconque

3.1. Ecriture vectorielle et analytique des conditions d'équilibre. Dans le dernier cas particulier de la réduction où la résultante générale $\boldsymbol{R}'$ et le moment résultant $\boldsymbol{M}_O$ sont nuls, le système de forces est en équilibre. En effet, la nullité de la résultante générale veut dire que toutes les forces appliquées au centre de réduction se font équilibre, et la nullité du moment résultant, que tous les couples associés se font équilibre. Si par contre la résultante générale et le moment résultant ne s'annulent pas simultanément, le système de forces est équivalent soit à une force unique, soit à un couple unique, soit à une force et un couple à la fois : autrement dit, le système n'est pas en équilibre.

Ainsi donc, pour que le système de forces appliquées à un solide soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante générale du système et le moment résultant par rapport à un centre de réduction quelconque soient égaux à zéro.

Sous forme vectorielle les conditions d'équilibre s'écriront comme suit :

$$\boldsymbol{R}' = 0, \quad \boldsymbol{M}_O = 0. \qquad (5.34)$$

Le moment résultant d'un système en équilibre étant nul par rapport à tout centre de réduction (voir formule (5.22)), on écrira $\boldsymbol{M}$ au lieu de $\boldsymbol{M}_O$.

Fig. 5.14

Pour donner un exemple de validité des conditions d'équilibre sous forme vectorielle, nous démontrerons la remarque faite en fin du n° 2.6 du premier chapitre, à savoir : trois forces qui se font équilibre sont nécessairement coplanaires.

Choisissons un point O sur la ligne d'action de la force $\boldsymbol{F}_3$ (fig. 5.14). En vertu de la deuxième condition (5.34), on a

$$\boldsymbol{M}_O = \mathbf{Mom}_O\ \boldsymbol{F}_1 + \mathbf{Mom}_O\ \boldsymbol{F}_2 = 0,$$

d'où

$$\mathbf{Mom}_O\ \boldsymbol{F}_2 = -\mathbf{Mom}_O\ \boldsymbol{F}_1.$$

Cela revient à dire que les vecteurs moments $\mathbf{Mom}_O\ \boldsymbol{F}_2$ et $\mathbf{Mom}_O\ \boldsymbol{F}_1$ sont portés par une même droite mais orientés dans les sens opposés. En vertu de la défi-

nition du vecteur moment (nº 1.1), le plan Π_1 contenant le vecteur F_1 et le point O doit se confondre avec le plan Π_2 contenant F_2 et O. Cela est vrai pour n'importe quel point O choisi sur la ligne d'action de la force F_3, ce qui achève la démonstration de la remarque.

Les modules des vecteurs $\boldsymbol{R}'$ et $\boldsymbol{M}$ sont déterminés en fonction de leurs projections, à l'aide des formules

$$R' = \sqrt{R_x'^2 + R_y'^2 + R_z'^2}, \quad M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \tag{5.35}$$

Ici R_x', R_y', R_z' sont les projections de la résultante générale sur les axes Ox, Oy, Oz, et M_x, M_y, M_z, celles du moment résultant sur les mêmes axes.

La nullité des vecteurs $\boldsymbol{R}'$ et $\boldsymbol{M}$ est conditionnée par les six égalités suivantes:

$$\begin{aligned}
R_x' &= X_1 + X_2 + \ldots + X_n \equiv \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu = 0,\\
R_y' &= Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \equiv \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu = 0,\\
R_z' &= Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n \equiv \sum_{\nu=1}^{n} Z_\nu = 0,\\
M_x &= \mathrm{mom}_{Ox} \boldsymbol{F}_1 + \mathrm{mom}_{Ox} \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \mathrm{mom}_{Ox} \boldsymbol{F}_n \equiv\\
&\equiv \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{mom}_{Ox} \boldsymbol{F}_\nu = 0,\\
M_y &= \mathrm{mom}_{Oy} \boldsymbol{F}_1 + \mathrm{mom}_{Oy} \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \mathrm{mom}_{Oy} \boldsymbol{F}_n \equiv\\
&\equiv \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{mom}_{Oy} \boldsymbol{F}_\nu = 0,\\
M_z &= \mathrm{mom}_{Oz} \boldsymbol{F}_1 + \mathrm{mom}_{Oz} \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \mathrm{mom}_{Oz} \boldsymbol{F}_n \equiv\\
&\equiv \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{mom}_{Oz} \boldsymbol{F}_\nu = 0.
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Ces égalités sont précisément les *conditions d'équilibre sous forme analytique*.

Ainsi donc, pour qu'un système de forces quelconque appliqué au solide soit en équilibre, il faut et il suffit que s'annulent la somme des projections de toutes les forces sur chaque axe de coordonnées et la somme des moments de toutes les forces par rapport à chaque axe de coordonnées.

Des conditions d'équilibre (5.36) il ressort que dans le cas général d'un système de forces quelconque appliqué au solide, le problème est isostatique toutes les fois que le nombre des forces inconnues

n'est pas supérieur à six. S'il y a plus de six forces inconnues, le problème est hyperstatique et ne peut être résolu par les méthodes de la statique.

3.2. Cas particuliers d'un système de forces quelconque. Examinons les trois cas particuliers suivants.

a) Les forces sont *concourantes*. Plaçons l'origine des coordonnées au point de concours: nous avons alors dans (5.36) $M_x = M_y = M_z \equiv 0$. Restent trois conditions analytiques d'équilibre d'un système de forces concourantes (voir (1.28)):

$$\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} Z_\nu = 0.$$

b) Les forces sont *coplanaires*. Supposons qu'elles soient contenues toutes dans le plan Oxy: nous avons alors dans (5.36) $R'_z \equiv 0$ et $M_x = M_y \equiv 0$ (voir les remarques à la formule (5.3)). Restent trois conditions analytiques d'équilibre du système de forces plan (voir (3.7)):

$$\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{mom}_O \boldsymbol{F}_\nu = 0.$$

En effet, on a dans ce cas $M_z \equiv m_O$ par définition du moment d'une force par rapport à un axe; autrement dit, M_z est égal à la somme algébrique des moments des forces données par rapport au point O.

c) Les forces sont *parallèles* sans être coplanaires. Disposons un axe de coordonnées, par exemple Oz, parallèlement aux forces. Nous avons alors dans (5.36) $R'_x = R'_y \equiv 0$ et $M_z \equiv 0$. Restent trois conditions analytiques d'équilibre d'un système de forces parallèles:

$$\sum_{\nu=1}^{n} Z_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{mom}_{Ox} \boldsymbol{F}_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{mom}_{Oy} \boldsymbol{F}_\nu = 0. \qquad (5.37)$$

Dans chacun des cas a), b), c) le problème reste isostatique toutes les fois que le nombre des forces inconnues appliquées au solide ne dépasse pas trois.

3.3. Equilibre d'un solide à un et à deux points fixes. Considérons l'équilibre d'un solide gêné sollicité par un système de forces dans l'espace.

a) *Solide fixé en un point*. Soit un solide fixé par une articulation sphérique O et sollicité par des forces données $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_m$ (fig. 5.15). Plaçons l'origine des coordonnées en O. Les projections de la réaction $\boldsymbol{R}_O$ de l'articulation sphérique O (voir ch. 1, n° 2.9) sur les axes Ox, Oy, Oz seront notées X_O, Y_O, Z_O. Ecrivons les

conditions d'équilibre (5.36):

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu=1}^{m} P_{\mu x}+X_O=0, \quad \sum_{\mu=1}^{m} P_{\mu y}+Y_O=0, \quad \sum_{\mu=1}^{m} P_{\mu z}+Z_O=0,\\ &\sum_{\mu=1}^{m} \mathrm{mom}_{Ox}\boldsymbol{P}_\mu=0, \quad \sum_{\mu=1}^{m} \mathrm{mom}_{Oy}\boldsymbol{P}_\mu=0, \quad \sum_{\mu=1}^{m} \mathrm{mom}_{Oz}\boldsymbol{P}_\mu=0.\end{aligned} \tag{5.38}$$

Aucune grandeur inconnue n'intervenant dans les trois dernières conditions, celles-ci représentent justement les conditions d'équilibre d'un solide fixé en un point et signifient que $M_x = M_y = M_z = 0$, donc $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$.

Ainsi, pour qu'un solide fixé en un point se trouve en équilibre, il faut et il suffit que soit nul le moment résultant du système de

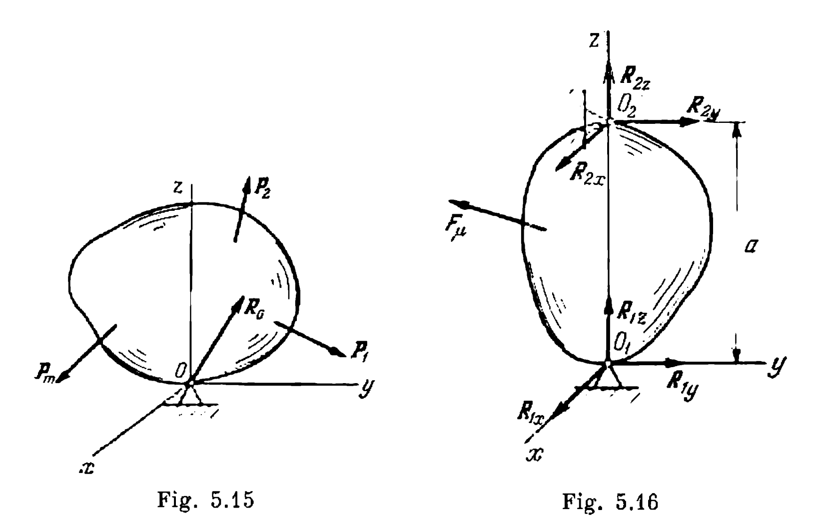


Fig. 5.15 Fig. 5.16

forces appliquées au solide par rapport au point fixe. Autrement dit, l'équilibre du solide fixé en un point exige que le système de forces données soit réductible à une force unique $\boldsymbol{R}$,

$$\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{R}_O, \tag{5.39}$$

passant par le point fixe.

Les trois premières conditions (5.38) renferment les projections inconnues de la réaction $\boldsymbol{R}_O$ et sont des équations d'équilibre dont les solutions se trouvent immédiatement:

$$X_O = -\sum_{\mu=1}^{m} P_{\mu x}, \quad Y_O = -\sum_{\mu=1}^{m} P_{\mu y}, \quad Z_O = -\sum_{\mu=1}^{m} P_{\mu z}.$$

Les égalités obtenues ne sont, au fond, que la traduction de l'égalité vectorielle (5.39) en termes de projections.

b) *Solide fixé en deux points.* Soit un solide fixé en ses deux points O_1, O_2 au moyen d'articulations sphériques et sollicité par des forces $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_m$ (fig. 5.16) ; un corps ainsi fixé ne peut que tourner autour de l'axe passant par ses points fixes O_1 et O_2. On demande de savoir les réactions en O_1 et O_2, ainsi que les conditions imposées aux forces $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_m$ pour que le solide soit en équilibre.

De même que dans le cas plan, il y a intérêt à disposer l'origine et les axes de coordonnées de façon à simplifier autant que possible la forme des équations d'équilibre : les axes seront donc parallèles (ou perpendiculaires) au plus grand nombre possible de forces inconnues et coupés par le plus grand nombre possible de forces. Dans notre cas, nous placerons l'origine en O_1 et dirigeons l'axe O_1z parallèlement à l'axe de rotation possible du solide.

Décomposons les réactions $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ en O_1, O_2 suivant les axes de coordonnées. Le solide reste en équilibre tant que les forces $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_m$ et les composantes des réactions $\boldsymbol{R}_{1x}, \boldsymbol{R}_{1y}, \boldsymbol{R}_{1z}, \boldsymbol{R}_{2x}, \boldsymbol{R}_{2y}, \boldsymbol{R}_{2z}$ vérifient les conditions d'équilibre (5.36). Soit a la distance entre les points O_1 et O_2 ; il vient

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mu=1}^{m} X_\mu + R_{1x} + R_{2x} = 0,\\
&\sum_{\mu=1}^{m} Y_\mu + R_{1y} + R_{2y} = 0,\\
&\sum_{\mu=1}^{m} Z_\mu + R_{1z} + R_{2z} = 0,\\
&\sum_{\mu=1}^{m} \mathrm{mom}_{Ox} \boldsymbol{F}_\mu - R_{2y} a = 0,\\
&\sum_{\mu=1}^{m} \mathrm{mom}_{Oy} \boldsymbol{F}_\mu + R_{2x} a = 0,\\
&\sum_{\mu=1}^{m} \mathrm{mom}_{Oz} \boldsymbol{F}_\mu = 0.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

La dernière des conditions d'équilibre (5.40) ne contient aucune composante de réaction : elle constitue donc la condition nécessaire et suffisante pour que le solide sollicité par les forces données se trouve en équilibre. Les cinq autres conditions renferment six inconnues et sont donc des équations d'équilibre.

On tire de la quatrième et de la cinquième équation

$$R_{2y} = \frac{1}{a} \sum_{\mu=1}^{m} \mathrm{mom}_{Ox} \boldsymbol{F}_\mu, \quad R_{2x} = -\frac{1}{a} \sum_{\mu=1}^{m} \mathrm{mom}_{Oy} \boldsymbol{F}_\mu,$$

puis de la première et de la deuxième

$$R_{1x}=\frac{1}{a}\sum_{\mu=1}^{m}\operatorname{mom}_{Oy}\boldsymbol{F}_{\mu}-\sum_{\mu=1}^{m}X_{\mu},$$

$$R_{1y}=-\frac{1}{a}\sum_{\mu=1}^{m}\operatorname{mom}_{Ox}\boldsymbol{F}_{\mu}-\sum_{\mu=1}^{m}Y_{\mu}.$$

Pour déterminer les composantes $\boldsymbol{R}_{1z}$ et $\boldsymbol{R}_{2z}$ des réactions, on ne dispose que d'une équation unique

$$R_{1z}+R_{2z}=-\sum_{\mu=1}^{m}Z_{\mu}, \qquad (5.41)$$

qui ne fournit que leur somme. Ainsi donc, le problème de recherche des réactions des points fixes est hyperstatique. Supposons que R_{1z} et R_{2z} vérifient (5.41); alors $R_{1z}^{*}=R_{1z}+f$ et $R_{2z}^{*}=R_{2z}-f$ vérifient la même équation, elles aussi. Il se peut donc qu'il y ait une tension initiale, ou précontrainte, entre les points fixes. C'est précisément l'éventualité de la précontrainte qui est à l'origine de l'indétermination statique.

Pour que le problème redevienne isostatique, il suffit de fixer le solide en O_2 au moyen d'une articulation cylindrique (rotoïde). La composante $\boldsymbol{R}_{2z}$ s'annulant, il reste cinq inconnues et cinq équations.

De (5.41) on tire alors

$$R_{1z}=-\sum_{\mu=1}^{m}Z_{\mu}.$$

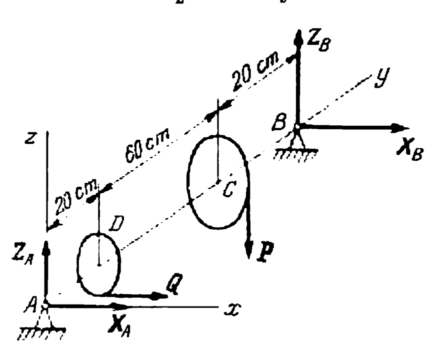


Fig. 5.17

E x e m p l e 5.2. Une roue C de 1 m de diamètre et un engrenage D de 10 cm de rayon sont emmanchés sur un arbre horizontal AB (fig. 5.17). Les autres dimensions sont marquées sur le dessin. Une force verticale $P = 15$ kN est appliquée suivant la tangente à la roue C. Une force horizontale Q de valeur inconnue est appliquée suivant la tangente à l'engrenage D. On demande de savoir la force Q et les réactions aux paliers A, B en position d'équilibre.

S o l u t i o n. Les problèmes de statique dans l'espace sont abordés dans le même ordre que sur le plan: on dessine le schéma des efforts, on marque les forces connues et inconnues qui assurent l'équilibre du solide, on choisit la position du système de coordonnées (lieu de l'origine, directions des axes), puis on écrit les équations d'équilibre dont les solutions fournissent les forces (ou autres grandeurs) cherchées.

Plaçons l'origine des coordonnées en A ; l'axe Ay sera parallèle à l'arbre, et les axes Ax et Az, perpendiculaires à celui-ci dans les plans horizontal et vertical.

L'équilibre de l'arbre est assuré par les forces $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ et les réactions aux paliers $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_B$. Décomposons les réactions suivant les axes de coordonnées Ax et Az: nous obtenons les composantes X_A, Z_A, X_B, Z_B. Les composantes suivant Ay sont inexistantes, car aucune liaison matérielle (donc aucune réaction de liaison) ne s'oppose à la translation de l'arbre le long de cet axe.

Nous chercherons cinq inconnues Q, X_A, Z_A, X_B, Z_B en écrivant les équations d'équilibre (5.36) qui sont en l'occurrence au nombre de cinq, elles aussi : en effet, nous obtenons deux équations en annulant les sommes des projections de toutes les forces sur les axes Ax, Az, puis trois autres équations en annulant les sommes des moments de toutes les forces par rapport aux axes Ax, Ay, Az:

$$\sum X = Q + X_A + X_B = 0, \quad (1)$$

$$\sum Z = -P + Z_A + Z_B = 0, \quad (2)$$

$$\sum \mathrm{mom}_{Ox} F = -P \cdot 0{,}8 + Z_B \cdot 1 = 0, \quad (3)$$

$$\sum \mathrm{mom}_{Oy} F = -Q \cdot 0{,}1 + P \cdot 0{,}5 = 0, \quad (4)$$

$$\sum \mathrm{mom}_{Oz} F = -Q \cdot 0{,}2 - X_B \cdot 1 = 0. \quad (5)$$

De l'équation (4), $Q = 5P = 75$ kN ; de (5), $X_B = -0{,}2\,Q = -15$ kN ; de (1), $X_A = -Q - X_B = -60$ kN ; de (3), $Z_B = 0{,}8\,P = 12$ kN ; enfin, de (2), $Z_A = P - Z_B = 3$ kN.

Le signe négatif de X_A et X_B signifie que les composantes X_A et X_B des réactions sont orientées à l'inverse du dessin.

E x e m p l e 5.3. Le couvercle rectangulaire $ABCD$ d'une caisse est soutenu à l'état ouvert par une béquille EC en C. Le poids du couvercle est $P = 15$ kN ; $DC = DE$; $\widehat{EDC} = 60°$. Déterminer les réactions aux articulations cylindriques A, D et l'effort $\boldsymbol{S}$ dans la béquille (le poids de la béquille est à négliger).

Fig. 5.18

S o l u t i o n. Plaçons l'origine des coordonnées en A (fig. 5.18) et orientons l'axe Ay suivant le côté AD, l'axe Az verticalement vers le haut et l'axe Ax suivant le côté AF.

L'équilibre du couvercle est donc assuré par :

— le poids $\boldsymbol{P}$ appliqué en son centre de symétrie et dirigé verticalement vers le bas ;

— la réaction $\boldsymbol{R}$ de la béquille portée par son axe et orientée de E vers C ;

— les réactions aux articulations $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_D$.

Décomposant les réactions $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_D$ suivant les axes de coordonnées Ax et Az, on obtient quatre composantes X_A, Z_A, X_D, Z_D ; les composantes parallèles à l'axe Ay sont nulles, car les articulations cylindriques A et D ne s'opposent pas à la translation le long de l'axe Ay.

Ecrivons les équations d'équilibre. Remarquons que $\widehat{CED} = 60°$, car DC

$= DE$ et $\widehat{EDC} = 60°$. Projetons toutes les forces sur les axes Ax et Az; il vient

$$\sum X = X_A + X_D + R\cos 120° = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Z = -P + Z_A + Z_D + R\cos 30° = 0. \qquad (2)$$

Pour déterminer les moments des forces par rapport à l'axe Ax, projetons les forces sur le plan Ayz et calculons les moments des vecteurs projections de ces forces par rapport à A. Pour déterminer les moments des forces par rapport aux axes Ay et Az, projetons d'abord toutes les forces sur les plans Azx et Axy, puis calculons les moments des vecteurs projections par rapport à A. Les équations d'équilibre correspondantes s'écriront sous la forme

$$\sum \mathrm{mom}_{Ox} F = -P\cdot\frac{1}{2}AD + Z_D\cdot AD + R\cos 30°\cdot AD = 0, \qquad (3)$$

$$\sum \mathrm{mom}_{Oy} F = P\cdot\frac{1}{2}AB\cos 60° - R\cdot AB\sin 60° = 0, \qquad (4)$$

$$\sum \mathrm{mom}_{Oz} F = -X_D\cdot AD + R\cos 60°\cdot AD = 0. \qquad (5)$$

Divisons (3) et (5) par AD et (4) par AB. Il vient en définitive

$$X_A + X_D - \frac{1}{2}R = 0, \qquad (1')$$

$$Z_A + Z_D + \frac{\sqrt{3}}{2}R = 15, \qquad (2')$$

$$Z_D + \frac{\sqrt{3}}{2}R = 7{,}5, \qquad (3')$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}R = 3{,}75, \qquad (4')$$

$$-X_D + \frac{1}{2}R = 0. \qquad (5')$$

De (4′) on a $R = 4{,}33$ kN; la béquille EC subit donc un effort de compression $S = -4{,}33$ kN. On tire ensuite de l'équation (5′) $X_D = 2{,}16$ kN, de (1′) $X_A = 0$, de (3′) $Z_D = 3{,}75$ kN et finalement de (2′) $Z_A = 7{,}5$ kN.

E x e m p l e 5.4. Une dalle rectangulaire homogène $ABCD$ de poids P est soutenue par six barres articulées en leurs extrémités sur la dalle et sur les appuis fixes comme le montre la figure 5.19. Une force Q agit sur le sommet A de la dalle dans le plan $AEHD$, sous un angle β par rapport à l'arête AD de la dalle. Déterminer les efforts dans les six barres d'appui (le poids des barres est à négliger). Les cotes et les angles sont marqués sur le dessin; $AM = MB$.

S o l u t i o n. Etudions l'équilibre de la dalle $ABCD$. Plaçons l'origine des coordonnées au point A et orientons les axes Ax, Ay, Az comme il est montré sur le dessin. Supprimons les liaisons, c'est-à-dire les six barres d'appui, et leur substituons les réactions correspondantes R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 (voir ch. I, nº 2.9, cas f)). Ces dernières seront orientées en dedans des barres, à partir des articulations de la dalle, ce qui revient à supposer à priori que toutes les six barres sont tendues. On se trouve en présence d'un système de forces quelconque $\{P, Q, R_1, R_2, \ldots, R_6\}$ dans l'espace; le problème est isostatique, car le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations d'équilibre (5.36).

Projetant les forces connues P, Q et les réactions sur les axes Ax, Ay, Az, on obtient trois premières équations d'équilibre (5.36) sous la forme

$$\sum X = -R_3 \cos\psi + R_4 \cos\psi = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y = Q \cos\beta + R_1 \cos\varphi + R_2 \cos\varphi = 0, \quad (2)$$

$$\sum Z = -P - Q \sin\beta - R_1 \sin\varphi - R_2 \sin\varphi - R_3 \sin\psi - R_4 \sin\psi - R_5 - R_6 = 0. \quad (3)$$

De l'équation (1)

$$R_4 = R_3. \quad (1')$$

Passons au second groupe d'équations d'équilibre (5.36). Expliquons l'ordre de calcul des moments des forces par rapport aux axes de coordonnées. En tout premier lieu on cherche les moments qui s'annulent. Les forces Q et R_1 passent

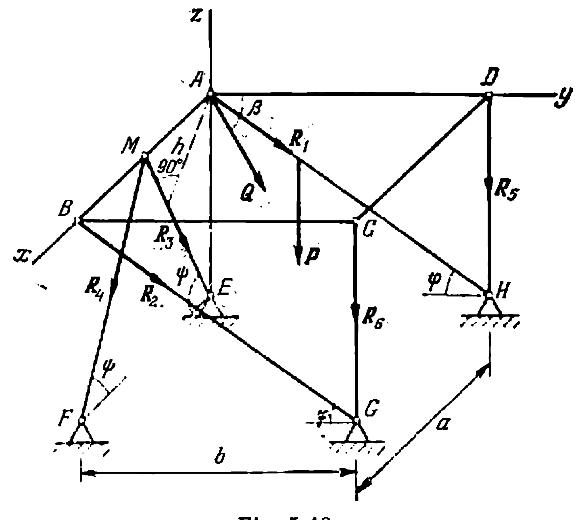


Fig. 5.19

par l'origine des coordonnées A ; de ce fait, leurs moments par rapport à chacun des trois axes de coordonnées sont nuls. Remarquons ensuite que les lignes d'action des forces R_2, R_3, R_4 coupent l'axe Ax, celles de R_3 et de R_4 coupent l'axe Az et que la force R_5 passe par le point D de l'axe Ay. De ce fait, les moments correspondants de ces forces sont également nuls. Les forces P, R_5, R_6 étant parallèles à Az, leurs moments par rapport à cet axe sont nuls. Les trois dernières équations d'équilibre (5.36) s'écriront donc comme suit:

$$\mathrm{mom}_{Ox}\, P + \mathrm{mom}_{Ox}\, R_5 + \mathrm{mom}_{Ox}\, R_6 = 0, \quad (4)$$

$$\mathrm{mom}_{Oy}\, P + \mathrm{mom}_{Oy}\, R_2 + \mathrm{mom}_{Oy}\, R_3 + \mathrm{mom}_{Oy}\, R_4 + \mathrm{mom}_{Oy}\, R_6 = 0, \quad (5)$$

$$\mathrm{mom}_{Oz}\, R_2 = 0. \quad (6)$$

De l'équation (6) on a

$$R_2 = 0, \quad (6')$$

car la force R_2 ne rencontre pas l'axe Az et n'est pas parallèle à ce dernier, alors que son moment par rapport à Az est égal à zéro. Il n'est pas difficile de mener par P, R_5, R_6 d'abord des plans perpendiculaires à Ax, puis des plans perpendiculaires à Ay: cela nous permet de calculer directement les moments de ces for-

ces par rapport aux axes indiqués (voir nº 1.2). Les moments de $\boldsymbol{R}_3$ et $\boldsymbol{R}_4$ par rapport à l'axe Ay se calculent d'après la seconde formule (5.8) ; puisque

$$x_M = \frac{1}{2}a, \quad z_M = 0, \quad R_{3z} = R_{4z} = -R_3 \sin \psi,$$

il vient

$$\text{mom}_{Oy} \boldsymbol{R}_3 = \text{mom}_{Oy} \boldsymbol{R}_4 = \frac{1}{2} aR_3 \sin \psi.$$

Remarquons qu'on aurait pu obtenir le même résultat sans faire intervenir les formules (5.8). Premièrement, la force $\boldsymbol{R}_3$ est contenue dans le plan Azx perpendiculaire à l'axe Ay, son bras de levier h (voir nº 1.2 et fig. 5.19) est égal à $\frac{1}{2} a \sin \psi$ et le signe du moment est positif : en regardant de l'extrémité de l'axe Ay, on voit le plan tourner dans le sens antihoraire autour du point A sous l'action de la force $\boldsymbol{R}_3$. Deuxièmement (pour les forces non parallèles aux axes de coordonnées), la force $\boldsymbol{R}_3$ peut être décomposée suivant les axes de coordonnées : la première composante $\boldsymbol{R}_{3x}$, qui coupe l'axe Ay, ne donne aucune contribution au moment de $\boldsymbol{R}_3$ par rapport à cet axe, tandis que la seconde composante $\boldsymbol{R}_{3z} = -R_3 \sin \psi \cdot \boldsymbol{k}$ fournit la totalité du moment indiqué. Un raisonnement analogue est valable aussi pour la force $\boldsymbol{R}_4$.

Compte tenu de (1′) et de (6′), les équations (2) à (5) s'écriront donc

$$Q \cos \beta + R_1 \cos \varphi = 0, \tag{2′}$$

$$-P - Q \sin \beta - R_1 \sin \varphi - 2R_3 \sin \psi - R_5 - R_6 = 0, \tag{3′}$$

$$-\frac{1}{2} Pb - R_5 b - R_6 b = 0, \tag{4′}$$

$$\frac{1}{2} Pa + aR_3 \sin \psi + R_6 a = 0. \tag{5′}$$

Des équations (2′) et (4′)

$$R_1 = -\frac{\cos \beta}{\cos \varphi} Q, \qquad R_5 + R_6 = -\frac{1}{2} P.$$

Portons ces expressions dans (3′) ; il vient

$$R_3 = \frac{1}{4 \sin \psi} [2 (\cos \beta \operatorname{tg} \varphi - \sin \beta) Q - P].$$

On tire alors de (5′)

$$R_6 = -\frac{1}{4} P - \frac{1}{2} (\cos \beta \operatorname{tg} \varphi - \sin \beta) Q$$

et de (4′)

$$R_5 = -\frac{1}{4} P + \frac{1}{2} (\cos \beta \operatorname{tg} \varphi - \sin \beta) Q.$$

Toutes les six réactions sont trouvées. L'expression de R_1 est négative, les angles β et φ étant aigus et Q positif, ce qui veut dire que la barre AH n'est pas tendue mais comprimée. Les signes des autres réactions, donc aussi les sens des efforts dans les barres ME, MF, DH et CG, se laissent définir en fonction des quantités P, Q, β et φ. Puisque l'effort dans la barre BG est égal à zéro, cette barre surabondante peut être supprimée (à condition que la force Q reste constante!).

Exercices

Exercice 5.1. Mettre sous forme élémentaire un système de quatre forces égales en module $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$ appliquées à quatre sommets d'un cube d'arête a comme il est montré sur la figure 5.20, *a*.

Réponse. $\boldsymbol{R}' = \sqrt{2}\, P\,(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{M}_O = \sqrt{2}\, Pa\,(-\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$. Puisque $\boldsymbol{R}' \perp \boldsymbol{M}_O$, le système de forces se réduit à une force résultante unique $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}'$ appliquée au point A (fig. 5.20, *b*).

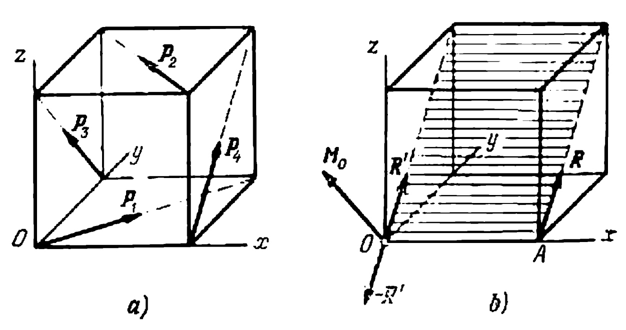


Fig. 5.20

Exercice 5.2. Mettre sous forme élémentaire un système de quatre forces $P_1 = 20$ N, $P_2 = 40$ N, $P_3 = 30$ N, $P_4 = 20$ N appliquées aux sommets et dirigées suivant les arêtes d'un cube d'arête 1 m (fig. 5.21, *a*).

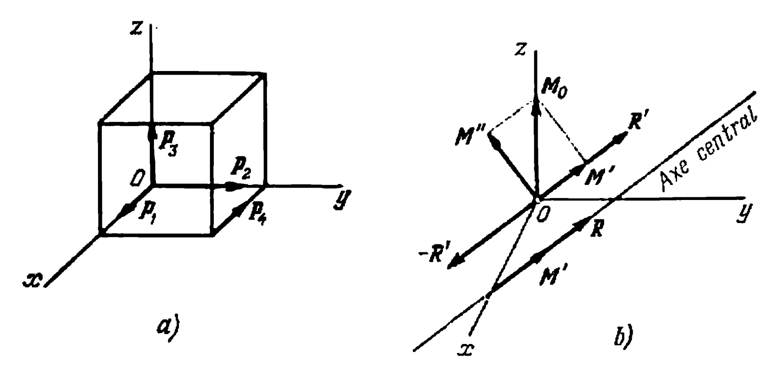


Fig. 5.21

Réponse. $\boldsymbol{R}' = 40\boldsymbol{j} + 30\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{M}_O = 20\boldsymbol{k}$, $(\widehat{\boldsymbol{R}', \boldsymbol{M}_O}) \neq 90°$,

$$R' = 50 \text{ N}, \quad M' = \frac{1}{R'} |(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{R}')| - 12 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Le système de forces se réduit à un torseur (fig. 5.21, *b*) dont l'axe central a pour équations $x = \frac{8}{25}$, $y = \frac{4}{3}z$.

Exercice 5.3. Une dalle homogène $ABDE$ de poids $P = 6$ kN est soulevée à l'aide de trois câbles verticaux attachés en A, K et E (fig. 5.22); les dimensions sont marquées sur le dessin. Déterminer la tension des câbles.

Réponse. $T_1 = 1$ kN, $T_2 = 2$ kN, $T_3 = 3$ kN.

E x e r c i c e 5.4. Une porte de poids P pivote autour de l'axe vertical AB dans un palier inférieur A et un palier supérieur B. En son angle supérieur D la porte est retenue par une force Q perpendiculaire à son plan, et en son angle inférieur E, par une force horizontale T qui fait un angle de 45° avec le côté AE

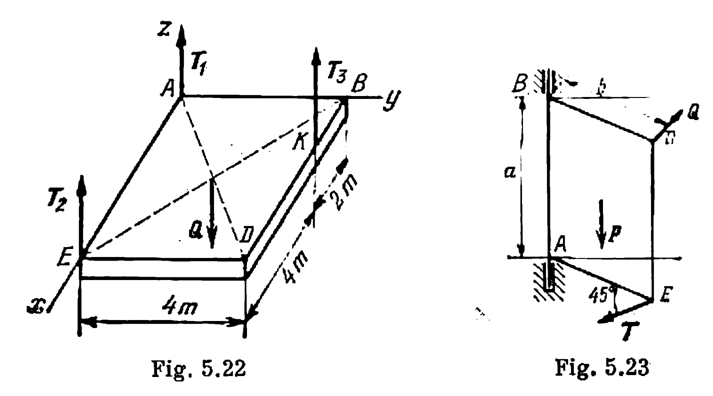


Fig. 5.22

Fig. 5.23

(fig. 5.23). On demande de savoir le module de la force T et les réactions aux paliers en position d'équilibre; $AB = a$, $BD = b$.

R é p o n s e. $T = \sqrt{2}\,Q$, $X_A = -Q$, $X_B = Q$, $Y_A = Q + \frac{b}{2a}P$, $Y_B = -\frac{b}{2a}P$, $Z_A = P$.

CHAPITRE VI

CENTRE DES FORCES PARALLÈLES ET CENTRE DE GRAVITÉ

§ 1. Centre des forces parallèles

1.1. Réduction d'un système de forces parallèles à une résultante unique. La composition de plusieurs forces parallèles peut se faire pas à pas, en appliquant successivement la règle de composition de deux forces parallèles (voir ch. II, nos 1.1 et 1.2).

Proposons-nous de faire la composition de quatre forces parallèles appliquées en quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 et orientées dans le même sens (fig. 6.1). La résultante $\boldsymbol{R}_1$ des forces $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ a pour module la somme des modules de ces deux forces:

$$R_1 = F_1 + F_2.$$

Elle est appliquée en un point C_1 situé sur le segment de droite joignant les points d'application A_1, A_2 des forces $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, parallèle à ces forces et orientée dans le même sens. La position du point C_1 est définie par la relation

$$A_1C_1 = \frac{F_2}{R_1} A_1A_2. \qquad (6.1)$$

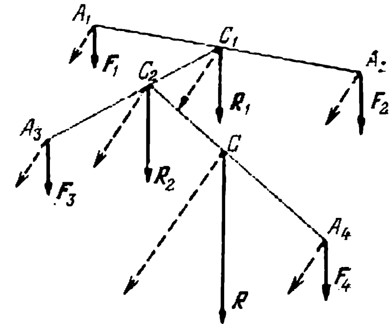


Fig. 6.1

La résultante $\boldsymbol{R}_2$ des forces $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{F}_3$ est de module égal à la somme des modules des forces données:

$$R_2 = R_1 + F_3 = F_1 + F_2 + F_3,$$

appliquée en un point C_2 du segment de droite joignant les points d'application C_1, A_3 de $\boldsymbol{R}_1$ et $\boldsymbol{F}_3$, parallèle à ces dernières et orientée dans le même sens. La position du point C_2 est définie par

$$C_1C_2 = \frac{F_3}{R_2} C_1A_3.$$

Enfin, la résultante $\boldsymbol{R}$ des forces $\boldsymbol{R}_2$ et $\boldsymbol{F}_4$ est de module égal à la somme des modules de ces deux forces:

$$R = R_2 + F_4 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4, \qquad (6.2)$$

parallèle à $\boldsymbol{R}_2$ et $\boldsymbol{F}_4$, orientée dans le même sens et appliquée en un point C situé sur le segment C_2A_4 ; la position du point C est définie par

$$C_2C = \frac{F_4}{R} C_2A_4.$$

On peut trouver de cette manière le module et le point d'application de la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles. Ainsi donc, la résultante des forces parallèles et orientées dans le même sens est parallèle à ces forces, orientée dans le même sens, égale en module à la somme des modules des forces composantes et appliquée en un point dont la position se définit en fonction des modules des forces en jeu et de la position des points d'application de ces dernières.

Montrons que la position du point C ne change pas lorsqu'on fait tourner toutes les forces autour de leurs points d'application, à condition que les forces soient toujours parallèles.

Faisons tourner toutes les forces $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{F}_4$ d'un même angle autour de leurs points d'application en conservant leur parallélisme (les nouvelles positions sont représentées sur la figure 6.1 en trait pointillé). La résultante $\boldsymbol{R}_1$ des forces $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ reste parallèle à celles-ci, est orientée dans le même sens et a comme module la somme des modules de $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$; la position de son point d'application C_1 est définie comme précédemment par la relation (6.1). Puisque les modules des forces $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ sont restés inchangés, de même que les positions des points A_1, A_2, la distance A_1C_1 définissant la position du point C_1 ne change pas. Ainsi donc, lorsqu'on fait tourner les forces $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ d'un angle déterminé autour des points A_1, A_2, leur résultante tourne du même angle autour du point C, restant parallèle à ces forces. Le même raisonnement appliqué aux forces $\boldsymbol{R}_1$ et $\boldsymbol{F}_3$, puis à $\boldsymbol{R}_2$ et $\boldsymbol{F}_4$ nous montre qu'en faisant tourner l'ensemble des forces d'un certain angle sans détruire leur parallélisme, leur résultante tournera du même angle autour du même point C tout en conservant son module. Le point d'application C de la résultante est appelé *centre du système de forces parallèles.*

Si les forces parallèles ne sont pas toutes de même sens, le raisonnement reste le même en principe, à ceci près qu'en cherchant le module et le point d'application de la résultante, on fera intervenir les relations déduites dans le ch. II, n° 1.2, pour la composition des forces parallèles et de sens opposés. Le module de la résultante reste toujours de la forme (6.2), mais les modules des forces composantes interviennent avec le signe positif si le sens de la force correspond au sens choisi comme positif, et avec le signe négatif si la force est orientée dans le sens inverse.

1.2. Centre des forces parallèles. Maintenant nous établirons des formules qui permettront de calculer les coordonnées du centre des forces parallèles.

Soient n forces parallèles $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$, supposées non toutes de même sens pour plus de généralité. Désignons les coordonnées de leurs points d'application par

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_n, y_n, z_n).$$

La résultante de ce système de forces est parallèle aux forces données. Son module est égal à la somme algébrique des modules des composantes:

$$R = \sum_{\nu=1}^{n} \pm F_\nu.$$

Nous omettons le cas où $\sum_{\nu=1}^{n} \pm F_\nu = 0$; en effet, dans ce cas le système de forces parallèles est équivalent soit à 0, soit à un couple de forces unique, ce qui fait qu'il n'a pas de résultante et la recherche du centre des forces parallèles n'a aucun sens. Nous posons aussi $\sum_{\nu=1}^{n} \pm F_\nu > 0$, sinon on choisirait le sens inverse comme positif.

Les coordonnées du point d'application C de la résultante, c'est-à-dire les coordonnées du centre du système de forces parallèles considéré, seront désignées par x_C, y_C, z_C.

Orientons toutes les forces parallèlement à Oz (fig. 6.2): la résultante $\boldsymbol{R}$ est parallèle à Oz, elle aussi. Calculons maintenant le moment de la résultante par rapport à l'axe Oy. En vertu du théorème de Varignon (5.27) et de la formule (5.6), le moment de la résultante par rapport à l'axe Oy est égal à la somme des moments des composantes par rapport à ce même axe. Les bras de levier étant égaux aux abscisses des points d'application des forces (voir figure), on a

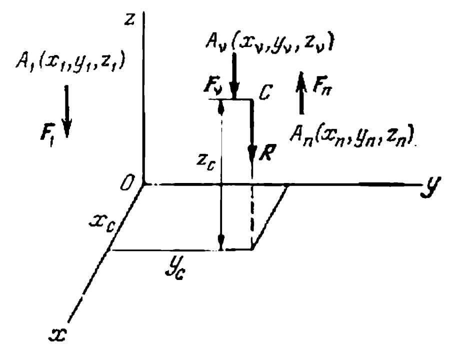


Fig. 6.2

$$Rx_C = F_1x_1 + F_2x_2 + \ldots + F_nx_n = \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu x_\nu, \tag{6.3}$$

d'où

$$x_C = \frac{1}{R} \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu x_\nu = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu x_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu} \tag{6.4}$$

(rappelons que les valeurs de F_ν interviennent dans le numérateur et le dénominateur avec le signe positif si le sens des forces est celui de l'axe Oz, et avec le signe négatif si les forces sont orientées dans le sens inverse).

Faisons tourner ensuite toutes les forces autour de leurs points d'application de façon à les amener en parallélisme avec l'axe Ox. Le moment de la résultante et la somme des moments des forces composantes par rapport à l'axe Oz étant égaux, il vient

$$Ry_C = F_1y_1 + F_2y_2 + \ldots + F_ny_n = \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu y_\nu,$$

d'où

$$y_C = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} F_\nu y_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} F_\nu}. \tag{6.5}$$

Tournons enfin toutes les forces autour de leurs points d'application pour qu'elles soient parallèles à l'axe Oy. Il découle de l'égalité du moment de la résultante et de la somme des moments des composantes par rapport à Ox que

$$z_C = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} F_\nu z_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} F_\nu}. \tag{6.6}$$

Les formules (6.4) à (6.6) déterminent les coordonnées du centre des forces parallèles en fonction des coordonnées connues des points d'application des forces. Multipliant les formules (6.4) à (6.6) par les vecteurs unités $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ respectivement et faisant leur addition, on obtient une formule vectorielle unique qui définit le rayon vecteur $\boldsymbol{r}_C = x_C\boldsymbol{i} + y_C\boldsymbol{j} + z_C\boldsymbol{k}$ du centre des forces parallèles:

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{F_1\boldsymbol{r}_1 + F_2\boldsymbol{r}_2 + \ldots + F_n\boldsymbol{r}_n}{F_1 + F_2 + \ldots + F_n} = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} F_\nu \boldsymbol{r}_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} F_\nu}, \tag{6.7}$$

où $\boldsymbol{r}_\nu = x_\nu\boldsymbol{i} + y_\nu\boldsymbol{j} + z_\nu\boldsymbol{k}$ est le rayon vecteur du point d'application de la force $\boldsymbol{F}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$).

§ 2. Centre de gravité

2.1. Formules générales des coordonnées du centre de gravité. Tout corps solide peut être assimilé à un ensemble d'un grand nombre d'éléments matériels de très faibles dimensions. Chacun de ces élé-

ments est attiré par la Terre avec une force orientée verticalement vers le bas et appelée *poids* de l'élément matériel donné. Dans notre cours de statique, nous étudions des corps solides qui représentent des éléments de structures et d'ouvrages dont les dimensions sont faibles devant celles du globe terrestre; nous admettons donc que les poids des différents éléments d'un ensemble matériel sont parallèles. Leur résultante est égale à la somme des poids de tous les éléments: $P = \sum p_\nu$, et s'appelle *poids du solide*. Le centre des forces parallèles est appelé *centre de gravité* du solide.

Remarquons que le centre de gravité du solide occupe une position fixe qui ne dépend pas de la position du solide lui-même dans l'espace. En effet, si nous faisons tourner le solide, les forces d'attraction exercées sur ses différents éléments tourneront, par rapport au solide, autour de leurs points d'application tout en restant orientées verticalement vers le bas et parallèles entre elles. Or, dans ce cas le centre des forces parallèles conserve sa position (voir le paragraphe précédent).

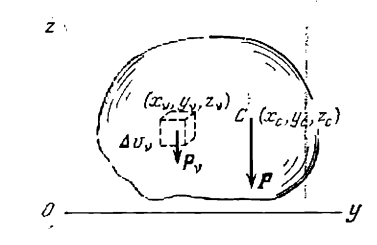


Fig. 6.3

Cherchons les coordonnées du centre de gravité d'un solide de poids P. A cet effet, subdivisons le solide en un grand nombre d'éléments matériels et désignons le poids d'un ν-ième élément par p_ν, et les coordonnées de son point d'application, par (x_ν, y_ν, z_ν) (fig. 6.3). Nous pouvons écrire alors en vertu de (6.4), (6.5) et (6.6):

$$x_C = \frac{1}{P} \sum p_\nu x_\nu, \quad y_C = \frac{1}{P} \sum p_\nu y_\nu, \quad z_C = \frac{1}{P} \sum p_\nu z_\nu. \quad (6.8)$$

Exprimons le poids d'un élément du solide en fonction de sa masse: $p_\nu = m_\nu g$. Nous nous bornons à considérer ici des solides de dimensions relativement petites: cela veut dire que g est une grandeur constante pour tous les éléments du solide et égale à l'accélération de la pesanteur au point donné du globe terrestre. Ceci posé, les *formules* (6.8) *définissant les coordonnées du centre de gravité du solide* s'écriront comme suit:

$$x_C = \frac{1}{M} \sum m_\nu x_\nu, \quad y_C = \frac{1}{M} \sum m_\nu y_\nu, \quad z_C = \frac{1}{M} \sum m_\nu z_\nu, \quad (6.9)$$

où $M = \sum m_\nu = P/g$ est la masse du solide. Multipliant les formules (6.9) par les vecteurs unités $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ respectivement et faisant leur addition, on obtient une formule vectorielle unique exprimant le

rayon vecteur $\boldsymbol{r}_C = x_C\boldsymbol{i} + y_C\boldsymbol{j} + z_C\boldsymbol{k}$ du centre de gravité du solide:

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{1}{M} \sum m_\nu \boldsymbol{r}_\nu, \tag{6.10}$$

où $\boldsymbol{r}_\nu = x_\nu\boldsymbol{i} + y_\nu\boldsymbol{j} + z_\nu\boldsymbol{k}$ est le rayon vecteur d'un ν-ième élément.

Plaçons-nous dans le cas particulier où l'on considère un solide homogène. Désignons par Δv_ν le volume de son ν-ième élément. Le poids de celui-ci s'écrira alors sous la forme $p_\nu = \gamma\Delta v_\nu$,

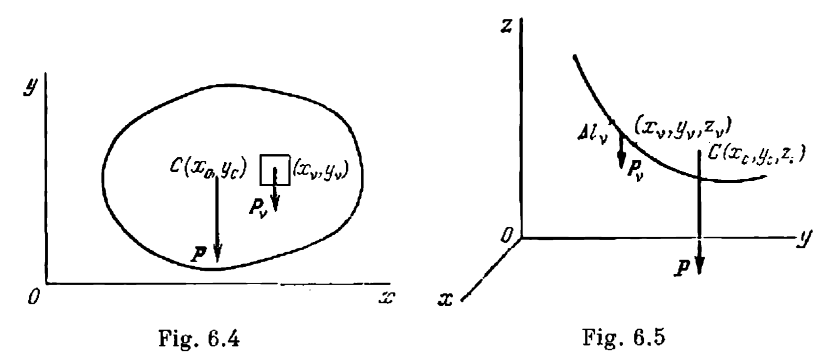


Fig. 6.4 Fig. 6.5

où γ est le poids de l'unité de volume du solide. Puisque γ est par définition constant pour un solide homogène, on obtient en portant cette expression dans (6.8)

$$\begin{gathered} x_C = \frac{\sum \gamma\Delta v_\nu x_\nu}{\sum \gamma\Delta v_\nu} = \frac{1}{V} \sum x_\nu \Delta v_\nu, \\ y_C = \frac{1}{V} \sum y_\nu \Delta v_\nu, \quad z_C = \frac{1}{V} \sum z_\nu \Delta v_\nu, \end{gathered} \tag{6.11}$$

où $V = \sum \Delta v_\nu$ est le volume du solide.

Ces coordonnées, indépendantes de la constante γ, sont appelées *coordonnées du centre de gravité du volume.* Autrement dit, le centre de gravité d'un volume est le centre de gravité du solide homogène remplissant ce volume.

Supposons que le solide se présente sous forme d'une mince plaque homogène d'épaisseur constante. Désignant l'aire de surface d'un ν-ième élément de la plaque par Δs_ν et le poids de l'unité d'aire par σ, on obtient le poids de cet élément: $p_\nu = \sigma\Delta s_\nu$. Plaçant les axes Ox et Oy dans le plan de la plaque (fig. 6.4) et portant l'expression de p_ν dans (6.8), on obtient les coordonnées x_C, y_C du centre de gravité de la plaque homogène:

$$x_C = \frac{\sum \sigma\,\Delta s_\nu\, x_\nu}{\sum \sigma\,\Delta s_\nu} = \frac{1}{S} \sum x_\nu\, \Delta s_\nu, \quad y_C = \frac{1}{S} \sum y_\nu\, \Delta s_\nu, \tag{6.12}$$

où $S = \sum \Delta s_\nu$ est l'aire de la surface de la plaque.

Les coordonnées x_C, y_C s'appellent *coordonnées du centre de gravité de la surface d'une figure plane*: ce sont les coordonnées du centre de gravité de la plaque homogène d'épaisseur constante qui a la forme de la figure donnée.

La quantité $\sum x_\nu \Delta s_\nu$ est appelée *moment statique de la surface* par rapport à l'axe Oy; de même, $\sum y_\nu \Delta s_\nu$ est le moment statique de la surface par rapport à l'axe Ox. En les désignant par W_y et W_x, on obtient

$$x_C = \frac{1}{S} W_y, \quad y_C = \frac{1}{S} W_x. \tag{6.13}$$

Si l'axe Oy passe par le centre de gravité de la surface, on a $x_C = 0$ et le moment statique W_y s'annule. De même, si l'axe Ox passe par le centre de gravité de la surface, la coordonnée y_C s'annule, aussi bien que le moment statique W_x. Ainsi donc, le moment statique d'une surface par rapport à un axe passant par son centre de gravité est égal à zéro.

Les *coordonnées du centre de gravité d'une courbe* s'obtiennent par analogie à celles d'un volume et d'une surface: ce sont les coordonnées du centre de gravité d'un mince fil homogène de section constante dont l'axe se confond avec la courbe en question. Désignant le poids de l'unité de longueur du fil par q, on obtient le poids d'un ν-ième élément de longueur Δl_ν (fig. 6.5):

$$p_\nu = q \Delta l_\nu.$$

En vertu des formules (6.8) on a

$$x_C = \frac{1}{L} \sum x_\nu \Delta l_\nu, \quad y_C = \frac{1}{L} \sum y_\nu \Delta l_\nu, \quad z_C = \frac{1}{L} \sum z_\nu \Delta l_\nu, \tag{6.14}$$

où L est la longueur de la courbe.

Remarquons que les formules (6.11), (6.12), (6.14) sont approchées. Elles seront d'autant plus exactes que les éléments de subdivision du volume, surface, courbe sont plus petits. A la limite, lorsque les dimensions de ces éléments tendent vers zéro, et leur nombre, vers l'infini, les formules deviennent exactes. Par exemple, la valeur exacte de la coordonnée x du centre de gravité d'un volume s'écrit sous la forme

$$x_C = \frac{1}{V} \lim_{\max \Delta v_\nu \to 0} \sum x_\nu \Delta v_\nu. \tag{6.15}$$

Des sommes limites analogues doivent figurer aux numérateurs des expressions de x_C, y_C, z_C dans les formules (6.11), (6.12), (6.14). Les sommes de ce type portent le nom d'intégrales; elles sont calculées dans le cours de calcul intégral.

Dans certains cas la détermination précise des centres de gravité des volumes, surfaces, courbes est possible sans faire appel aux méthodes de calcul intégral.

Supposons que le solide homogène considéré admet un plan de symétrie. Plaçons les axes de coordonnées de telle façon que le plan de symétrie soit confondu avec le plan Oxy. A chaque élément de volume de cote z_ν correspondra alors un élément de volume de cote $-z_\nu$. On a donc

$$\sum z_\nu \Delta v_\nu = 0 \quad \text{et} \quad z_C = 0.$$

Cela revient à dire que *le centre de gravité d'un solide homogène admettant un plan de symétrie est situé dans le plan de symétrie.*

Si le solide homogène admet un axe de symétrie, son centre de gravité se trouve sur cet axe. En effet, orientons un des axes de coordonnées, par exemple Oz, suivant l'axe de symétrie: à chaque élément de volume Δv_ν de coordonnées (x_ν, y_ν, z_ν) correspond alors un élément de volume Δv_ν de coordonnées $(-x_\nu, -y_\nu, z_\nu)$, d'où

$$\sum x_\nu \Delta v_\nu = \sum y_\nu \Delta v_\nu = 0 \quad \text{et} \quad x_C = y_C = 0.$$

Supposons enfin que le solide homogène admet un centre de symétrie. En plaçant l'origine des coordonnées O en ce centre, on verra qu'à chaque élément de volume de coordonnées (x_ν, y_ν, z_ν) correspondra alors un élément de volume de coordonnées $(-x_\nu, -y_\nu, -z_\nu)$, d'où

$$\sum x_\nu \Delta v_\nu = \sum y_\nu \Delta v_\nu = \sum z_\nu \Delta v_\nu = 0 \quad \text{et} \quad x_C = y_C = z_C = 0.$$

Le centre de gravité du solide homogène se confond donc avec son centre de symétrie.

Dans le cas d'une figure plane admettant un axe de symétrie, le centre de gravité est situé sur cet axe; si la figure admet deux axes de symétrie, le centre de gravité se confond avec le point de leur intersection.

2.2. Détermination du centre de gravité des figures planes, courbes et solides de forme géométrique simple. Utilisant les résultats dégagés dans le n° précédent, nous chercherons maintenant les coordonnées du centre de gravité de quelques figures, courbes et solides élémentaires.

a) *Centre de gravité de la surface d'un triangle.* Divisons le triangle ABD (fig. 6.6) en un grand nombre de bandes étroites en menant des droites parallèles au côté AB. Le centre de gravité de chaque bande se trouve en son milieu, donc sur la médiane DG. Par conséquent, le centre de gravité du triangle est situé, lui aussi, sur cette médiane. Subdivisant le triangle en bandes parallèles au côté BD, nous cons-

tatons par analogie que le centre de gravité du triangle appartient à la médiane AE. On conclut donc que le centre de gravité C du triangle est le point de concours des médianes. Désignant les coordonnées des sommets du triangle par (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) et utilisant les formules de géométrie analytique (voir N. Efimov, *Eléments de géométrie analytique*, ch. 2, § 7), on trouve les coordonnées du centre de gravité sous la forme

$$x_C = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \qquad y_C = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3). \tag{6.16}$$

b) *Centre de gravité de la surface d'un polygone.* Soit une plaque homogène plane d'épaisseur constante, en forme de polygone dont

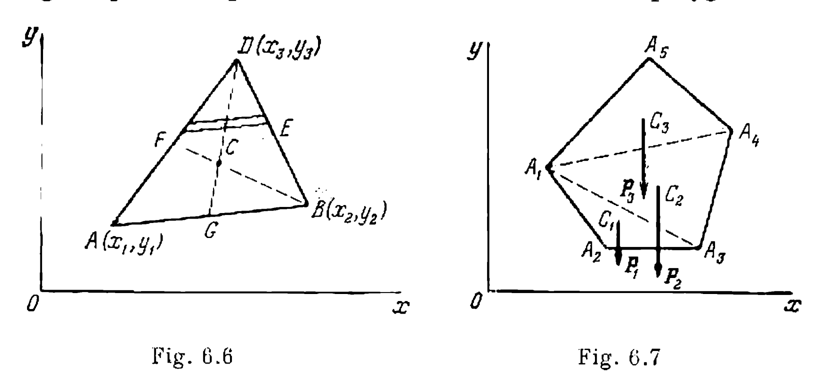


Fig. 6.6 Fig. 6.7

les sommets sont définis par des coordonnées connues (fig. 6.7). Divisons le polygone en triangles et cherchons par les formules (6.16) les coordonnées du centre de gravité de chaque triangle:

$$x_{C_1} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \qquad y_{C_1} = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3),$$

$$x_{C_2} = \frac{1}{3}(x_1 + x_3 + x_4), \qquad y_{C_2} = \frac{1}{3}(y_1 + y_3 + y_4),$$

$$x_{C_3} = \frac{1}{3}(x_1 + x_4 + x_5), \qquad y_{C_3} = \frac{1}{3}(y_1 + y_4 + y_5).$$

Ce sont les points d'application des poids $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ des triangles. Pour déterminer le centre de gravité du polygone tout entier, cherchons le centre de ces trois forces parallèles. En vertu de (6.9)

$$x_C = \frac{P_1 x_{C_1} + P_2 x_{C_2} + P_3 x_{C_3}}{P_1 + P_2 + P_3}, \qquad y_C = \frac{P_1 y_{C_1} + P_2 y_{C_2} + P_3 y_{C_3}}{P_1 + P_2 + P_3}. \tag{6.17}$$

Puisque la plaque est homogène, on peut remplacer (6.17) par

$$x_C = \frac{S_1 x_{C_1} + S_2 x_{C_2} + S_3 x_{C_3}}{S_1 + S_2 + S_3}, \qquad y_C = \frac{S_1 y_{C_1} + S_2 y_{C_2} + S_3 y_{C_3}}{S_1 + S_2 + S_3}. \tag{6.18}$$

Il ressort de (6.18) que si la surface de la figure peut être subdivisée en des parties dont on connaît l'aire et les coordonnées du centre de gravité, le centre de gravité de la figure peut être déterminé à l'aide des formules analogues à (6.12):

$$x_C=\frac{1}{S}\sum S_i x_{C_i},\quad y_C=\frac{1}{S}\sum S_i y_{C_i}. \tag{6.19}$$

Ici S_i est la surface d'une i-ème partie de la figure, et x_{Ci}, y_{Ci} les coordonnées de son centre de gravité.

Ce résultat est aussi applicable aux volumes (courbes) qui peuvent être subdivisé(e)s en des parties dont on connaît le volume (la

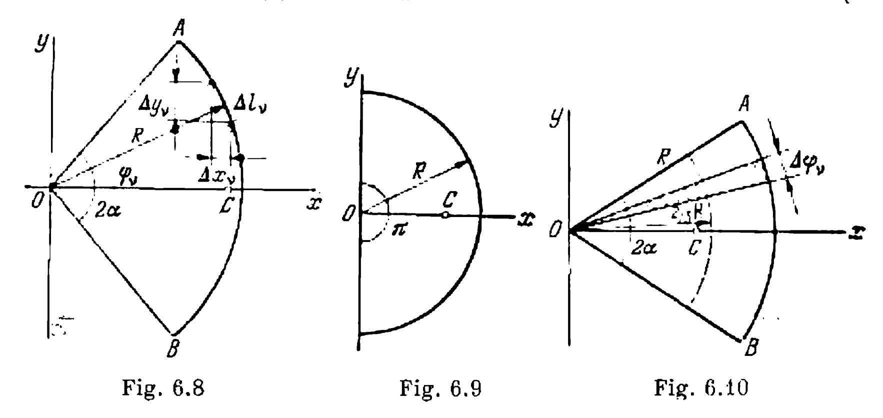


Fig. 6.8 Fig. 6.9 Fig. 6.10

longueur) et les coordonnées du centre de gravité:

$$x_C=\frac{1}{V}\sum V_i x_{C_i},\quad y_C=\frac{1}{V}\sum V_i y_{C_i},\quad z_C=\frac{1}{V}\sum V_i z_{C_i} \tag{6.20}$$

et

$$x_C=\frac{1}{L}\sum L_i x_{C_i},\quad y_C=\frac{1}{L}\sum L_i y_{C_i},\quad z_C=\frac{1}{L}\sum L_i z_{C_i}, \tag{6.21}$$

où V_i est le volume d'une i-ème partie du solide et L_i la longueur d'une i-ème partie de la ligne.

La méthode utilisant les formules (6.19), (6.20) et (6.21) est quelquefois appelée *méthode des subdivisions.*

c) *Centre de gravité d'un arc de circonférence.* Divisons l'arc AB de longueur L (fig. 6.8) en plusieurs parties de faible longueur. Remplaçons chaque partie d'arc de longueur Δl_ν par une corde ayant les mêmes extrémités et construisons un triangle rectangle d'hypoténuse égale à la corde. Ensuite, prenons la première formule (6.14) et multiplions et divisons l'expression sous le signe somme par $\cos\varphi_\nu$:

$$x_C=\frac{1}{L}\sum x_\nu\,\Delta l_\nu=\frac{1}{L}\sum\frac{x_\nu}{\cos\varphi_\nu}\,\Delta l_\nu\cos\varphi_\nu. \tag{6.22}$$

De la figure 6.8 on a $\Delta l_\nu \cos\varphi_\nu = \Delta y_\nu$ et $x_\nu/\cos\varphi_\nu = R$. Portant ces expressions dans (6.22), on obtient

$$x_C = \frac{1}{L}\sum R\,\Delta y_\nu = \frac{R}{L}\sum \Delta y_\nu = \frac{R}{L}\,AB. \qquad (6.23)$$

Ce résultat peut s'écrire autrement. Puisque la longueur de l'arc $L = 2\alpha R$ et que la longueur de la corde $AB = 2R\sin\alpha$, on obtient au lieu de (6.23)

$$x_C = \frac{R}{2\alpha R}\,2R\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{\alpha}R \quad (y_C = 0). \qquad (6.24)$$

Pour l'arc de demi-circonférence (fig. 6.9) on a $2\alpha = \pi$ et, d'après la formule (6.24),

$$x_C = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2}R = \frac{2}{\pi}R = 0{,}637R \quad (y_C = 0). \qquad (6.25)$$

d) *Centre de gravité de la surface d'un secteur circulaire.* Divisons le secteur circulaire OAB de rayon R (fig. 6.10) en une infinité de secteurs élémentaires d'angle au centre $\Delta\varphi_\nu$. Assimilons chaque secteur élémentaire à un triangle de hauteur R. Le centre de gravité de chaque triangle sera situé à une distance de $2R/3$ du centre O. Le centre de gravité du secteur se confond donc avec le centre de gravité de l'arc de circonférence de rayon $2R/3$ et d'angle au centre 2α. De la formule (6.24)

$$x_C = \frac{2}{3}\frac{\sin\alpha}{\alpha}R \quad (y_C = 0). \qquad (6.26)$$

Pour la surface d'un demi-cercle (fig. 6.10) on a $\alpha = \pi/2$; il vient donc en vertu de la formule (6.26)

$$x_C = \frac{2}{3}\frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2}R = \frac{4}{3\pi}R = 0{,}424R \quad (y_C = 0). \qquad (6.27)$$

e) *Centre de gravité d'un solide matérialisant un prisme homogène.* Découpons le prisme en plaques très minces d'épaisseur égale, parallèles à la base (fig. 6.11). Les centres de gravité des plaques seront situés sur la droite joignant les centres de gravité C_1, C_2 des bases supérieure et inférieure. Puisque toutes les plaques sont de même poids, le centre de gravité du prisme se confond avec le centre de gravité du segment de droite homogène C_1C_2. Par conséquent, le centre de gravité C du prisme homogène est situé au milieu du segment joignant les centres de gravité des bases supérieure et inférieure.

On retrouve le même résultat en considérant un cylindre homogène de section quelconque, droit ou oblique.

f) *Centre de gravité d'un solide matérialisant une pyramide de base quelconque.* Par un raisonnement analogue au cas e), on s'assure que

le centre de gravité d'une pyramide homogène est situé sur la droite joignant son sommet O (fig. 6.12) et le centre de gravité C_0 de la base. Cherchons maintenant la distance (cote z) entre le centre de gravité et le sommet de la pyramide.

Soit une pyramide de hauteur h dont la base a l'aire S_0. Plaçons l'origine des coordonnées au sommet O et orientons l'axe Oz verticalement vers le bas. A une distance z_ν du sommet, faisons deux sections parallèles à la base, de façon à isoler un élément de pyramide

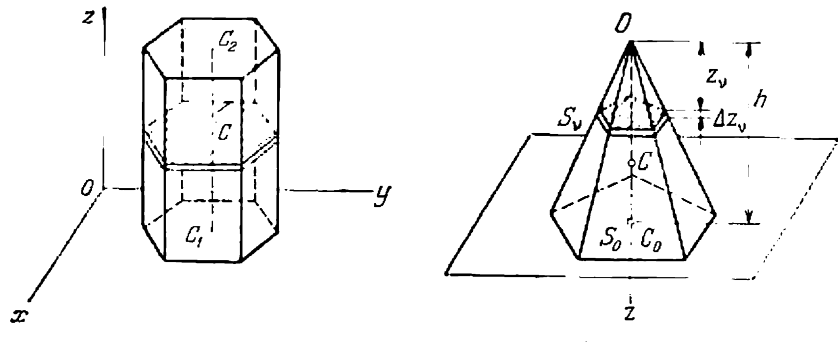


Fig. 6.11 Fig. 6.12

de hauteur Δz_ν. Le volume de cet élément sera $\Delta v_\nu = S_\nu \Delta z_\nu$, où S_ν est l'aire de la section qui se trouve à la distance z_ν du sommet O. En vertu du théorème sur les aires des figures semblables, $S_\nu/S_0 = z_\nu^2/h^2$, d'où $S_\nu = z_\nu^2 S_0/h^2$.

De la formule (6.11)

$$z_C = \frac{1}{V} \sum z_\nu \Delta v_\nu = \frac{S_0}{Vh^2} \sum z_\nu^3 \Delta z_\nu. \qquad (6.28)$$

La valeur exacte de z_C est la limite de la somme pour $\max \Delta z_\nu \to 0$. Le problème se réduit donc au calcul de l'intégrale:

$$z_C = \frac{S_0}{Vh^2} \lim_{\max \Delta z_\nu \to 0} \sum z_\nu^3 \Delta z_\nu = \frac{S_0}{Vh^2} \int_0^h z^3 \, dz = \frac{S_0 h^2}{4V}.$$

Introduisant dans cette formule l'expression de $V = S_0 h/3$, on obtient en définitive la cote z_C du centre de gravité de la pyramide:

$$z_C = 3/4\, h. \qquad (6.29)$$

Le raisonnement développé pour déduire la formule (6.28) reste valable quelle que soit la configuration de la base de la pyramide. De ce fait, la formule (6.29) reste applicable aussi à un cône homogène de base quelconque.

Ainsi donc, le *centre de gravité d'une pyramide* ou *d'un cône* quelconques est situé sur le segment joignant le sommet au centre

de gravité de la base, *à 1/4 de la hauteur à partir de la base.*

g) *Centre de gravité d'un solide matérialisant une demi-sphère* (fig. 6.13). De la formule (6.15)

$$z_C = \frac{1}{V} \iiint_D z\, dv.$$

Calculons l'intégrale triple étendue au volume D de la demi-sphère en faisant le passage aux coordonnées cylindriques r, φ, z (voir N. Piskounov, *Calcul différentiel et intégral*, tome II, ch. XIV, §§ 5 et 13):

$$\iiint_D z\, dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\, dr \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} z\, dz =$$

$$= 2\pi \int_0^R \frac{1}{2} (R^2 - r^2)\, r\, dr = \pi \left[R^2 \cdot \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^R = \frac{1}{4} \pi R^4.$$

Le centre des coordonnées O étant situé dans le plan diamétral de la demi-sphère, la cote du centre de gravité sera donc

$$z_C = \frac{1}{\frac{2}{3}\pi R^3} \cdot \frac{1}{4} \pi R^4 = \frac{3}{8} R. \qquad (6.30)$$

2.3. Détermination du centre de gravité des figures et solides de forme géométrique complexe. Tout d'abord on fait intervenir les *propriétés de symétrie* (voir la fin du n° 2.1) si elles ont lieu. Puis on utilise généralement la *méthode des subdivisions* (voir les formules (6.19) à (6.21)).

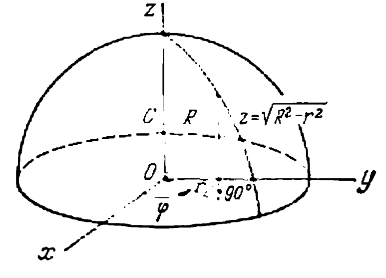


Fig. 6.13

Faisons à ce propos une remarque importante relative à une méthode particulière appelée *méthode des masses négatives*. Nous avons vu dans le n° 1.2 que les formules définissant le centre des forces parallèles restent valables dans le cas où ces forces ne sont pas toutes de même sens. Aussi, en faisant la subdivision des figures et des solides qui présentent des parties creuses (vides), peut-on considérer les aires ou les volumes de ces dernières comme négatifs. Les formules (6.19) ou (6.20) restent valables si certains S_i ou V_i sont négatifs. Quoi qu'il en soit, la somme de tous les S_i ou V_i (positifs et négatifs) doit être égale à l'aire de la figure S ou au volume du solide V.

Exemple 6.1. Déterminer le centre de gravité de la surface d'un trapèze $OABD$ (fig. 6.14) de bases $OA = a$, $DB = b$ et de hauteur h.

Solution. Nous constatons d'abord, comme dans le n° 2.2 a), que le centre de gravité C est situé sur la droite EF joignant les centres des bases. La position de C sur EF sera cherchée graphiquement : à cet effet nous diviserons le trapèze en deux triangles OAD, ABD dont les centres de gravité se situent en C_1 et C_2 respectivement. La droite C_1C_2 viendra couper EF au centre de gravité C du trapèze.

Cherchons maintenant par voie analytique la position du centre de gravité C sur la droite EF. Il suffit de déterminer une seule coordonnée de C, par exemple

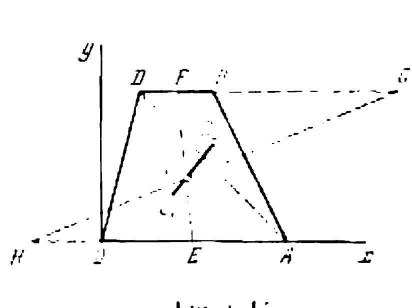


Fig. 6.14

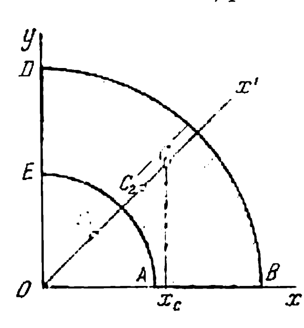


Fig. 6.15

y_C qui se prête plus aisément au calcul. Les ordonnées des centres de gravité et les aires des triangles OAD et ABD sont respectivement

$$y_{C_1}=\frac{1}{3}h,\quad S_1=\frac{1}{2}ah;\quad y_{C_2}=\frac{2}{3}h,\quad S_2=\frac{1}{2}bh.$$

L'ordonnée du centre de gravité du trapèze s'écrira donc en vertu de (6.19)

$$y_C=\frac{1}{\frac{1}{2}(a+b)h}\left[\frac{h}{3}\frac{ah}{2}+\frac{2h}{3}\frac{bh}{2}\right]=\frac{a+2b}{3(a+b)}h.$$

Il s'ensuit que le point C peut être construit d'une façon plus facile. A cet effet portons sur les prolongements des bases les segments $BG = a$ et $OH = b$ (fig. 6.14) ; la droite GH vient couper EF au centre de gravité C du trapèze. En effet, les triangles CEH et CFG étant semblables, on a

$$\frac{y_C}{h-y_C}=\frac{b+\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}b+a},$$

d'où l'on déduit la formule de y_C citée ci-dessus.

Exemple 6.2. Déterminer le centre de gravité de la surface du quart d'anneau circulaire de rayons R et r montré sur la figure 6.15.

Solution. Plaçons l'origine des coordonnées en O et orientons l'axe Ox' suivant l'axe de symétrie. Assimilons la figure à un secteur circulaire OBD comportant un petit secteur creux OAE. L'aire du grand secteur sera $S_1 = 1/4\,\pi R^2$; l'aire du petit secteur sera négative, $S_2 = -1/4\,\pi r^2$. Trouvons les abscisses des centres de gravité des secteurs, par rapport à l'axe Ox' ; nous avons d'après la formule (6.26), où $\alpha = \pi/4$ (soulignons que α est la moitié de l'angle au centre

du secteur) :

$$x'_{C_1}=\frac{2}{3}\,\frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4}\,R=\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\,R,\qquad x'_{C_2}=\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\,r.$$

Il vient en vertu de la formule (6.19)

$$x'_C=\frac{S_1x'_{C_1}+S_2x'_{C_2}}{S_1+S_2}=\frac{\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}R\,\frac{\pi R^2}{4}-\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}r\,\frac{\pi r^2}{4}}{\frac{1}{4}\pi R^2-\frac{1}{4}\pi r^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\,\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}.$$

Le point C étant rapporté au repère Oxy (fig. 6.15), ses coordonnées s'écrivent:

$$x_C=y_C=x'_C\cos\frac{\pi}{4}=\frac{4}{3\pi}\,\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}=0{,}424\,\frac{R^2+Rr+r^2}{R+r}.$$

On obtient la même expression pour l'abscisse du centre de gravité d'un demi-anneau circulaire en confondant son axe de symétrie avec l'axe Ox.

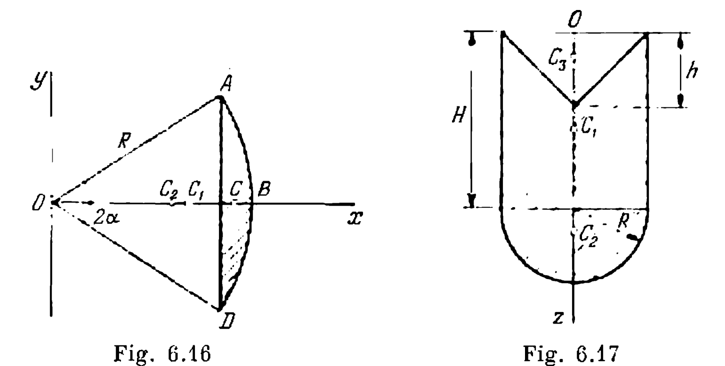


Fig. 6.16 Fig. 6.17

Dans le cas particulier où $r=0$, la dernière formule donne les coordonnées du centre de gravité d'un quart de cercle par rapport aux axes orientés suivant ses rayons frontières, ou, ce qui revient au même, l'abscisse du centre de gravité d'un demi-cercle lorsque l'axe Ox est confondu avec son axe de symétrie (voir (6.27)).

E x e m p l e 6.3. Déterminer le centre de gravité d'un segment circulaire de rayon R et d'angle au centre 2α (fig. 6.16).

S o l u t i o n. La figure admet un axe de symétrie Ox; on a donc $y_C=0$. Assimilons le segment ABD à un secteur $OABD$ comportant un triangle creux OAD. L'aire du secteur $S_1=1/2\,R^2\cdot 2\alpha=\alpha R^2$; l'aire du triangle est négative, $S_2=-R\sin\alpha\cdot R\cos\alpha=-R^2\sin\alpha\cos\alpha$. L'abscisse du centre de gravité C_1 du secteur se définit par la formule (6.26):

$$x_1=\frac{2}{3}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,R,$$

et le centre de gravité C_2 de la surface du triangle se trouve à l'intersection de ses médianes, soit $x_2 = 2/3\ R \cos\alpha$. On a d'après la formule (6.19)

$$x_C = \frac{S_1x_1+S_2x_2}{S_1+S_2} =$$

$$= \frac{\alpha R^2 \cdot \frac{2}{3}\frac{\sin\alpha}{\alpha} R - R^2 \sin\alpha\cos\alpha \cdot \frac{2}{3} R\cos\alpha}{\alpha R^2 - R^2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{3}\frac{\sin^3\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha} R.$$

E x e m p l e 6.4. Déterminer le centre de gravité du solide (fig. 6.17) composé d'un cylindre accolé à une demi-sphère et comportant un évidement conique; les cotes sont marquées sur le dessin.

S o l u t i o n. Le solide admet un axe de symétrie Oz; on a donc $x_C = y_C = 0$. Calculons les volumes du cylindre V_1, de la demi-sphère V_2 et du cône creux V_3:

$$V_1 = \pi R^2 H, \quad V_2 = \frac{2}{3}\pi R^3, \quad V_3 = -\frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Les cotes des centres de gravité C_1, C_2, C_3 des volumes sont

$$z_1 = \frac{1}{2}H, \quad z_2 = H + \frac{3}{8}R, \quad z_3 = \frac{1}{4}h.$$

D'après la formule (6.20)

$$z_C = \frac{V_1z_1+V_2z_2+V_3z_3}{V_1+V_2+V_3} =$$

$$= \frac{\pi R^2 H \cdot \frac{1}{2}H + \frac{2}{3}\pi R^3\left(H+\frac{3}{8}R\right) - \frac{1}{3}\pi R^2 h \cdot \frac{1}{4}h}{\pi R^2 H + \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^2 h} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}H^2 + \frac{2}{3}RH + \frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{12}h^2}{H+\frac{2}{3}R - \frac{1}{3}h} = \frac{1}{4}\,\frac{6H^2+8RH+3R^2-h^2}{3H+2R-h}.$$

Exercices

E x e r c i c e 6.1. Montrer que le centre de gravité d'un quadrilatère quelconque *ABDE* (fig. 6.18) peut se construire si on divise chacun des côtés en trois parties égales et qu'on joint par des droites les points de division voisins de chaque sommet: la figure *FGHK* ainsi obtenue est un parallélogramme dont les diagonales portent à leur intersection le centre de gravité cherché.

I n d i c a t i o n. Diviser le quadrilatère *ABDE* en deux triangles par une diagonale et montrer que les centres de gravité de ces triangles se confondent avec les centres de gravité des deux parallélogrammes en lesquels la droite *AD* partage le parallélogramme *FGHK*.

E x e r c i c e 6.2. Le demi-cercle de rayon R (fig. 6.19) présente un évidement excentré de forme demi-circulaire pour lequel R est le diamètre. Déterminer le centre de gravité C de la partie pleine.

R é p o n s e. $x_C = \frac{5}{6} R$, $y_C = \frac{14}{9\pi} R = 0{,}495R$.

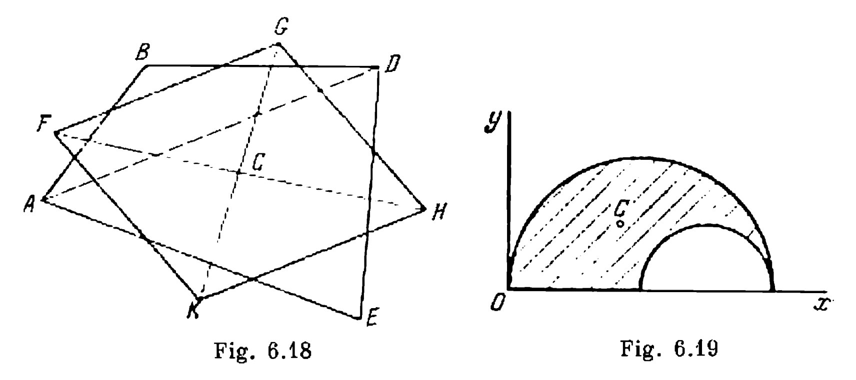


Fig. 6.18

Fig. 6.19

E x e r c i c e 6.3. Soit un solide formé par un cylindre et un cône accolés par leurs bases de même rayon. La hauteur du cylindre est H, celle du cône est h. Quel doit être le rapport h/H pour que le centre de gravité du solide se confonde avec celui de la base du cône ?

R é p o n s e. $\frac{h}{H} = 6$.

DEUXIÈME PARTIE

CINÉMATIQUE

INTRODUCTION À LA CINÉMATIQUE

1. Mouvement mécanique. La mécanique rationnelle étudie le mouvement mécanique et l'équilibre des corps matériels. Le mouvement mécanique est le déplacement relatif des corps; de tous les mouvements variés du monde matériel, le mouvement mécanique est le plus simple.

Le mouvement est une forme d'existence du monde matériel; le mouvement mécanique est une conséquence de l'interaction des corps matériels. Or, en étudiant les différentes formes de mouvement, par exemple le mouvement mécanique, on peut faire abstraction de telle ou telle propriété du mouvement; l'abstraction scientifique est une méthode qui permet d'étudier le mouvement sans prendre en considération toutes les propriétés du mouvement en même temps.

La *cinématique* est un chapitre de mécanique rationnelle où *le mouvement mécanique est étudié uniquement du point de vue géométrique*, sans tenir compte des interactions qui ont engendré ce mouvement. La cinématique étudie le changement de la position géométrique des corps *dans le temps*.

2. Espace et temps. La cause du mouvement mécanique est le changement incessant du monde matériel dans sa diversité. Tous les mouvements mécaniques observables sont situés dans l'espace et dans le temps. L'espace et le temps, forme d'existence du monde matériel, sont inséparables du mouvement des corps matériels.

Dans ce cours de mécanique rationnelle, nous nous plaçons dans un espace homogène, isotrope et continu à trois dimensions. Pour apprécier l'étendue de l'espace, on se donne une unité de mesure. L'unité de longueur SI est le mètre; une des copies de l'étalon international du mètre est entreposée à la Chambre des poids et mesures à Moscou.

Le temps est considéré en mécanique classique comme universel pour tous les points de l'espace et indépendant formellement du mouvement du corps matériel. L'unité de temps est la seconde solaire moyenne, égale à 1/86 400 du jour solaire moyen *). Le cours du temps est supposé continu: à chaque instant arbitraire on fait correspondre un point déterminé de la droite appelée axe du temps. Les relations spatiales et la division du temps en intervalles égaux adoptées en cinématique reflètent les propriétés réelles de la matière en mouvement.

Les critiques formulées au début du XX[e] siècle à l'égard des principes de la mécanique classique ont conduit à l'apparition de la mécanique relativiste et de la mécanique quantique. Sans entrer dans les détails, signalons que les principes de la théorie de la Relativité développés par J. C. Maxwell (1831-1879), H. A. Lorentz (1853-1928), H. Poincaré (1854-1912) et A. Einstein (1879-1955) bouleversent les notions classiques de l'espace et du temps. La théorie de la Relativité, au cours de son élaboration scientifique, a corroboré une fois de plus la justesse du concept marxiste-léniniste de l'unité de la matière en mouvement avec le temps et l'espace. En mécanique relativiste le temps cesse d'être universel pour devenir « local ». Les observateurs se trouvant dans des référentiels mobiles différents communiquent entre eux à l'aide de signaux lumineux, étant entendu que la vitesse de la lumière est une constante universelle pour tous les référentiels. Sans abroger la mécanique classique, la mécanique relativiste fait ressortir le caractère limité de cette dernière en indiquant que les principes de la mécanique classique cessent d'être applicables dès que la vitesse de mouvement du corps devient commensurable avec celle de la lumière.

3. **Référentiel.** La mécanique rationnelle, donc aussi la cinématique qui en est un chapitre particulier, examinent des corps solides parfaits (ou corps indéformables, voir ch. I, n° 2.1). Le solide le plus élémentaire est le point matériel, c'est-à-dire un corps dont les dimensions sont absolument négligeables devant l'ampleur de son mouvement dans l'espace. Ainsi donc, compte tenu de l'ampleur de son mouvement mécanique, le même corps (par exemple la Terre) peut être considéré tantôt comme un solide aux dimensions finies (dans son mouvement autour de son axe), tantôt comme un point matériel (dans son mouvement sur son orbite).

Pour pouvoir déterminer le mouvement du corps matériel au point de vue géométrique, nous devons connaître la variation de sa position dans l'espace en fonction du temps. Or, cela ne peut être fait autrement qu'en se donnant un système de corps (un référentiel) par rapport auxquels on pourrait déterminer la position du corps mo-

*) Au lieu de l'étalon astronomique, on adopte actuellement un étalon atomique du temps.

bile ou d'un point sur le corps. Si l'espace tridimensionnel était « vide », c'est-à-dire exempt de tout autre corps matériel que le corps (par exemple un point matériel) dont on étudie le mouvement, on ne pourrait jamais définir la position du corps considéré dans l'espace.

En effet, l'espace étant homogène, c'est-à-dire ayant tous ses points géométriques absolument semblables, on n'a aucune raison pour distinguer un point de l'espace (origine) parmi les autres; dans un tel espace « vide », le mouvement et le repos sont indiscernables. Ainsi donc, tout mouvement mécanique est un mouvement relatif et doit toujours être considéré comme tel.

I. Newton (1643-1727) a postulé l'existence d'un espace absolu et la présence dans cet espace d'un système de corps absolument immobiles (étoiles fixes); cela revient à se donner un référentiel absolu qui permet d'étudier la position des corps en mouvement. Newton a également postulé l'existence du temps absolu. Il a eu besoin de tous ces postulats afin de pouvoir définir la notion de mouvement absolu d'un corps. Il semble cependant que lui-même comprenait le caractère limité de ses postulats.

4. Petit historique. Si la mécanique comme science du mouvement et de l'équilibre des corps matériels existe depuis des dizaines de siècles, la cinématique ne date en tant que telle que d'une époque assez récente. Les notions fondamentales de la cinématique — la vitesse et l'accélération (en mouvement rectiligne) — ont été introduites par G. Galilée (1564-1642) dans la première moitié du XVIIe siècle. Il a formulé également le principe de la composition des vitesses. La notion générale d'accélération est due à Newton. La cinématique du solide a été développée par L. Euler (1707-1783) dans son mémoire *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* (1765).

C'est A. M. Ampère (1775-1836) qui a eu l'idée de créer une discipline scientifique exclusivement consacrée à l'étude géométrique du mouvement et de lui donner le nom de cinématique (du grec κινησισ, *mouvement*). L. Poinsot (1777-1859) a remarqué le premier la possibilité de composer et de décomposer les rotations; il a proposé la notion d'axe instantané de rotation; il a fait des recherches géométriques approfondies sur le mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

Les recherches géométriques effectuées par Poinsot et par J. V. Poncelet (1788-1876) ont été mises à la base de la vaste discipline technique « Cinématique des machines et des mécanismes » dont l'apparition au début du XIXe siècle était conditionnée par les besoins immédiats du développement industriel. Après la parution de l'ouvrage de fond de Willis *Principles of mechanisms* (1841) traitant de la théorie des engrenages, la cinématique s'affirme définitivement comme une discipline technique à part entière.

N. Joukovski (1847-1921) prônait les avantages de l'approche géométrique en mécanique et soulignait que la cinématique permet de donner aux conclusions analytiques (formules) une interprétation géométrique.

La cinématique, au même titre que la mécanique rationnelle dans son ensemble, constitue le fond scientifique de la technique d'aujourd'hui. Utilisant les méthodes d'analyse mathématique dans son étude du mouvement, elle ne devient cependant pas un chapitre des mathématiques. Elle garde une façon d'opérer propre à toutes les sciences de la nature : poser correctement le problème mécanique, quitte à admettre un certain degré d'abstraction là où c'est néces-

saire, pour revenir ensuite, le problème résolu, de l'abstraction au mouvement concret (réel) en passant par l'observation, par l'expérience.

Nous commencerons l'étude de la cinématique par un bref exposé de la dérivation d'un vecteur variable.

5. Dérivation d'un vecteur libre variable. On appelle *vecteur libre* tout vecteur dont le point d'application peut être transféré en un point quelconque de l'espace. Un exemple de vecteur libre est le vecteur moment d'un couple de forces (voir ch. V, nº 1.4).

Soient dans l'espace un système de coordonnées fixe (ou repère) $Oxyz$ et un vecteur libre variable, c'est-à-dire un vecteur libre qui change avec le temps, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$. On l'appelle parfois *vecteur fonction* ou *fonction vectorielle* d'un argument scalaire t. Nous avons donc pour deux instants t et $t + \Delta t$ deux vecteurs $\boldsymbol{a}(t)$ et $\boldsymbol{a}(t + \Delta t)$. Considérons deux vecteurs $\boldsymbol{a}_O(t)$ et $\boldsymbol{a}_O(t + \Delta t)$ d'origine en O équipollents à ces derniers (fig. I.1). Construisons le vecteur

$$\Delta \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_O(t + \Delta t) - \boldsymbol{a}_O(t),$$

appelé *accroissement* de $\boldsymbol{a}(t)$, et le vecteur colinéaire $\Delta \boldsymbol{a}/\Delta t$.

On appelle dérivée (géométrique) du vecteur $\boldsymbol{a}(t)$ *(ou vecteur dérivé de* $\boldsymbol{a}(t)$*) par rapport à l'argument scalaire* t *la limite du rapport de l'accroissement du vecteur à celui de son argument scalaire :*

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{a}}{\Delta t}.$$

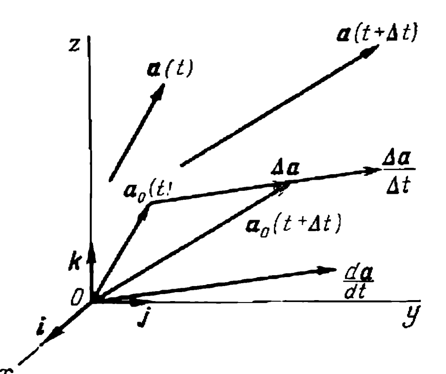


Fig. I.1

La dérivée $d\boldsymbol{a}/dt$ du vecteur libre $\boldsymbol{a}(t)$ est encore un vecteur libre et peut avoir son origine par exemple en O ou en l'extrémité de $\boldsymbol{a}_O(t)$.

De la définition de la dérivée d'un vecteur fonction, il ressort que la dérivée d'un vecteur constant (qui ne change pas dans le temps) est un vecteur nul et que la dérivée d'une somme de vecteurs et la dérivée du produit d'un vecteur par un scalaire constant λ sont respectivement égales à

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_n) = \frac{d\boldsymbol{a}_1}{dt} + \frac{d\boldsymbol{a}_2}{dt} + \ldots + \frac{d\boldsymbol{a}_n}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}.$$

Rappelons que tout vecteur se laisse représenter par la somme géométrique de ses composantes. On a donc

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k},$$

où a_x, a_y, a_z sont les projections du vecteur $\boldsymbol{a}$ sur les axes de coordonnées et $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ les vecteurs unités des axes de coordonnées fixes. Pour un vecteur fonction

$$\boldsymbol{a}(t) = a_x(t)\,\boldsymbol{i} + a_y(t)\,\boldsymbol{j} + a_z(t)\,\boldsymbol{k}$$

la dérivée par rapport à l'argument scalaire t s'écrit

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{da_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{da_z}{dt}\boldsymbol{k}, \tag{1}$$

puisque les vecteurs $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sont constants. De cette formule il ressort que *les projections de la dérivée* d'un vecteur fonction sur les axes fixes *sont égales aux dérivées des projections correspondantes.*

A côté de la dérivée d'une fonction vectorielle d'argument scalaire, on considère aussi la différentielle d'une fonction vectorielle. Par analogie à la différentielle d'une fonction scalaire, la différentielle d'une fonction vectorielle se définit comme la partie principale de l'accroissement $\Delta\boldsymbol{a}$ de la fonction pendant le temps Δt (rappelons que l'accroissement de l'argument Δt est égal à sa différentielle, donc à dt) et s'écrit

$$d\boldsymbol{a}(t) = \dot{\boldsymbol{a}}(t)\,dt.$$

Le point au-dessus de la fonction désignera la dérivée première par rapport à t, et deux points, la dérivée seconde:

$$\dot{\boldsymbol{a}}(t) \equiv \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}, \quad \ddot{\boldsymbol{a}}(t) \equiv \frac{d\dot{\boldsymbol{a}}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2}.$$

Le produit scalaire de deux vecteurs se laisse exprimer en fonction des projections par la formule (1.10):

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;$$

on obtient donc pour la dérivée du produit scalaire de deux vecteurs variables, en faisant intervenir les formules de dérivation de la somme et du produit de fonctions scalaires, l'expression que voici:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \left(\frac{da_x}{dt} b_x + \frac{da_y}{dt} b_y + \frac{da_z}{dt} b_z\right) + \\ + \left(a_x \frac{db_x}{dt} + a_y \frac{db_y}{dt} + a_z \frac{db_z}{dt}\right).$$

Le second membre de cette formule n'est autre que la somme des produits scalaires des vecteurs $d\boldsymbol{a}/dt$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{a}$, $d\boldsymbol{b}/dt$; elle équivaut donc à la formule

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}, \boldsymbol{b}\right) + \left(\boldsymbol{a}, \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\right). \tag{2}$$

Le produit vectoriel se définit en fonction des projections en faisant intervenir le déterminant (1.16):

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

ou sous forme développée

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = (a_y b_z - a_z b_y)\,\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\boldsymbol{k}.$$

Remarquons que les projections du produit vectoriel sur les axes Oy et Oz, c'est-à-dire la deuxième et la troisième parenthèse, se laissent déduire de la projection sur l'axe Ox (première parenthèse) en faisant la permutation circulaire des indices $x \to y$, $y \to z$, $z \to x$. Ceci posé, nous n'écrirons par la suite que la seule première parenthèse. La dérivée du produit vectoriel de deux vecteurs variables s'écrira

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \left(\frac{da_y}{dt} b_z + a_y \frac{db_z}{dt} - \frac{da_z}{dt} b_y - a_z \frac{db_y}{dt}\right)\boldsymbol{i} + \ldots$$

$$\ldots = \left(\frac{da_y}{dt} b_z - \frac{da_z}{dt} b_y\right)\boldsymbol{i} + \ldots + \left(a_y \frac{db_z}{dt} - a_z \frac{db_y}{dt}\right)\boldsymbol{i} + \ldots$$

Nous obtenons la somme des produits vectoriels des vecteurs $d\boldsymbol{a}/dt$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{a}$, $d\boldsymbol{b}/dt$, ce qui se traduit par la formule

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \left[\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}, \boldsymbol{b}\right] + \left[\boldsymbol{a}, \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\right]. \qquad (3)$$

Puisque le produit vectoriel dépend de l'ordre des facteurs, on aura soin de conserver l'ordre des facteurs dans (3).

En plus des vecteurs libres, on considère en mécanique les vecteurs glissants et les vecteurs liés (voir ch. I, n° 1.1). Leur dérivation doit se faire avec beaucoup d'attention, car la définition de la dérivée a été établie pour un vecteur libre. Cette opération se fera donc en assimilant les vecteurs glissants et liés à des vecteurs libres, sans oublier de préciser par la suite la signification mécanique et géométrique de la dérivée du vecteur.

Passons maintenant à l'étude de la cinématique. Nous commencerons par la cinématique du point.

CHAPITRE VII

CINÉMATIQUE DU POINT

§ 1. Modes de définition du mouvement du point

1.1. Définition en coordonnées cartésiennes. Le mouvement d'un point dans l'espace peut être déterminé ou défini de différentes façons. Par rapport à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires (repère) $Oxyz$, considéré conventionnellement comme fixe, la position du point dans l'espace est définie par une abscisse x, une ordonnée y et une cote z. Si ces coordonnées sont déterminées ou définies à chaque instant donné, c'est-à-dire si l'on connaît

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \tag{7.1}$$

la position occupée par le point dans l'espace est connue à chaque instant. Il est à noter que pour les genres de mouvement que nous étudions, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sont des fonctions bornées et continues ainsi que leurs dérivées premières et secondes *). Les équations (7.1) s'appellent *équations du mouvement du point*; le mode de définition du mouvement à l'aide de ces équations s'appelle *définition en coordonnées cartésiennes.* Au point de vue mathématique, ces équations sont les équations paramétriques de la courbe, dite *trajectoire*, que décrit le point mobile dans l'espace. Eliminant le paramètre t, nous obtenons deux équations du mouvement qui établissent les relations entre les coordonnées x, y, z du point mobile sans faire intervenir le temps t.

1.2. Définition intrinsèque. Les équations de la trajectoire peuvent se présenter sous une forme générale:

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0. \tag{7.2}$$

Rappelons que chacune des équations (7.2) définit une surface dans l'espace, tandis que les deux équations définissent ensemble la courbe suivant laquelle ces deux surfaces se coupent entre elles. Bien que les équations (7.2) se laissent déduire de (7.1), elles ne suffisent pas à déterminer le mouvement, car le point peut parcourir la trajectoire donnée de différentes façons. Autrement dit, l'abscisse curviligne

---

*) Ces dernières peuvent être des fonctions discontinues du temps.

$s = \overset{\frown}{M_0M}$ du point M, M_0 étant une origine quelconque (fig. 7.1), peut varier de façons différentes en fonction du temps. Il est évident que le mouvement sera complètement défini si en plus des équations de la trajectoire sous forme géométrique (7.2) on se donne la loi de variation de l'abscisse curviligne s en fonction du temps, appelée *loi du mouvement* ou *équation horaire*.

La définition du mouvement d'un point sous la forme

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0, \quad s = s(t) \qquad (7.3)$$

s'appelle *définition intrinsèque*. La courbe représentative de la fonction $s = s(t)$ est le *diagramme du mouvement*.

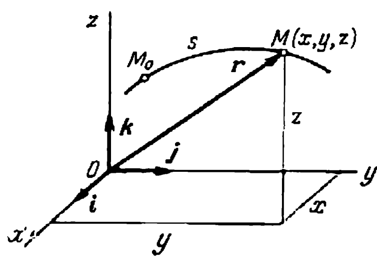


Fig. 7.1

1.3. Définition vectorielle. Ce mode de définition du mouvement dans le cas général n'est qu'une notation modifiée du premier procédé. Soient x, y, z les coordonnées de l'extrémité du rayon vecteur $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$ issu de l'origine des coordonnées O (fig. 7.1) ; le rayon vecteur se laisse écrire alors sous la forme $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Puisque les coordonnées du point mobile changent avec le temps, son rayon vecteur est, lui aussi, fonction du temps t:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}. \qquad (7.4)$$

La définition vectorielle du mouvement nous permettra plus tard de mieux cerner le caractère vectoriel de la vitesse du point mobile.

1.4. Mouvement plan. Les équations citées deviennent plus simples si, tout au long de son mouvement, le point est assujetti à rester dans un même plan fixe. Soit Oxy ce plan; on posera alors $z = 0$ dans les équations (7.1) à (7.3) et on n'écrira cette équation que pour souligner que le mouvement considéré est un cas particulier du mouvement général du point dans l'espace. Restant dans le cas plan, on écrira les équations du mouvement sous la forme

$$x = x(t), \qquad y = y(t). \qquad (7.1')$$

Dans le cas de la définition intrinsèque, le mouvement plan aura pour équations

$$\Phi(x, y) = 0, \qquad s = s(t) \qquad (7.3')$$

dont la première définit la trajectoire du point dans le plan Oxy et la deuxième est la loi du mouvement du point le long de sa trajectoire.

1.5. Définition du mouvement plan en coordonnées polaires. La position d'un point sur le plan peut aussi être définie en coordonnées

polaires. Soient un pôle O et un axe polaire Op. Tout point M différent de O est repéré par deux coordonnées r et ϑ, où r est la longueur du segment OM, dit *rayon polaire* de M, et ϑ, l'angle compté dans le sens antihoraire à partir de l'axe polaire vers le rayon polaire, dit *angle polaire* de M (fig. 7.2). Pour établir une correspondance biunivoque entre les points du plan et les couples de coordonnées polaires, on fixe les limites de variation des coordonnées

$$0 \leqslant r < \infty, \quad 0 \leqslant \vartheta < 2\pi$$

(l'angle polaire du pôle restant indéterminé). Par contre, si l'on veut avoir une correspondance continue au lieu de la correspondance biunivoque, comme c'est le cas en mécanique, on pose l'angle polaire du point M égal à

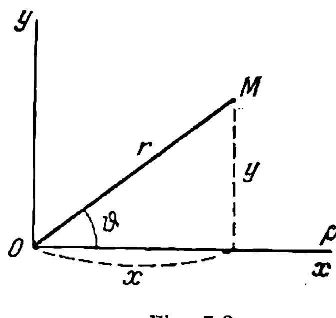


Fig. 7.2

$$\varphi = \widehat{MOp} + 2k\pi = \vartheta + 2k\pi$$

(k entier).

Les formules de passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes rectangulaires s'obtiennent aisément en faisant coïncider l'axe polaire Op avec l'axe des abscisses Ox (fig. 7.2):

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta. \tag{7.5}$$

Le passage inverse s'opère d'après les formules

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x}.$$

Pour savoir dans quel quadrant se situe l'angle ϑ, on donnera à $\cos \vartheta$ et à $\sin \vartheta$ les signes conformes à (7.5).

La position du point mobile sur le plan est déterminée si sont définies les fonctions

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t) \tag{7.6}$$

dans l'intervalle de temps considéré. Les équations (7.6) sont dites *équations du mouvement plan en coordonnées polaires*; la définition du mouvement à l'aide de ces équations s'appelle *définition en coordonnées polaires*.

Dans le cas où *le point parcourt une ligne droite* (que l'on associe à l'axe Ox), la définition en coordonnées cartésiennes et la définition intrinsèque de son mouvement consistent à définir l'abscisse du point mobile en fonction du temps:

$$x = x(t).$$

Examinons en conclusion deux exemples dont le premier se rapporte au cas plan.

Exemple 7.1. Le point M parcourt une circonférence fixe de rayon R dans le sens antihoraire. L'angle de rotation φ du rayon vecteur, compté à partir de l'axe Ox qui passe par le centre de la circonférence O et la position initiale M_0 du point M, varie proportionnellement au temps t: $\varphi = \omega t$ (fig. 7.3). Puisque $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, les équations du mouvement s'écriront sous la forme

$$x = R \cos \omega t, \qquad y = R \sin \omega t.$$

Elevant au carré chacune des équations et faisant leur somme, on arrive à éliminer le temps t; l'équation de la trajectoire devient

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

(On aurait pu d'ailleurs écrire tout de suite cette équation, qui est celle d'une

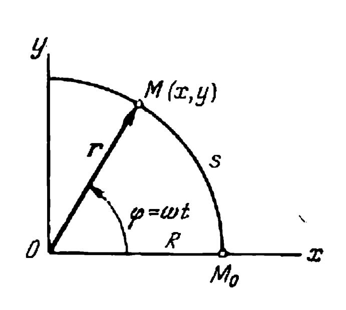


Fig. 7.3

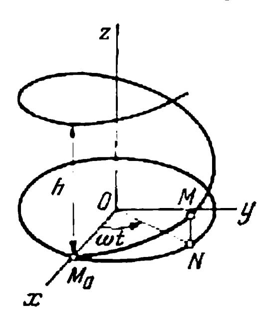


Fig. 7.4

circonférence dont le centre est à l'origine des coordonnées.) Puisque l'arc de circonférence

$$\overset{\frown}{M_0M} = s = R\varphi,$$

les équations

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad s = R\omega t$$

sont les équations intrinsèques du mouvement. Enfin, la fonction vectorielle $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$ s'écrit

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} = R(\boldsymbol{i} \cos \omega t + \boldsymbol{j} \sin \omega t),$$

ce qui revient à définir le mouvement sous forme vectorielle.

Exemple 7.2. Soient les équations du mouvement du point M

$$x = R \cos \omega t, \qquad y = R \sin \omega t, \qquad z = \frac{\omega h}{2\pi}\, t. \tag{7.7}$$

La projection N du point M sur le plan Oxy (fig. 7.4), définie par les coordonnées x, y, 0, effectue le mouvement décrit dans l'exemple 7.1 ci-dessus. Puisque pour le point N l'angle de rotation $\varphi(t) = \omega t$, ce point effectue une révolution complète autour de O suivant la circonférence de rayon R pendant le temps $T = 2\pi/\omega$, car $\varphi(T) = \omega T = 2\pi$. A l'instant initial $t = 0$ les points M et N occupent la position M_0. La cote z de M est proportionnelle au temps t et égale, à l'instant $t = T$, à

$$z(T) = \frac{\omega h}{2\pi}\, T = h.$$

Ainsi donc, le point M, en remontant en fonction du temps, s'élève à une hauteur h pendant la durée de la révolution complète de sa projection N, c'est-à-dire pendant le temps T. On dit alors que le point effectue un *mouvement hélicoïdal* ou parcourt une hélice de *pas h*. Les équations (7.7) sont les équations paramétriques d'une *courbe hélicoïdale*, ou *hélice*. De la dernière équation (7.7)

$$t = 2\pi z/(\omega h);$$

portant cette expression dans les deux premières équations (7.7), on obtient

$$x = R\cos\left(\frac{2\pi}{h}z\right), \quad y = R\sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right).$$

Ce sont les équations de la même trajectoire, c'est-à-dire de l'hélice, écrites sous la forme (7.2). L'équation horaire $s = s(t)$, nécessaire pour la définition intrinsèque du mouvement, pourrait être obtenue à partir de (7.7) en appliquant les formules appropriées du calcul intégral. Or, à la fin du paragraphe suivant (nº 2.3), nous établirons la formule en question qui sert à déterminer la longueur d'un arc de courbe gauche.

Pour terminer cet exemple, nous écrirons l'expression du rayon vecteur $\boldsymbol{r}(t)$ du point

$$\boldsymbol{r}(t) = R(\boldsymbol{i}\cos\omega t + \boldsymbol{j}\sin\omega t) + \frac{\omega h}{2\pi}t\boldsymbol{k}$$

utilisée pour la définition vectorielle du mouvement.

§ 2. Vitesse du point en mouvement curviligne

2.1. Vecteur vitesse du point. Supposons que le point mobile se trouve à l'instant t en position $M(x, y, z)$, et à l'instant $t' = t + \Delta t$ en position $M'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, en se déplaçant suivant un arc de trajectoire MM' (fig. 7.5). A la première position correspond le rayon vecteur $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$, et à la seconde le rayon vecteur $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{OM}'$. Le vecteur caractérisant le déplacement du point M pendant le temps Δt, ou *vecteur déplacement*, est égal à $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{MM}'$. On appelle *vecteur vitesse moyenne* entre les instants t et $t + \Delta t$ le rapport de $\Delta\boldsymbol{r}$ à Δt et on écrit

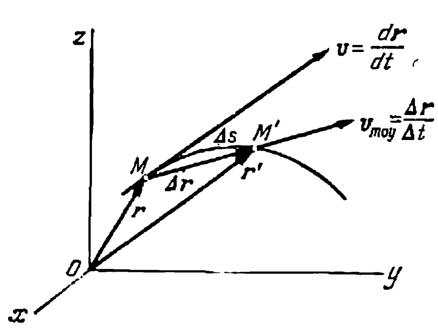


Fig. 7.5

$$v_{\text{moy}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}.$$

Puisque les projections du vecteur déplacement $\Delta\boldsymbol{r}$ sont Δx, Δy, Δz, on a

$$v_{\text{moy}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k}.$$

On appelle *vecteur vitesse du point M* à l'instant *t la limite vers laquelle tend le vecteur vitesse moyenne* quand Δt tend vers zéro :

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{v}_{\text{moy}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \boldsymbol{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \boldsymbol{j} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \boldsymbol{k},$$

ou

$$\boldsymbol{v} = \frac{dx}{dt} \boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt} \boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt} \boldsymbol{k}. \tag{7.8}$$

Les vecteurs $\boldsymbol{v}_{\text{moy}}$ et $\boldsymbol{v}$ sont montrés sur la figure 7.5.

Dans l'Introduction à la cinématique, nous avons considéré (nº 5) la dérivation d'un vecteur libre variable. Puisque le vecteur déplacement $\boldsymbol{MM'} = \Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r}$, la *vitesse du point M* est un *vecteur* appliqué en ce point et *équipollent à la dérivée du rayon vecteur* $\boldsymbol{r}$ *par rapport au temps* à l'instant considéré :

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \tag{7.9}$$

Le rayon vecteur ayant son origine en un point fixe, la notion de dérivée revêt une signification immédiate. Il sera utile de signaler que la formule (7.8) n'est autre qu'une forme d'écriture développée de (7.9) en coordonnées cartésiennes rectangulaires. Soulignons une fois de plus que le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ (t) est un vecteur ayant son origine fixe en O. Par contre, la vitesse $\boldsymbol{v}$ (t) du point a son origine en un point mobile M.

Il y a quelquefois intérêt à rapporter à l'origine des coordonnées un vecteur équipollent au vecteur vitesse : en ce cas l'extrémité du vecteur $\boldsymbol{v}$ (t) parcourt une trajectoire appelée *hodographe de la vitesse*. Cette notion est utile pour la dérivation du vecteur vitesse (voir nº 3.1).

2.2. Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes rectangulaires. Cherchons le module et la direction du vecteur vitesse. Puisque le vecteur déplacement $\boldsymbol{MM'}$ est dirigé suivant la corde MM' de la trajectoire et que la position limite d'une corde est la tangente à la courbe, le vecteur vitesse est porté par la tangente à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement. Quant au module de la vitesse, il est égal à

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{MM'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{MM'}{\overset{\frown}{MM'}} \frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta t} \right),$$

d'où, en désignant la longueur de l'arc MM' par Δs et en se rappelant que la limite du rapport de la longueur de la corde sous-tendant un arc à la longueur de l'arc est égale à 1, on déduit que

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Avec le sens de parcours fixé, on a $\Delta s > 0$ pour $\Delta t > 0$. Dans le cas général le *module de la vitesse* s'écrira

$$v = \left| \frac{ds}{dt} \right|. \qquad (7.10)$$

Remarquons que la formule (7.10) ne permet de déterminer directement le module de la vitesse que si le mouvement est défini par équations intrinsèques. Dans le cas où le mouvement est défini en coordonnées cartésiennes, nous connaissons les projections de la vitesse (voir formule (7.8) et remarque à la formule (1) du n° 5 de l'Introduction à la cinématique) sur les axes de coordonnées:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Le *module du vecteur vitesse* s'écrira donc sous la forme

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \qquad (7.11)$$

L'unité SI de module de la vitesse (voir ch. I, n° 2.3) est le mètre par seconde (m/s).

Transformant le radicande de (7.11), on déduit des formules (7.10) et (7.11)

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}}{dt},$$

expression conforme à celle de la différentielle de la longueur d'un arc établie dans le cours de calcul différentiel (voir N. P i s k o u n o v, tome I, ch. XII, § 3):

$$ds = \pm \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

La direction du vecteur vitesse et, par conséquent, celle de la tangente à la trajectoire sont définies à l'aide des *cosinus directeurs*

$$\left.\begin{aligned} \cos(\widehat{v, Ox}) &= \frac{v_x}{v} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}, \\ \cos(\widehat{v, Oy}) &= \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\widehat{v, Oz}) = \frac{v_z}{v}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.12)$$

Ici $(\widehat{v, Ox})$, $(\widehat{v, Oy})$, $(\widehat{v, Oz})$ sont les angles que fait le vecteur vitesse avec la direction positive des axes Ox, Oy, Oz respectivement.

2.3. Vitesse algébrique. Espace parcouru. Rappelons que s est l'abscisse curviligne, c'est-à-dire la longueur de l'arc de courbe (trajectoire) comptée (avec le signe approprié) à partir d'un point fixe

M_0 de la trajectoire. Le choix du signe de s correspond à la définition du sens positif de la tangente à la courbe. On admet donc que le sens positif de la tangente est le sens des valeurs croissantes de l'abscisse curviligne s du point mobile.

Convenons d'associer à chaque vecteur vitesse v_v du point une valeur algébrique v_τ (positive ou négative) définie par

$$v_\tau = \frac{ds}{dt} \tag{7.13}$$

et appelée *vitesse algébrique*. Ainsi donc, la vitesse algébrique est positive lorsque le vecteur vitesse est orienté dans le sens des abscisses curvilignes croissantes (c'est-à-dire dans le sens qui coïncide avec la direction positive de la tangente à la courbe au point considéré) et négative quand le vecteur vitesse est orienté dans le sens des abscisses décroissantes (c'est-à-dire dans le sens inverse de la direction positive de la tangente).

Le vecteur vitesse du point étant toujours dirigé le long de la tangente à la trajectoire, la vitesse algébrique du point

$$v_\tau = \pm v \text{ (v est le module de la vitesse !)}$$

est égale à la projection du vecteur vitesse sur la direction de la tangente au point considéré.

Si le module de la vitesse est défini en fonction du temps, $v = v(t)$, la formule (7.10) permet de déterminer l'espace S parcouru par le point pendant tout intervalle de temps. En effet, multiplions les deux membres de (7.10) par $dt > 0$:

$$|ds| = v(t)\,dt.$$

Intégrant par rapport au temps de 0 à t et par rapport à l'espace parcouru de 0 à S (avec $t = 0$ et $S = 0$ à l'instant initial), on obtient

$$\int_0^S |ds| = \int_0^t v(t)\,dt;$$

en définitive, l'*espace parcouru* est égal à

$$S = \int_0^t v(t)\,dt. \tag{7.14}$$

Dans le cas particulier où la vitesse est constante en module pendant toute la durée du mouvement, $v(t) = V$, le mouvement curviligne est appelé *mouvement uniforme*. De la formule (7.14) on a dans ce cas

$$S = Vt.$$

Cette formule est la loi de variation de l'espace parcouru en mouvement curviligne uniforme.

Les formules de la vitesse du point animé d'un mouvement plan défini en coordonnées polaires seront établies dans le ch. XI, nº 1.3.

E x e m p l e 7.3. Mêmes conditions que dans l'exemple 7.2. Les équations du mouvement (7.7) nous donnent

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -R\omega \sin \omega t, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = R\omega \cos \omega t, \qquad v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega h}{2\pi}.$$

Le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ s'écrira sous la forme

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{i} R\omega \sin \omega t + \boldsymbol{j} R\omega \cos \omega t + \frac{\omega h}{2\pi} \boldsymbol{k},$$

et son module sera égal à

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} =$$
$$= \sqrt{R^2\omega^2 \sin^2 \omega t + R^2\omega^2 \cos^2 \omega t + \frac{\omega^2 h^2}{4\pi^2}} = \frac{\omega}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2}.$$

Les cosinus directeurs du vecteur vitesse sont

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{v}, Ox}) = \frac{v_x}{v} = -\frac{2\pi R}{\Gamma} \sin \omega t,$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{v}, Oy}) = \frac{v_y}{v} = \frac{2\pi R}{\Gamma} \cos \omega t,$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{v}, Oz}) = \frac{v_z}{v} = \frac{h}{\Gamma},$$

où $\Gamma = \sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2}$. On voit sans peine que la somme des carrés des cosinus directeurs est égale à l'unité, ce qui est conforme à la formule connue de la géométrique analytique. Puisque $\cos(\widehat{\boldsymbol{v}, Oz}) = \text{const}$, la tangente à l'hélice forme en chaque point de la courbe un angle constant avec l'axe Oz:

$$\gamma = (\widehat{\boldsymbol{v}, Oz}) = \arccos \frac{h}{\Gamma}.$$

Le module de la vitesse restant inchangé pendant toute la durée du mouvement, le mouvement hélicoïdal défini par les équations (7.7) est uniforme. Si la position initiale du point est M_0 (voir fig. 7.4), on a

$$S(t) = vt = \frac{\omega\Gamma}{2\pi} t.$$

L'espace S parcouru pendant le temps $T = 2\pi/\omega$ (voir l'exemple 7.2) est égal à

$$S = \frac{\omega\Gamma}{2\pi} \frac{2\pi}{\omega} = \Gamma = 2\pi R \sqrt{1 + \frac{h^2}{4\pi^2 R^2}}.$$

Nous venons de définir la longueur d'une spire d'hélice avec les seules formules de cinématique. La rapport $h^2/(4\pi^2 R^2)$ est généralement très inférieur à l'unité. Utilisant un développement connu de la théorie des séries

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + \dots$$

(voir N. P i s k o u n o v, tome II, ch. XVI, § 19), nous pouvons donner à la longueur d'une spire d'hélice une expression approchée

$$S \approx 2\pi R \left(1 + \frac{h^2}{8\pi^2 R^2}\right).$$

§ 3. Accélération du point en mouvement curviligne

3.1. Vecteur accélération du point. Supposons que le point mobile M possède à l'instant t un vecteur vitesse $v = v(t)$, et à l'instant $t' = t + \Delta t$, se trouvant en M', un vecteur vitesse $v' = v(t + \Delta t)$ (fig. 7.6). Plaçons l'origine de v' au point fixe de l'espace occupé par le point mobile M à l'instant t, ce qui revient à construire le vecteur v'_M. Construisons ensuite le vecteur Δv (accroissement du vecteur v):

$$\Delta v = v'_M - v.$$

Portons à partir de M un vecteur $\Delta v/\Delta t$ égal au rapport de l'accroissement du vecteur vitesse à l'accroissement du temps Δt (voir

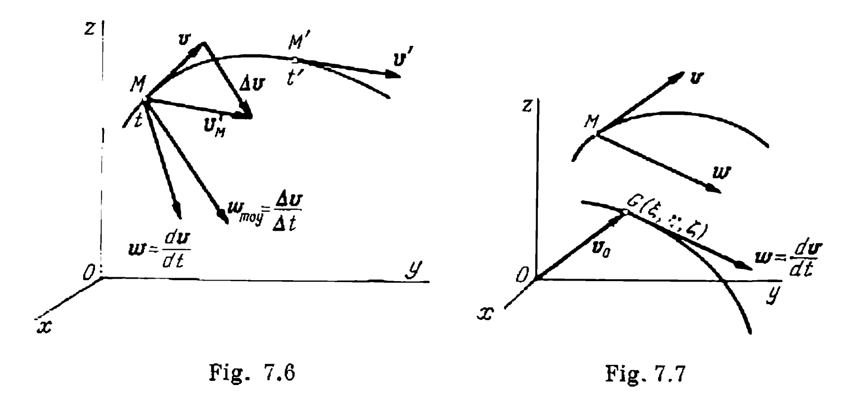


Fig. 7.6 Fig. 7.7

fig. 7.6). Ce vecteur s'appelle *vecteur accélération moyenne* pendant le temps $(t,\ t + \Delta t)$:

$$w_{\text{moy}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Par *vecteur accélération* w d'un point M à l'instant t, on entend la *limite vers laquelle tend le vecteur accélération moyenne* quand Δt tend vers zéro:

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} w_{\text{moy}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Conformément à ce qu'on a vu dans le nº 5 de l'Introduction à la cinématique, l'*accélération du point mobile M* est un *vecteur* appliqué en M et *égal à la dérivée du vecteur vitesse v par rapport au temps*

à l'instant considéré:

$$w = \frac{dv}{dt}. \tag{7.15}$$

Considérons la relation entre le vecteur accélération et ce que nous avons appelé plus haut hodographe de la vitesse. Appliquons le vecteur v à l'origine O du système de coordonnées fixe $Oxyz$, ce qui revient à construire en O un vecteur v_O équipollent à v, et désignons son extrémité par G (fig. 7.7). Puisque le vecteur v est en général variable en fonction du temps, le point G se déplace dans l'espace. La trajectoire suivie par le point G est l'*hodographe de la vitesse*. Puisque les projections du vecteur vitesse sur les axes Ox, Oy et Oz sont dx/dt, dy/dt, dz/dt, les coordonnées du point G (ξ, η, ζ) de l'hodographe sont

$$\xi = v_x = \frac{dx}{dt}, \quad \eta = v_y = \frac{dy}{dt}, \quad \zeta = v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{7.16}$$

Ce sont les équations de l'hodographe de la vitesse sous forme paramétrique. Eliminant le paramètre (le temps t), on obtient les équations de l'hodographe écrites en termes de coordonnées.

Le vecteur vitesse du point G de l'hodographe

$$\frac{d\xi}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{d\eta}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{d\zeta}{dt}\boldsymbol{k} = \frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dv_z}{dt}\boldsymbol{k} = \frac{dv}{dt}$$

est équipollent, en vertu de (7.15), au vecteur accélération w du point mobile M (voir fig. 7.7).

3.2. Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes rectangulaires. Il ressort des formules (7.15) et (7.9) que

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}, \tag{7.17}$$

c'est-à-dire que le vecteur accélération d'un point mobile M est équipollent à la dérivée seconde du rayon vecteur de M par rapport au temps. Puisque le rayon vecteur admet la représentation

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k},$$

la formule (7.17) permet de décomposer le vecteur accélération suivant les axes de coordonnées cartésiennes rectangulaires:

$$w = \frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{k}. \tag{7.18}$$

La formule (7.18) se laisse déduire également des formules (7.15) et (7.8). Les projections du vecteur accélération du point sur les axes de coordonnées s'écriront

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}, \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt}, \quad w_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv_z}{dt}, \tag{7.19}$$

où x, y, z sont les coordonnées du point mobile déduites des équations du mouvement (7.1).

Le *module de l'accélération* s'écrira

$$w=\sqrt{w_x^2+w_y^2+w_z^2}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}, \qquad (7.20)$$

et les cosinus directeurs du vecteur accélération,

$$\cos(\widehat{w, Ox})=\frac{w_x}{w}=\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}},$$
$$\cos(\widehat{w, Oy})=\frac{w_y}{w}, \quad \cos(\widehat{w, Oz})=\frac{w_z}{w}. \qquad (7.21)$$

L'unité SI de module d'accélération est le mètre par seconde au carré (m/s²).

Les formules (7.19) définissent les projections du vecteur accélération sur les axes du système fixe de coordonnées cartésiennes rectangulaires $Oxyz$. Il y a intérêt à définir les projections du vecteur

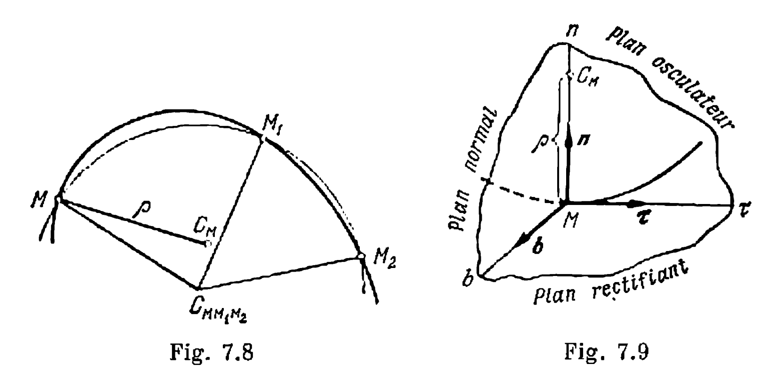


Fig. 7.8 Fig. 7.9

accélération sur les axes d'un système mobile de coordonnées rectangulaires dont l'origine est confondue avec le point mobile M et les directions des axes sont définies par la trajectoire elle-même. Avant de le faire, nous rappellerons en quelques lignes la théorie des courbes gauches (pour plus de détails, voir N. P i s k o u n o v, tome I, ch. IX, §§ 1 à 4).

3.3. Axes intrinsèques. Parmi les courbes planes, la plus simple est la circonférence. N'est-il pas possible d'approcher certaines portions d'une courbe gauche par des arcs de circonférences?

Prenons sur une courbe trois points voisins M, M_1, M_2 (fig. 7.8). Il existe un plan MM_1M_2 et une circonférence de centre $C_{MM_1M_2}$

passant par ces points. Si M, M_1, M_2 ne sont pas alignés, on n'a qu'un seul plan et une seule circonférence. Supposons que les points M_1 et M_2 se rapprochent indéfiniment du point M: le plan MM_1M_2 tend alors vers une position limite que nous appelons *plan osculateur* de la courbe en M. Le plan osculateur contient également la position limite de la circonférence ayant son centre en $C_{MM_1M_2}$ et passant par les points M, M_1, M_2; cette position limite s'appelle *circonférence* (ou *cercle*) *de courbure* pour M. Soit C_M le centre de la circonférence de courbure pour M, c'est-à dire la position limite vers laquelle tend le point $C_{MM_1M_2}$ quand les points M_1 et M_2 se rapprochent indéfiniment du point M. Le rayon $\rho = C_M M$ de la circonférence de courbure s'appelle *rayon de courbure* de la courbe en M.

La tangente $M\tau$ à la courbe en M, étant position limite de la corde MM_1, est contenue dans le plan osculateur. On appelle *plan normal* le plan passant par le point M et perpendiculaire à la tangente $M\tau$. Toute droite passant par M et contenue dans ce plan, est une *normale* à la courbe en M.

Les normales à la courbe en un point forment un faisceau de droites parmi lesquelles on distingue la *normale principale* Mn située dans le plan osculateur et la *binormale* Mb perpendiculaire à la normale principale. Puisque le centre de courbure C_M appartient, lui aussi, au plan osculateur et que le rayon de courbure $C_M M$ est perpendiculaire à la tangente $M\tau$, on conçoit que la normale principale est la droite qui se confond avec le rayon de courbure.

Choisissons un système de coordonnées (repère) mobile en donnant à ses axes les directions suivantes:

1° la tangente $M\tau$ dont le vecteur unité $\boldsymbol{\tau}$ est orienté dans le sens des valeurs croissantes de l'abscisse curviligne s (voir n° 2.2);

2° la normale principale Mn dont le vecteur unité $\boldsymbol{n}$ est orienté vers le centre de courbure (c'est-à-dire vers la concavité de la courbe);

3° la binormale Mb dont le vecteur unité $\boldsymbol{b}$ est orienté d'après la règle de la vis à droite, la rotation se faisant du vecteur unité de la tangente vers celui de la normale principale (fig. 7.9).

De tels axes de coordonnées sont appelés *axes intrinsèques*.

Désignons par $\Delta\beta$ l'angle entre deux tangentes menées en deux points voisins M, M' de la courbe (fig. 7.10), et par Δs, la longueur de l'arc MM'. On montre (voir N. P i s k o u n o v, tome I, ch. IX, § 4) que le rayon de courbure ρ de la courbe en M est l'inverse de sa courbure k:

$$\rho = \frac{1}{k}, \quad \text{où} \quad k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta s}. \tag{7.22}$$

3.4. Accélération tangentielle et accélération normale du point. Proposons-nous de définir les projections du vecteur accélération sur les axes intrinsèques.

Donnons-nous un instant déterminé t, de manière à fixer la position du point mobile M. Construisons le vecteur vitesse $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ du point M et le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}(t + \Delta t)$ du point M' qui correspond à l'instant $t' = t + \Delta t$ (fig. 7.11). Reportons le vecteur v' au point M et construisons le vecteur

$$\boldsymbol{LN} = \Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}.$$

Sur la direction de $\boldsymbol{v}$, portons à partir du point M un vecteur $\boldsymbol{MK}$ égal en module à v', en sorte que $MK = v'$. Le vecteur $\boldsymbol{LN}$ est égal à la somme géométrique des vecteurs $\boldsymbol{LK}$ et $\boldsymbol{KN}$:

$$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{LK} + \boldsymbol{KN}.$$

Par définition, le vecteur accélération en M est égal à

$$\boldsymbol{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{LK}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{KN}}{\Delta t}. \tag{7.23}$$

Cherchons d'abord la limite du premier terme de la somme.

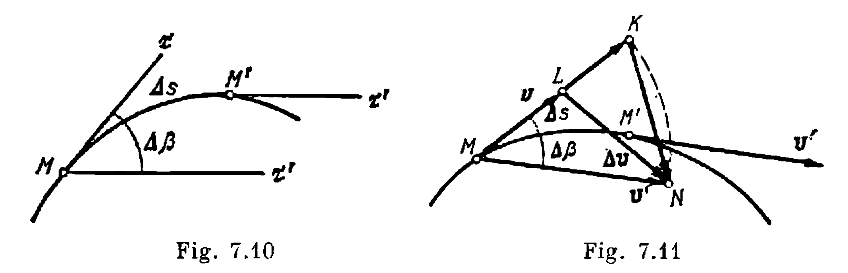


Fig. 7.10 Fig. 7.11

Puisque le vecteur $\boldsymbol{LK}$ est colinéaire à $\boldsymbol{v}$, la direction du vecteur $\boldsymbol{LK}/\Delta t$ reste constante pour t fixe et Δt variable ; elle se définit de la même façon que la direction de la vitesse, c'est-à-dire par le vecteur unité $\boldsymbol{\tau}$ de la tangente. Le module du vecteur $\boldsymbol{LK}$ (au cas où le module de la vitesse de M croît et le mouvement se fait dans le sens de la direction positive de la tangente à la trajectoire, voir fig. 7.11), est égal à

$$LK = MK - ML = v' - v = \Delta v,$$

où Δv est l'accroissement du module de la vitesse. On a donc

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{LK}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \boldsymbol{\tau} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau}.$$

Pour déterminer le module de la limite du second terme de la somme, construisons un arc de circonférence KN de rayon $MK = MN = v'$. L'angle au centre interceptant cet arc est un angle compris entre deux tangentes en M et M' ; nous l'avons désigné

précédemment par $\Delta\beta$. Transformons le rapport $KN/\Delta t$:

$$\frac{KN}{\Delta t}=\frac{KN}{\widehat{KN}}\frac{\widehat{KN}}{\Delta t}=\frac{KN}{\widehat{KN}}\frac{v'\Delta\beta}{\Delta t}=\frac{KN}{\widehat{KN}}v'\frac{\Delta\beta}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

En effet, la longueur de $\widehat{KN}$ est égale à $v'\Delta\beta$, car $\widehat{KN}$ est un arc de circonférence. Sachant que

$$\lim_{M'\to M}\frac{KN}{\widehat{KN}}=1$$

et faisant intervenir les formules (7.10) et (7.22), on obtient

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{KN}{\Delta t}=vkv=\frac{v^2}{\rho}.$$

Reste à déterminer la direction limite du vecteur $KN/\Delta t$. Etant donné que

$$\widehat{MKN}=\frac{\pi}{2}-\frac{\Delta\beta}{2}\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}\frac{\pi}{2},$$

la direction limite en question est perpendiculaire à la tangente et appartient au plan osculateur, c'est-à-dire se confond avec la direction de la normale principale Mn. On a donc

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{KN}{\Delta t}=\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}.$$

L'égalité (7.23) devient

$$\boldsymbol{w}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}. \tag{7.24}$$

Ainsi donc, les projections du vecteur accélération du point sur les deux premiers axes intrinsèques sont

$$w_\tau=\frac{dv}{dt}, \tag{7.25}$$

$$w_n=\frac{v^2}{\rho}, \tag{7.26}$$

tandis que sa projection w_b sur la binormale est identiquement nulle. Il en découle que le vecteur accélération est situé dans le plan osculateur $M\tau n$ (fig. 7.12). Ces formules permettent de déterminer le *module du vecteur accélération*

$$w=\sqrt{w_\tau^2+w_n^2}$$

et de définir sa direction par le calcul de l'angle $\delta=(\widehat{\boldsymbol{w},\boldsymbol{n}})$:

$$\operatorname{tg}\delta=\frac{w_\tau}{w_n}=\frac{\rho}{v^2}\frac{dv}{dt}.$$

La formule (7.25) reste aussi valable pour les intervalles de temps pendant lesquels le module v de la vitesse du point décroît, le mouvement étant effectué toujours dans le sens de la direction positive de la tangente à la trajectoire. On a alors $dv/dt < 0$, c'est-à-dire que la projection du vecteur accélération du point sur la tangente est négative. Autrement dit, le vecteur *accélération tangentielle*

$$\frac{dv}{dt}\tau$$

d'un point animé d'une vitesse de module décroissant est orienté dans le sens inverse du mouvement. C'est l'indice qui permet de

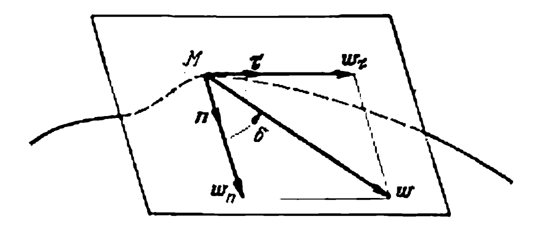


Fig. 7.12

reconnaître le mouvement accéléré ou retardé d'un point sur la courbe : le vecteur accélération tangentielle du point est orienté dans le sens du mouvement ou dans le sens inverse du mouvement.

R e m a r q u e 1. Pour tenir compte des cas où le point se déplace sur la courbe dans le sens des valeurs décroissantes de l'abscisse curviligne s (dans le sens inverse du vecteur unité τ) ou change de sens de mouvement, il convient de modifier la formule (7.25) de la projection du vecteur accélération sur la tangente en l'écrivant sous la forme

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}. \tag{7.25a}$$

Ici v_τ est la vitesse algébrique (projection du vecteur vitesse sur la tangente) définie par la formule (7.13). La formule (7.24) s'écrit dans les cas signalés

$$w = w_\tau + w_n = \frac{d^2s}{dt^2}\tau + \frac{v^2}{\rho}n. \tag{7.24a}$$

L'indice d'un mouvement accéléré du point sur la courbe signalé plus haut reste en vigueur comme précédemment.

La projection du vecteur accélération du point sur la normale principale est toujours non négative ; autrement dit, le vecteur *accélération normale*

$$w_n = \frac{v^2}{\rho}n$$

d'un point mobile est toujours dirigé vers le centre de courbure (quand cette accélération est non nulle).

Si pendant le temps considéré, le point se déplace avec une vitesse constante en module (mouvement uniforme), on a $w_\tau = dv/dt \equiv 0$. L'accélération totale w du point se réduit alors à son accélération normale, $w \equiv w_n$.

Si le point se déplace suivant une ligne droite, son accélération normale est égale à zéro, car la droite est une courbe de courbure nulle, $k = 1/\rho = 0$. L'accélération d'un point en mouvement rectiligne se réduit donc à son accélération tangentielle.

Dans le cas où le point décrit une droite d'un mouvement uniforme et dans ce cas seulement, son vecteur accélération w est identiquement nul.

Remarque 2. On peut utiliser la première formule de Serret-Frénet (voir N. Piskounov, tome I, ch. IX, § 5) de la dérivée du vecteur unité τ de la tangente par rapport au temps,

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt}\boldsymbol{n},$$

pour établir la formule (7.24a) sans passer par (7.24). En effet, on a en vertu de (7.13)

$$\boldsymbol{v} = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau},$$

d'où

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{\tau} + \frac{ds}{dt}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n},$$

car $v^2 = (ds/dt)^2$.

Si le mouvement du point est défini par ses équations en coordonnées cartésiennes, on peut chercher les modules des vecteurs vitesse et accélération en fonction du temps d'après les formules (7.11) et (7.20). Ensuite on peut déterminer la projection w_τ du vecteur accélération sur la tangente d'après les formules (7.25) ou (7.25a). Puis on détermine la projection w_n du vecteur accélération sur la normale principale:

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} \qquad (7.27)$$

et enfin le rayon de courbure de la trajectoire en fonction de t (c'est-à-dire à un instant quelconque) d'après la formule (7.26):

$$\rho = \frac{v^2}{w_n}. \qquad (7.28)$$

On peut se demander quelles sont les projections du vecteur vitesse sur les axes intrinsèques. La réponse est bien simple: en effet, le vecteur vitesse est porté par la tangente à la trajectoire, ce qui fait que $v_\tau = \pm v$, $v_n = v_b \equiv 0$. Si v est de même sens que le

vecteur unité τ, on a $v_\tau = v$, s'il est de sens opposé, on a $v_\tau = -v$.

Les formules exprimant l'accélération du point animé d'un mouvement plan défini en coordonnées polaires seront établies dans le chapitre XI, n° 1.3.

Exemple 7.4. Soient les équations du mouvement du point

$$x=\frac{1}{2p}t^2, \quad y=t \qquad (p>0).$$

Déterminer l'équation de la trajectoire, ainsi que la vitesse, l'espace parcouru, l'accélération et le rayon de courbure à l'instant $t = p$.

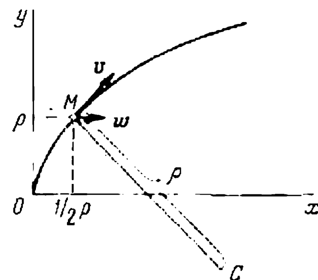


Fig. 7.13

Solution. Eliminons t entre les équations du mouvement. Il vient

$$x=\frac{1}{2p}y^2, \quad \text{si bien que} \quad y^2=2px$$

Or, pour $t = 0$ on a $x = y = 0$, et pour $t>0$ on a $x > 0$ et $y > 0$; la trajectoire n'occupe donc pas la parabole tout entière mais seulement sa partie supérieure (fig. 7.13). Pour $t = p$ les coordonnées du point M sont $\left(\frac{1}{2}p,\ p\right)$. Calculons les projections du vecteur vitesse sur les axes de coordonnées:

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{1}{p}t, \quad v_y=\frac{dy}{dt}=1,$$

puis son module

$$v(t)=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\frac{1}{p}\sqrt{t^2+p^2}.$$

Les cosinus directeurs du vecteur vitesse se définiront d'après les formules (7.12):

$$\cos(\widehat{v,\ Ox})=\frac{v_x}{v}=\frac{t}{\sqrt{t^2+p^2}}, \quad \cos(\widehat{v,\ Oy})=\frac{v_y}{v}=\frac{p}{\sqrt{t^2+p^2}}.$$

A l'instant $t = p$ le module et les cosinus directeurs du vecteur vitesse seront respectivement

$$v(p)=\sqrt{2}, \ \cos(\widehat{v(p),\ Ox})=\cos(\widehat{v(p),\ Oy})=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

si bien que

$$(\widehat{v(p),\ Ox})=(\widehat{v(p),\ Oy})=\frac{\pi}{4}.$$

L'espace parcouru par le point entre l'instant initial $t = 0$ et l'instant $t = p$ se définira par la formule (7.14):

$$S(p)=\frac{1}{p}\int_0^p\sqrt{t^2+p^2}\,dt=\frac{1}{2p}\left[t\sqrt{t^2+p^2}+p^2\ln\left(t+\sqrt{t^2+p^2}\right)\right]\Big|_0^p=$$
$$=\frac{1}{2}p\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]=1{,}15p.$$

Les projections du vecteur accélération sur les axes Ox, Oy sont

$$w_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{1}{p}, \qquad w_y=\frac{dv_y}{dt}=0.$$

Cela revient à dire que le vecteur accélération $\boldsymbol{w}$ est constant en module ($w = 1/p$) et reste parallèle à l'axe Ox pendant toute la durée du mouvement (voir fig. 7.13). La projection du vecteur accélération sur la tangente sera déduite à l'aide de la formule (7.25):

$$w_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{t}{p\sqrt{t^2+p^2}},$$

après quoi on cherchera l'autre projection (sur la normale principale):

$$w_n=\sqrt{w^2-w_\tau^2}=\sqrt{\frac{1}{p^2}-\frac{t^2}{p^2(t^2+p^2)}}=\frac{1}{\sqrt{t^2+p^2}}.$$

Enfin, la formule (7.28) permet de déterminer le rayon de courbure de la trajectoire à l'instant quelconque du mouvement:

$$\rho(t)=\frac{v^2}{w_n}=\frac{1}{p^2}(t^2+p^2)\sqrt{t^2+p^2}.$$

A l'instant $t = p$ on a

$$\rho(p) = 2\sqrt{2}\,p.$$

On voit sur la figure 7.13 le centre de courbure C pour le point M de la trajectoire; on a $CM = \rho(p)$.

Exemple 7.5. Dans les conditions des exemples 7.2 et 7.3 on a

$$w_x=\frac{dv_x}{dt}=-R\omega^2\cos\omega t, \quad w_y=\frac{dv_y}{dt}=-R\omega^2\sin\omega t, \quad w_z=\frac{dv_z}{dt}=0.$$

Le vecteur accélération $\boldsymbol{w}$ s'écrira sous la forme

$$\boldsymbol{w} = w_x\boldsymbol{i} + w_y\boldsymbol{j} + w_z\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{i}R\omega^2\cos\omega t - \boldsymbol{j}R\omega^2\sin\omega t,$$

et son module

$$w=\sqrt{w_x^2+w_y^2+w_z^2}=\sqrt{R^2\omega^4\cos^2\omega t+R^2\omega^4\sin^2\omega t}=R\omega^2$$

est une grandeur constante. Déterminons les cosinus directeurs du vecteur accélération d'après les formules (7.21):

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{w}, Ox})=\frac{w_x}{w}=-\cos\omega t, \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{w}, Oy})=$$

$$=\frac{w_y}{w}=-\sin\omega t, \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{w}, Oz})=\frac{w_z}{w}=0.$$

De cette dernière formule il ressort que

$$(\widehat{\boldsymbol{w}, Oz})=\frac{\pi}{2}.$$

Autrement dit, pendant le mouvement du point M son vecteur accélération est toujours perpendiculaire à l'axe Oz et appartient donc à un plan parallèle à Oxy. Puisque le module du vecteur vitesse est une grandeur constante (voir l'exem-

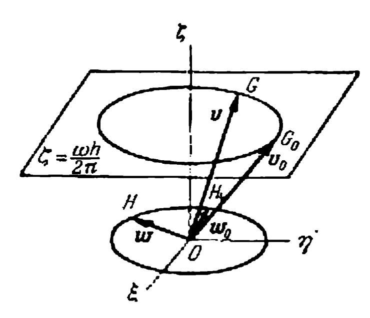


Fig. 7.14

ple 7.3), la projection du vecteur accélération du point sur la tangente s'annule,

$$w_\tau=\frac{dv}{dt}=0.$$

Si l'accélération tangentielle s'annule, l'accélération normale w_n se confond avec l'accélération totale du point w, si bien qu'on a

$$w_n = w = R\omega^2.$$

Le rayon de courbure de la trajectoire (en l'occurrence une hélice) s'obtient à partir de la formule (7.27):

$$\rho=\frac{v^2}{w_n}=\frac{\omega^2(4\pi^2R^2+h^2)}{4\pi^2R\omega^2}=R+\frac{h^2}{4\pi^2R}.$$

Ainsi donc, l'hélice a un rayon de courbure constant en chacun de ses points.

Pour terminer cet exemple, proposons-nous de définir les hodographes de la vitesse et de l'accélération. Prenons les équations (7.16)

$$\xi=v_x=-R\omega\sin\omega t,\quad \eta=v_y=R\omega\cos\omega t,\quad \zeta=v_z=\frac{\omega h}{2\pi}$$

et éliminons le temps t. Il vient

$$\xi^2+\eta^2=R^2\omega^2,\quad \zeta=\frac{\omega h}{2\pi}.$$

Ces équations déterminent une circonférence dans le plan $\zeta = \omega h/(2\pi)$, de centre sur l'axe $O\zeta$ et de rayon $R\omega$ (fig. 7.14). Sur cette figure, le point M_0 se fait correspondre le point G_0 de l'hodographe de la vitesse.

Plaçons l'origine du vecteur accélération w au point fixe O: son extrémité H décrit alors une trajectoire appelée hodographe de l'accélération. On obtient ses équations à partir des équations

$$\xi = w_x = -R\omega^2\cos\omega t,\qquad \eta = w_y = -R\omega^2\sin\omega t,\qquad \zeta = w_z = 0,$$

où on élimine le temps t. Il vient

$$\xi^2+\eta^2 = R^2\omega^4,\qquad \zeta = 0.$$

Ces équations déterminent une circonférence dans le plan $O\xi\eta$, de centre O et de rayon $R\omega^2$ (voir fig. 7.14). Le point M_0 se fait correspondre alors le point H_0 de l'hodographe de l'accélération.

3.5. Mouvement rectiligne du point. Avant de terminer ce chapitre, nous examinerons le mouvement rectiligne du point, qui est un cas particulier du mouvement curviligne.

Supposons que la droite parcourue par le point soit confondue avec l'axe Ox. Comme nous l'avons remarqué en fin du n° 1.5, la définition intrinsèque du mouvement ne se distingue en rien, dans ce cas, de sa définition en coordonnées cartésiennes. Soit donc une fonction $x = x(t)$. Puisque dans le cas du mouvement rectiligne considéré $y = z \equiv 0$, on a

$$v = \frac{dx}{dt} i, \quad w = \frac{d^2x}{dt^2} i;$$

nous utiliserons les valeurs algébriques de la vitesse et de l'accélération, car leur signe définit le sens du vecteur correspondant. Dans ce cas (et seulement dans ce cas) on a le droit d'écrire que

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad w = \frac{dv}{dt}.$$

Examinons à titre d'exemple le cas du mouvement rectiligne uniformément varié, avec $w \equiv a$ (a constant positif ou négatif). On a donc $dv/dt = a$ ou $dv = a\,dt$. Intégrant par rapport à t de 0 à t et par rapport à v de v_0 à v, on obtient

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\,dt, \quad v = v_0 + at. \tag{7.29}$$

Il vient ensuite

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 + at, \quad dx = (v_0 + at)\,dt.$$

Les intégrations sur t entre les mêmes bornes et sur x entre x_0 et x donnent

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_0 + at)\,dt, \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \tag{7.30}$$

Pour x_0 et v_0 donnés, les formules (7.29) et (7.30) peuvent être considérées comme deux égalités où interviennent quatre variables t, x, v, a. Deux variables étant connues, les deux autres peuvent être déterminées. Il y a intérêt à déduire de (7.29) et (7.30) la formule suivante :

$$x = x_0 + \frac{1}{2} v_0 t + \frac{1}{2} (v_0 + at)\,t = x_0 + \frac{1}{2} (v_0 + v)\,t. \tag{7.31}$$

Si $x_0 = v_0 = 0$, on a la formule

$$v^2 = a^2t^2 = 2a\,\frac{at^2}{2} = 2ax. \tag{7.32}$$

Exemple 7.6. La manivelle $OA = r$ est animée d'un mouvement circulaire uniforme autour d'un point fixe O, ce qui revient à dire que son angle de rotation φ (fig. 7.15) est proportionnel au temps t, $\varphi = \omega t$. Dans son point A la manivelle est articulée sur la bielle $AB = l$; cette dernière met en mouve-

ment, par l'intermédiaire d'une articulation, le coulisseau B qui se déplace entre deux glissières de guidage parallèles. On demande de savoir la vitesse et l'accélération du coulisseau B.

S o l u t i o n. Plaçons l'origine des coordonnées en O et orientons l'axe Ox suivant OB. De la figure 7.15 on a

$$x = OB = OC + CB = r\cos\varphi + l\cos\psi.$$

On a dans le triangle OAB d'après le théorème des sinus

$$\frac{\sin\psi}{r} = \frac{\sin\varphi}{l}, \quad \text{ou} \quad \sin\psi = \frac{r}{l}\sin\varphi.$$

Désignons le rapport r/l par λ et calculons

$$\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}.$$

En portant l'expression de $\cos\psi$ dans l'équation en x et en se rappelant que

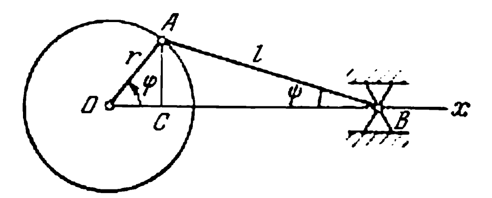


Fig. 7.15

$\varphi = \omega t$, on obtient l'équation du mouvement du coulisseau B sous la forme

$$x = r\cos\omega t + l\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega t}.$$

La vitesse du coulisseau à un instant t quelconque se définit par la formule

$$v = \frac{dx}{dt} = -r\omega\sin\omega t - \frac{1}{2}\lambda^2 l\omega\frac{\sin 2\omega t}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega t}}.$$

En calculant la dérivée seconde, on obtient l'accélération du coulisseau en fonction du temps t.

λ^2 étant généralement très petit (de l'ordre de quelques centièmes), utilisons le développement de $\sqrt{1-\alpha}$ en série entière:

$$\sqrt{1-\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\alpha + \ldots$$

(voir N. P i s k o u n o v, tome II, ch. XVI, § 19) pour trouver une expression approchée de l'abscisse du coulisseau:

$$x \approx \xi = r\cos\omega t + l\left(1 - \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\omega t\right).$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient les expressions approchées de la vitesse et de l'accélération du coulisseau:

$$v \approx \frac{d\xi}{dt} = -r\omega\sin\omega t - \frac{1}{2}\lambda^2 l\omega\sin 2\omega t,$$

$$w \approx \frac{d^2\xi}{dt^2} = -r\omega^2\cos\omega t - \lambda^2 l\omega^2\cos 2\omega t.$$

Nous remarquons que l'expression approchée de la vitesse du coulisseau se laisse déduire de son expression exacte en supprimant, sous le radical, la quantité λ^2 qui est négligeable devant l'unité.

Exercices

Exercice 7.1. Deux manchons A et B reliés entre eux par une tige inextensible AB de longueur $2l$ glissent suivant les axes de coordonnées (fig. 7.16). Le mouvement du manchon A est défini par l'équation $x = 2l \sin \omega t$. On demande de savoir la vitesse des manchons, ainsi que la trajectoire et la vitesse du point C qui se trouve à la distance $2/3\ l$ du manchon A.

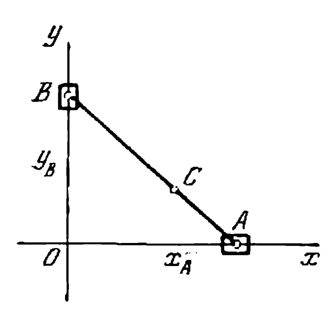


Fig. 7.16

Réponse. Le point C décrit une ellipse de centre O et d'axes $\frac{8}{3} l$, $\frac{4}{3} l$;

$$v_A = 2l\omega \cos \omega t, \quad v_B = -2l\omega \sin \omega t,$$

$$v_C = \frac{2}{3} l\omega \sqrt{1+3\cos^2 \omega t}.$$

Exercice 7.2. Les équations du mouvement du point M sont $x = \beta t$, $y = \gamma t - \frac{1}{2} g t^2$. Déterminer la trajectoire du point, sa vitesse, ses accélérations totale, tangentielle et normale, ainsi que le rayon de courbure de la trajectoire en M à un instant t quelconque. Expliquer la signification physique des constantes β et γ. Construire l'hodographe de la vitesse.

Réponse. La trajectoire en question est une portion de parabole

$$y = \frac{\gamma}{\beta} x - \frac{g}{2\beta^2} x^2$$

ayant son sommet au point $(\beta\gamma/g,\ \frac{1}{2}\gamma^2/g)$, passant par l'origine des coordonnées O et ayant ses branches orientées vers le bas;

$$v = \sqrt{\beta^2 + (\gamma - gt)^2}, \quad \cos(\widehat{v, Ox}) = \frac{\beta}{v}, \quad w = g,$$

$$(\widehat{w, Oy}) = \pi, \quad w_\tau = -\frac{g(\gamma - gt)}{v}, \quad w_n = \frac{\beta g}{v}, \quad \rho = \frac{v^3}{\beta g};$$

$\beta = v_0 \sin \alpha$, $\gamma = v_0 \sin \alpha$, où α est l'angle que fait le vecteur vitesse initiale $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}(0)$ avec l'axe Ox. L'hodographe de la vitesse a pour équation $x = \beta$.

Exercice 7.3. Le point M de la jante d'une roue de rayon R roulant sans glisser sur un rail rectiligne avec une vitesse v_O (pour le centre O de la roue) décrit une cycloïde dont les équations paramétriques sont

$$x = R(\omega t - \sin \omega t), \qquad y = R(1 - \cos \omega t) \qquad (\omega = v_O/R).$$

On demande de savoir la vitesse, l'accélération et le rayon de courbure de la trajectoire en M à l'instant quelconque.

Réponse. $v = 2R\omega \left| \sin \frac{\omega t}{2} \right|$, $\cos(\widehat{v, Oy}) = R\omega \sin \omega t / v$, $w = R\omega^2$, $(\widehat{w, Oy}) = \omega t$, $\rho = 4R \left| \sin \frac{\omega t}{2} \right|$.

Exercice 7.4. Le point décrit une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

en partant de son sommet $x = 0$, $y = b$ avec une vitesse initiale v_0 ; son accélération totale reste parallèle à l'axe Oy. Déterminer la valeur algébrique de l'accélération totale en fonction de l'ordonnée y (problème de Newton).

Indication. Dériver (1) par rapport au temps, poser $\dot{x} = v_0$ et en déduire $\dot{y}$. Ensuite dériver encore une fois (1) par rapport au temps et faire intervenir l'expression de $\dot{y}$ et l'expression de x^2 conformément à (1).

Réponse. $w = \ddot{y} = -\frac{b^4 v_0^2}{a^2 y^3}$.

Exercice 7.5. Le pont a un profil en forme de parabole $y = -0{,}005\, x^2$; les grandeurs x, y sont exprimées en mètres. Une voiture roule sur le pont avec une vitesse de module constant, égale à 72 km/h. Déterminer l'accélération de la voiture à l'instant où elle se trouve au sommet de la parabole.

Indication. Utiliser la formule du rayon de courbure déduite par les méthodes de calcul différentiel.

Réponse. $w = w_n = 4$ m/s².

Exercice 7.6. Le point parcourt une circonférence de rayon 8 mètres ; la loi du mouvement est $s = \frac{2}{3} t^3$. On demande de savoir la vitesse du point à l'instant t_1 où ses accélérations normale et tangentielle deviennent égales en module.

Réponse. $t_1 = 2$ s, $v(2) = 8$ m/s.

CHAPITRE VIII

MOUVEMENTS ÉLÉMENTAIRES DU SOLIDE

Soit dans l'espace un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires $Oxyz$ considéré conventionnellement comme fixe. La position d'un solide dans l'espace peut être déterminée en définissant la position de ses trois points quelconques non alignés. Avant de passer à l'étude du mouvement du solide dans le cas général, examinons quelques types de mouvements élémentaires.

§ 1. Mouvement de translation du solide

1.1. Définition du mouvement de translation. Supposons qu'un vecteur $\boldsymbol{MN}$ ayant pour origine et extrémité deux points quelconques du solide reste inchangé pendant toute la durée du mouvement. Il conserve donc non seulement son module, ce qui est toujours le cas en n'importe quel mouvement du solide, mais aussi sa direction. On dit alors que le solide est animé d'*un mouvement de translation*. Ainsi donc, on entend par translation du solide un *mouvement dans lequel tout segment de droite* contenu dans le solide *se déplace parallèlement à lui-même*. Beaucoup d'éléments de mécanismes effectuent des mouvements de translation, par exemple les bielles d'accouplement des roues d'une locomotive, les pédales d'une bicyclette, etc.

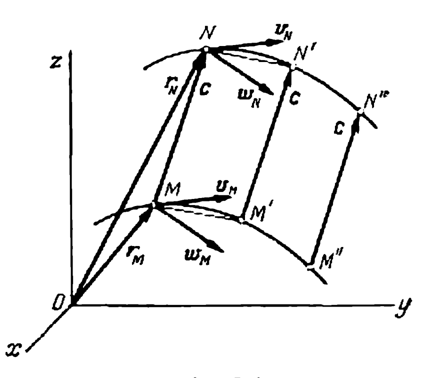


Fig. 8.1

On voit sur la figure 8.1 les positions du vecteur $\boldsymbol{MN}$ d'abord à l'instant t, puis aux instants t' et t''. Ainsi donc, si le solide effectue un mouvement de translation, on a par définition

$$\boldsymbol{MN} = \boldsymbol{M'N'}. \tag{8.1}$$

Le quadrilatère $MM'N'N$ est de toute évidence un parallélogramme; on a donc $MM' = NN'$. L'égalité (8.1) est par définition vérifiée

pour tous les points du solide (trois points non alignés suffisent) et à tous les instants t, t' de mouvement.

1.2. Théorème des trajectoires, des vitesses et des accélérations des points du solide en translation. *Tous les points du solide en translation parcourent des trajectoires parallèles d'après la même loi du mouvement et ont les vecteurs vitesse, ainsi que les vecteurs accélération, égaux.*

Démonstration. Soient M et N deux points quelconques du solide en translation. Désignons leurs rayons vecteurs $\boldsymbol{OM}$ et $\boldsymbol{ON}$ par $\boldsymbol{r}_M$ et $\boldsymbol{r}_N$. L'identité

$$\boldsymbol{MN} = \boldsymbol{r}_N - \boldsymbol{r}_M = \boldsymbol{c},$$

dans laquelle $\boldsymbol{c}$ est un vecteur libre constant, est vérifiée pendant toute la durée du mouvement de translation. Par conséquent, la position du point N peut être déterminée à tout instant à l'aide de l'identité

$$\boldsymbol{r}_N(t) = \boldsymbol{r}_M(t) + \boldsymbol{c}. \tag{8.2}$$

Il en découle que les différents points du solide en translation décrivent des trajectoires parallèles.

En dérivant l'identité (8.2) et en se rappelant la formule (7.9), on obtient

$$\boldsymbol{v}_N(t) \equiv \boldsymbol{v}_M(t). \tag{8.3}$$

Cela signifie que les vecteurs vitesse de tous les points du solide sont égaux en module et en direction à chaque instant du mouvement de translation. Réciproquement, si l'identité (8.3) a lieu pour deux points quelconques du solide, on revient, en prenant l'intégrale, à l'identité (8.2): le mouvement du solide est bien un mouvement de translation. On voit donc que tout mouvement de translation est caractérisé par un vecteur unique qui dépend du temps seul et qui exprime à chaque instant une vitesse de translation qui est la même, en module et en direction, pour tous les points du solide.

Multiplions l'identité (8.3) par dt (en y mettant les vitesses algébriques, voir ch. VII, n° 2.3) et intégrons-la entre 0 et t:

$$\int_0^t v_{N\tau}(t)\,dt = \int_0^t v_{M\tau}(t)\,dt.$$

Conformément à la formule (7.13), on en déduit que

$$\int_0^t ds_N(t) = \int_0^t ds_M(t) \quad \text{ou} \quad s_N(t) = s_M(t).$$

Autrement dit, les points décrivent des trajectoires (parallèles) sur lesquelles les équations horaires du mouvement sont identiques.

Dérivons l'identité (8.3) par rapport au temps. Il vient

$$w_N\ (t) \equiv w_M\ (t). \tag{8.4}$$

Nous remarquons comme précédemment que tous les points du solide présentent des vecteurs accélération égaux en module et en direction à chaque instant du mouvement de translation. D'une façon analogue, on peut adopter comme accélération du mouvement de translation du solide, l'accélération de n'importe lequel de ses points. Le théorème est démontré.

Si le vecteur vitesse de translation reste inchangé en module et en direction pendant toute la durée du mouvement, l'accélération est nulle, si bien que tous les points du solide effectuent un mouvement rectiligne et uniforme. Un tel mouvement peut être appelé *mouvement de translation rectiligne uniforme*.

En terminant ce paragraphe, soulignons que le mouvement d'un solide en translation se définit complètement par le mouvement de son point unique quelconque. La cinématique du solide en translation se réduit donc entièrement à la cinématique du point (ch. VII et XI).

§ 2. Rotation du solide autour d'un axe fixe

2.1. Equation du mouvement de rotation. Le deuxième type de mouvement élémentaire du solide est sa rotation autour d'un axe fixe, c'est-à-dire un mouvement pendant lequel deux points O, O' du solide restent fixes. Il ressort de la définition d'un corps solide que tous les autres points de la droite OO', appelée *axe de rotation*, restent fixes, eux aussi *).

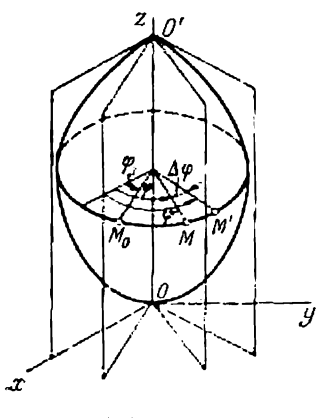


Fig. 8.2

Plaçons l'origine du système de coordonnées fixe au point O, adoptons comme axe Oz l'axe de rotation OO' et orientons les axes Ox et Oy suivant deux directions perpendiculaires quelconques de manière à former un repère direct (fig. 8.2). Puisque la position d'un solide dans l'espace se définit complètement par les positions de ses trois points quelconques non alignés, il suffit, dans le cas considéré, de déterminer la position d'un point quelconque M extérieur à l'axe de rotation. On peut le faire de la façon suivante.

Soit M_0 la position occupée par le point M à l'instant initial $t = 0$. Considérons les demi-plans $OO'M_0$ et $OO'M$ et désignons

*) L'axe de rotation peut aussi être extérieur au solide.

par φ_0 et φ les dièdres qu'ils forment avec le plan Ozx. Comme sens positif de lecture des angles, nous adopterons la rotation de Ox vers Oy. Pour connaître la position du point M, qui définit à son tour celle du solide tout entier, il suffit de connaître la valeur de l'angle φ à chaque instant. Aussi l'expression

$$\varphi = \varphi(t)$$

est-elle appelée *équation du mouvement de rotation* du solide autour d'un axe fixe. Comme d'ordinaire, nous admettons qu'il s'agit d'une fonction continue, deux fois dérivable.

2.2. Vitesse angulaire et accélération angulaire du solide. Soit M' la position occupée par le point M à l'instant $t' = t + \Delta t$ et soit $\varphi' = \varphi + \Delta\varphi$ la valeur de l'angle φ au même instant. Le rapport $\Delta\varphi/\Delta t$ s'appelle *vitesse angulaire moyenne du solide* entre les instants t et $t + \Delta t$. Quand Δt tend vers zéro, le rapport indiqué tend vers une limite qu'on appelle *vitesse angulaire* ω *du solide* à l'instant t. Par définition, la vitesse angulaire du solide a donc pour équation

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{8.5}$$

L'unité SI de vitesse angulaire est le radian par seconde (rad/s). Les mécaniciens utilisent une autre grandeur pour caractériser la rotation : c'est le nombre n de tours par minute. Divisant n par 60, on obtient le nombre de tours par seconde ; multipliant $n/60$ par 2π, on obtient le nombre de radians par seconde. Autrement dit, la vitesse angulaire est égale à

$$\omega = \frac{n}{60} 2\pi = \frac{\pi n}{30} \text{ rad/s}.$$

La vitesse angulaire est elle-même une fonction du temps, $\omega = \omega(t)$; sa dérivée par rapport au temps porte le nom d'*accélération angulaire* ε *du solide* :

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{8.6}$$

L'unité SI d'accélération angulaire est le radian par seconde au carré (rad/s^2).

Remarquons que la vitesse angulaire ω peut être positive ou négative, suivant le sens de rotation. Quand $\omega > 0$, le solide tourne dans le sens positif. Si pour $\omega > 0$ on a l'accélération angulaire $\varepsilon > 0$, la rotation du solide est accélérée, et si l'on a $\varepsilon < 0$, la rotation est retardée.

Supposons maintenant que $\omega < 0$. Alors, si $\varepsilon > 0$, la vitesse angulaire décroît en valeur absolue: la rotation est retardée. Au contraire, si $\varepsilon < 0$, la vitesse angulaire croît en valeur absolue : la rotation est accélérée.

Ainsi donc, la rotation du solide est accélérée si le produit de la vitesse angulaire par l'accélération angulaire est positif, autrement

dit, si, à l'instant considéré, la valeur absolue de sa vitesse angulaire a une tendance à croître.

2.3. Rotation uniforme et rotation uniformément variée. a) Si la vitesse angulaire est constante ($\omega = \Omega = \text{const}$), il ressort de l'égalité (8.5) que $d\varphi = \Omega\, dt$. En intégrant par rapport à t de 0 à t et par rapport à φ de φ_0 à φ, on obtient

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \Omega\, dt,$$

ou

$$\varphi - \varphi_0 = \Omega t. \tag{8.7}$$

La formule (8.7) indique que dans un *mouvement de rotation uniforme* l'angle de rotation $\varphi - \varphi_0$ est proportionnel au temps, tandis que la vitesse angulaire Ω est égale à

$$\Omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}.$$

b) Si l'accélération angulaire est constante ($\varepsilon = \mathrm{E} = \text{const}$), il ressort de l'égalité (8.6) que $d\omega = \mathrm{E}\, dt$; en intégrant, on obtient

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \mathrm{E}\, dt,$$

ce qui veut dire que

$$\omega = \omega_0 + \mathrm{E}t. \tag{8.8}$$

On a alors en vertu de (8.5)

$$d\varphi = \omega\, dt = (\omega_0 + \mathrm{E}t)\, dt.$$

Faisons l'intégration

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \mathrm{E}t)\, dt.$$

Il vient définitivement

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\mathrm{E}t^2. \tag{8.9}$$

Les formules (8.8), (8.9) définissent le *mouvement de rotation uniformément varié*. On remarque l'analogie avec les formules (7.29), (7.30) qui définissent le mouvement rectiligne uniformément varié du point. Connaissant φ_0 et ω_0, on se trouve comme précédemment en présence de deux équations à trois variables t, φ, ω et une constante E. La connaissance de deux quantités parmi les quatre grandeurs énumérées permet de déterminer les deux autres.

2.4. Vitesse et accélération d'un point du solide en rotation. Proposons-nous maintenant de déterminer la vitesse et l'accélération d'un point quelconque M du solide animé de rotation autour d'un axe fixe. Désignons par O_1 le point en lequel l'axe de rotation OO' vient percer le plan perpendiculaire à OO' qui passe par M (fig. 8.3). La trajectoire du point M est une circonférence (ou une portion de circonférence) de rayon $O_1M = R$ située dans le plan indiqué. L'abscisse curviligne s sera comptée à partir de la position initiale M_0 de M, le sens positif étant le même que pour l'angle φ. On a alors

$$s = R\varphi.$$

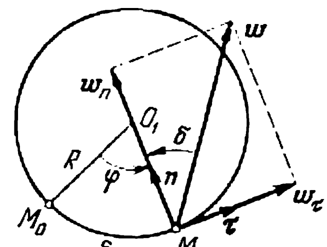


Fig. 8.3

Par conséquent, la vitesse algébrique du point M se définit par la formule (7.13):

$$v_\tau = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega. \qquad (8.10)$$

Le vecteur unité $\boldsymbol{\tau}$ de la tangente est orienté dans le sens des abscisses curvilignes croissantes, c'est-à-dire dans le sens des valeurs croissantes de l'angle φ; le vecteur unité $\boldsymbol{n}$ de la normale est orienté comme toujours vers le centre de courbure de la trajectoire, c'est-à-dire vers le point O_1. Le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ de M sera alors exprimé par

$$\boldsymbol{v} = R\omega\boldsymbol{\tau},$$

et son module s'écrira

$$v = R\,|\omega|. \qquad (8.11)$$

Les projections du vecteur accélération sur les axes intrinsèques s'écrivent, conformément aux formules (7.25a) et (7.26), sous la forme

$$w_\tau = \frac{d^2s}{dt^2} = R\frac{d^2\varphi}{dt^2} = R\varepsilon, \qquad (8.12)$$

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2. \qquad (8.13)$$

Par conséquent, le vecteur accélération $\boldsymbol{w}$ est égal à

$$\boldsymbol{w} = w_\tau\boldsymbol{\tau} + w_n\boldsymbol{n} = R\varepsilon\boldsymbol{\tau} + R\omega^2\boldsymbol{n}. \qquad (8.14)$$

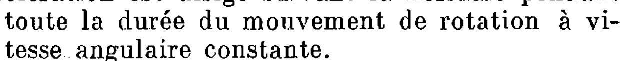
Le vecteur accélération tangentielle $R\varepsilon\boldsymbol{\tau}$ est orienté dans le sens de lecture positif ou négatif de l'angle φ, suivant que l'accélération angulaire ε est positive ou négative. Le vecteur accélération normale $R\omega^2\boldsymbol{n}$ est toujours orienté comme le vecteur $\boldsymbol{n}$, sauf s'il est nul (car on a $R\omega^2 \geqslant 0$) ; on l'appelle également vecteur accélération centripète. Le module du vecteur accélération du point M est égal à

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (8.15)$$

La direction du vecteur accélération de M est définie par l'angle aigu δ compté à partir du vecteur accélération jusqu'au vecteur unité $\boldsymbol{n}$ de la normale. On a du triangle rectangle de la figure 8.3

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{w_\tau}{w_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \tag{8.16}$$

Le signe de tg δ est celui de l'accélération angulaire ε. Si le solide tourne avec une vitesse angulaire constante, on a $\varepsilon \equiv 0$, donc aussi $w_\tau \equiv 0$ et $\delta \equiv 0$. On a par conséquent $\boldsymbol{w} = R\omega^2\boldsymbol{n}$, ce qui veut dire que le vecteur accélération est dirigé suivant la normale pendant


toute la durée du mouvement de rotation à vitesse angulaire constante.

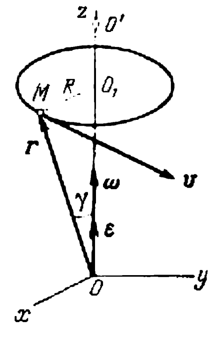


Fig. 8.4

2.5. Vecteur vitesse et vecteur accélération d'un point du solide en rotation. Relations vectorielles. Les expressions des vecteurs vitesse et accélération d'un point quelconque M du solide animé de rotation autour d'un axe fixe peuvent être déduites autrement. Assimilons la vitesse angulaire du solide à un *vecteur* $\boldsymbol{\omega}$ ayant pour module la valeur absolue de la vitesse angulaire (c'est-à-dire $|\,d\varphi/dt\,|$), dirigé suivant l'axe de rotation et orienté d'après la règle de la vis à droite. Par exemple, si le solide tourne dans le sens positif (c'est-à-dire de Ox vers Oy), le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ est orienté dans le sens positif de l'axe de rotation (de l'axe Oz, sur la figure 8.4). Etant donné que l'origine du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ peut être choisie sur l'axe de rotation de façon arbitraire, le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ ainsi construit est un vecteur glissant.

Dans le même ordre d'idées, l'accélération angulaire du solide sera considérée comme un vecteur glissant $\boldsymbol{\varepsilon}$ porté par l'axe de rotation. Si $\boldsymbol{k}$ est le vecteur unité de l'axe de rotation, on a

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k} = \frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon\boldsymbol{k} = \frac{d\omega}{dt}\boldsymbol{k}.$$

Puisque le vecteur unité $\boldsymbol{k}$ est constant tant en valeur qu'en direction, on a l'égalité vectorielle

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

Portons le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ à l'origine des coordonnées O (fig. 8.4) et construisons le rayon vecteur $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$ du point M. Désignons par O_1 le point en lequel l'axe de rotation Oz vient percer le plan passant par M et perpendiculaire à Oz: on a $O_1M = R$. Soit $\boldsymbol{v}$ le vecteur vitesse du point M. Considérons le produit vectoriel $[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}]$. C'est un vecteur perpendiculaire au plan O_1OM et orienté d'après la règle de la vis à droite, ce qui veut dire qu'il coïncide en direction avec

le vecteur v. Le module de ce produit vectoriel est égal à $|\omega| r \sin\gamma = |\omega| R$, donc au module de v. Nous venons de démontrer l'égalité vectorielle

$$v = [\omega, r] \tag{8.17}$$

qui se traduit de façon suivante:

Le *vecteur vitesse* d'un point quelconque du solide animé de rotation autour d'un axe fixe *est équipollent au produit vectoriel du vecteur vitesse angulaire du solide par le rayon vecteur* du point en question, l'origine du rayon vecteur étant située en un point quelconque de l'axe de rotation. Cette dernière remarque signifie qu'on pourrait prendre comme rayon vecteur de M le vecteur $O_1M = R$, ce qui permettrait de présenter la formule (8.17) sous la forme

$$v = [\omega, R].$$

Pour établir l'expression du vecteur accélération w du point M, on doit dériver (8.17) par rapport à t d'après la règle de dérivation d'un produit vectoriel (voir Introduction à la cinématique, nº 4, formule (3)):

$$w = \frac{dv}{dt} = \left[\frac{d\omega}{dt}, r\right] + \left[\omega, \frac{dr}{dt}\right].$$

Puisque

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon, \quad \frac{dr}{dt} = v,$$

cette dernière formule devient

$$w = [\varepsilon, r] + [\omega, v]. \tag{8.18}$$

On montre (voir ch. IX, nº 2.3) que les deux termes vectoriels de la somme de la formule (8.18) sont égaux respectivement au premier et au deuxième termes de la somme de la formule (8.14). La formule (8.18) définit donc, au même titre que la formule (8.14), la décomposition du vecteur accélération d'un point du solide tournant en composantes tangentielle et normale. Puisque la formule (8.14) est plus claire, nous nous en servirons par la suite.

On notera que les seconds membres de (8.17) et (8.18) ne changent pas lorsqu'on transfère les vecteurs ω et ε suivant leur direction. Il s'ensuit que ω et ε sont des vecteurs glissants.

Examinons en conclusion quelques exemples.

Exemple 8.1. Une roue de rayon R, animée de rotation uniformément retardée autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan de la roue, s'arrête après avoir fait N tours. La vitesse angulaire initiale est $\omega_0 > 0$. Déterminer l'accélération angulaire de la roue et l'accélération d'un point situé sur la jante de celle-ci.

Solution. Admettons que la rotation se fait dans le sens positif et posons $\varphi_0 = 0$. A l'instant de l'arrêt ($t = T$), l'angle de rotation de la roue φ sera

égal à $2\pi N$. Des formules (8.8) et (8.9)

$$0=\omega_0+\varepsilon T, \quad 2\pi N=\omega_0 T+\frac{1}{2}\varepsilon T^2.$$

De la première équation

$$T=-\omega_0/\varepsilon.$$

Portons cette expression dans la seconde équation. Il vient

$$2\pi N=-\frac{\omega_0^2}{\varepsilon}+\frac{\omega_0^2}{2\varepsilon}=-\frac{\omega_0^2}{2\varepsilon},$$

d'où

$$\varepsilon=-\frac{\omega_0^2}{4\pi N}.$$

Conformément à la formule (8.12), la projection du vecteur accélération d'un point de la jante de la roue sur la tangente

$$w_\tau=R\varepsilon=-\frac{R\omega_0^2}{4\pi N}$$

reste constante et négative pendant toute la durée du mouvement. Puisque $w_\tau<0$, cela revient à dire que le vecteur accélération tangentielle est orienté dans le sens inverse du mouvement.

La vitesse angulaire ω de la roue à l'instant $t \leqslant T$ sera déterminée par la formule (8.8):

$$\omega=\omega_0+\varepsilon t=\omega_0-\frac{\omega_0^2}{4\pi N}t.$$

La projection du vecteur accélération sur la normale se calculera d'après la formule (8.3):

$$w_n=R\omega^2=R\left(w_0-\frac{\omega_0^2}{4\pi N}t\right)^2 \qquad (t \leqslant T).$$

Nous voyons que dans notre exemple le module du vecteur accélération normale varie dans le temps tout en restant proportionnel au carré de la vitesse angulaire. Le vecteur accélération d'un point de la jante de la roue sera déterminé par la formule (8.14):

$$\boldsymbol{w}=w_\tau\boldsymbol{\tau}+w_n\boldsymbol{n}=-\frac{R\omega_0^2}{4\pi N}\boldsymbol{\tau}+R\left(\omega_0-\frac{\omega_0^2}{4\pi N}t\right)^2\boldsymbol{n} \qquad (t \leqslant T).$$

Le module du vecteur accélération du point est égal à

$$w=\sqrt{w_\tau^2+w_n^2}=R\sqrt{\frac{\omega_0^4}{16\pi^2N^2}+\left(\omega_0-\frac{\omega_0^2}{4\pi N}t\right)^4} \qquad (t \leqslant T).$$

Sa direction sera définie par la formule (8.15):

$$\operatorname{tg}\delta=\frac{\varepsilon}{\omega^2}=-\frac{1}{4\pi N\left(1-\frac{\omega_0}{4\pi N}t\right)^2} \qquad (t \leqslant T).$$

Le signe négatif signifie que l'angle aigu δ compté à partir du vecteur accélération vers le vecteur unité de la normale principale est négatif. Cela revient à dire que le vecteur accélération du point de la jante est porté sous l'angle δ par rapport à la normale dans le sens horaire.

Exemple 8.2. Un corps de poids P attaché au fil enroulé sur une roue de rayon R descend de façon uniformément accélérée, sans vitesse initiale, met-

tant la roue en rotation (fig. 8.5). Pendant les t_1 premières secondes le corps est descendu de h mètres. On demande la vitesse angulaire et l'accélération angulaire de la roue, ainsi que la vitesse et l'accélération des points de la jante de la roue à l'instant t_2.

S o l u t i o n. Désignons par a l'accélération prise par le corps P. On a alors en vertu de (7.30)

$$h=\frac{1}{2}at_1^2, \quad \text{ou} \quad a=\frac{2h}{t_1^2} \text{ m/s}^2.$$

Il est évident que l'accélération tangentielle des points situés sur la jante est

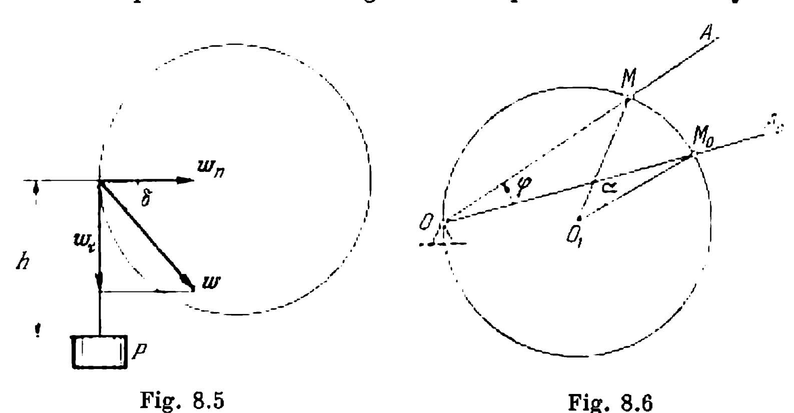


Fig. 8.5 Fig. 8.6

égale en module à l'accélération a: on a donc

$$w_\tau=R\varepsilon=a=\frac{2h}{t_1^2} \text{ m/s}^2.$$

L'accélération angulaire de la roue sera donc

$$\varepsilon=\frac{2h}{Rt_1^2} \text{ rad/s}^2.$$

D'après la formule (8.8) on a pour $\omega_0=0$

$$\omega(t_2)=\varepsilon t_2=\frac{2ht_2}{Rt_1^2} \text{ rad/s}.$$

Le module du vecteur accélération normale des points de la jante est égal à

$$w_n(t_2)=R\omega^2(t_2)=\frac{4h^2t_2^2}{Rt_1^4} \text{ m/s}^2.$$

L'accélération totale des points situés sur la jante de la roue est déterminée à l'aide des formules (8.15) et (8.16):

$$w(t_2)=R\sqrt{\left(\frac{2h}{Rt_1^2}\right)^2+\left(\frac{2ht_2}{Rt_1^2}\right)^4}=\frac{2h}{t_1^2}\sqrt{1+\frac{4h^2t_2^4}{R^2t_1^4}} \text{ m/s}^2,$$

$$\operatorname{tg}\delta=\frac{2h}{Rt_1^2}\left(\frac{Rt_1^2}{2ht_2}\right)^2=\frac{Rt_1^2}{2ht_2^2}.$$

E x e m p l e 8.3. L'anneau M enfilé sur un cercle fixe en fil de fer de rayon R et de centre en O_1 est guidé par une tige OA animée de rotation uniforme

autour d'un axe fixe qui passe par un point O du cercle et est perpendiculaire au plan du cercle (fig. 8.6). La vitesse angulaire de la tige OA est ω. Déterminer la vitesse et l'accélération de l'anneau mobile M.

S o l u t i o n. Pendant que la tige tourne d'un angle $\varphi = \omega t$, l'anneau mobile décrit un arc $\overset{\frown}{M_0M} = R\alpha$. D'après les rapports géométriques connus, $\alpha = 2\varphi$, donc

$$s = \overset{\frown}{M_0M} = 2R\omega t.$$

De la formule (7.10)

$$v = \frac{ds}{dt} = 2R\omega,$$

d'où l'on déduit d'après (7.25) et (7.26) que

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = 0, \quad w = w_n = \frac{v^2}{R} = 4R\omega^2.$$

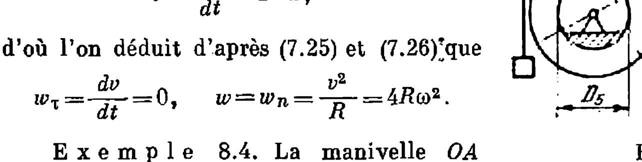


Fig. 8.7

E x e m p l e 8.4. La manivelle OA du treuil est tournée de façon uniformément accélérée avec une accélération $\varepsilon_1 = \pi$ rad/s². Les nombres de dents des engrenages du treuil sont $z_1 = 8$, $z_2 = 32$, $z_3 = 12$, $z_4 = 36$, et le diamètre du tambour $D_5 = 400$ mm. Déterminer la vitesse et l'accélération du fardeau, ainsi que la hauteur à laquelle on le fait monter au bout de 1/2 minute après le commencement du mouvement (fig. 8.7).

S o l u t i o n. La vitesse du point M commun aux engrenages I et II est de module

$$v_M = R_1\omega_1 = R_2\omega_2.$$

On a donc à chaque instant t

$$\omega_2 = \frac{R_1}{R_2}\omega_1 = \frac{z_1}{z_2}\omega_1.$$

On a de même

$$\omega_4 = \frac{z_3}{z_4}\omega_3.$$

Puisque $\omega_3 = \omega_2$ (car les engrenages III et II sont emmanchés sur un même arbre), on a

$$\omega_4 = \frac{z_3 z_1}{z_4 z_2}\omega_1.$$

Dérivant la dernière identité, on obtient

$$\frac{d\omega_4}{dt} = \frac{z_3 z_1}{z_4 z_2}\frac{d\omega_1}{dt}, \quad \text{ou} \quad \varepsilon_4 = \frac{z_3 z_1}{z_4 z_2}\varepsilon_1.$$

Substituons les valeurs numériques:

$$\varepsilon_5 = \varepsilon_4 = \frac{12 \cdot 8}{36 \cdot 32}\pi = \frac{1}{12}\pi \text{ rad/s}^2.$$

Pour $t = 30$ s, la vitesse angulaire et l'angle de rotation de l'engrenage IV et du tambour V se définissent par les formules (8.8) et (8.9):

$$\omega_5(30) = \varepsilon_5 \cdot 30 = \frac{5}{2}\pi \text{ rad/s}, \quad \varphi_5(30) = \frac{1}{2}\varepsilon_5 \cdot 30^2 = \frac{75}{2}\pi \text{ rad}.$$

Multipliant l'angle de rotation du tambour par son rayon R_5, on obtient la hauteur de montée du fardeau:

$$h(30) = R_5\varphi_5(30) = 0{,}2 \cdot \frac{75}{2}\pi = 23{,}6 \text{ m}.$$

Puisqu'on a à chaque instant t

$$h(t) = R_5\varphi_5(t)$$

et que le fardeau monte suivant la verticale, sa vitesse et son accélération sont respectivement

$$v(t) = \frac{dh}{dt} = R_5\frac{d\varphi_5}{dt} = R_5\omega_5(t), \qquad \omega(t) = \frac{dv(t)}{dt} = R_5\frac{d\omega_5}{dt} = R_5\varepsilon_5.$$

Substituons les valeurs numériques:

$$v(30) = 0{,}2 \cdot \frac{5}{2}\pi = 1{,}57 \text{ m/s}, \qquad w(30) = 0{,}2 \cdot \frac{\pi}{12} = 0{,}0524 \text{ m/s}^2.$$

Exercices

E x e r c i c e 8.1. Une roue de rayon r = 2 m tourne autour d'un axe horizontal fixe O de telle façon que le vecteur vitesse d'un point A de sa jante conserve un module constant v_A = 3,6 m/s. Un triangle de barres ABC (fig. 8.8)

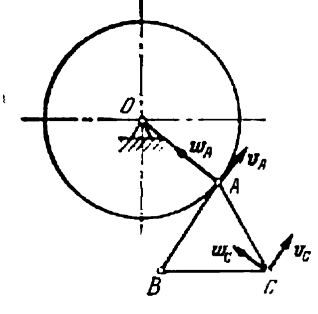


Fig. 8.8

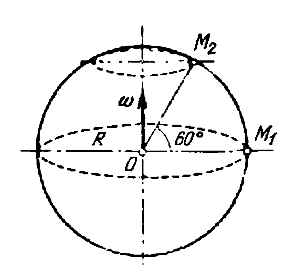


Fig. 8.9

articulé en son sommet A sur la jante de la roue effectue un mouvement dans lequel la base BC du triangle reste horizontale. Déterminer la trajectoire, la vitesse et l'accélération du sommet C du triangle ABC.

I n d i c a t i o n. Le triangle ABC effectue par hypothèse un mouvement de translation: on a donc $v_C = v_A$, $w_C = w_A$.

R é p o n s e. La trajectoire de C est une circonférence de rayon r dont le centre se trouve sur la perpendiculaire à v_C élevée en C; v_C = 3,6 m/s, $w_C = w_n = \frac{1}{r}v_C^2$ = 6,48 m/s².

E x e r c i c e 8.2. Un moteur électrique, après sa mise hors circuit, a fait 675 tours et s'est arrêté au bout de 30 secondes. Supposant le mouvement uniformément retardé, déterminer la vitesse angulaire initiale et la loi de la rotation du moteur électrique.

R é p o n s e. $\omega_0 = 90\,\pi$ rad/s, $\varphi = \frac{3}{2}\pi t\,(60 - t)$ rad.

E x e r c i c e 8.3. Compte tenu de la rotation seule de la Terre et de son rayon $R = 6370$ km, déterminer la vitesse et l'accélération de deux points fixes par rapport à la Terre : M_1 situé à l'équateur et M_2 situé à une latitude de 60° (fig. 8.9).

R é p o n s e. $v_1 = 464$ m/s, $w_1 = w_n = 0{,}0337$ m/s²; $v_2 = 232$ m/s, $w_2 = w_n = 0{,}0169$ m/s².

E x e r c i c e 8.4. On considère le mécanisme d'un cric. Les engrenages z_2 et z_3 sont solidaires de l'arbre *II*, et les engrenages z_4 et z_5 sont solidaires de l'arbre *III* (fig. 8.10). Le mouvement de l'arbre d'entraînement *I* est transmis par les engrenages z_1, z_2 à l'arbre *II*, puis par les engrenages z_3, z_4 à l'arbre *III*

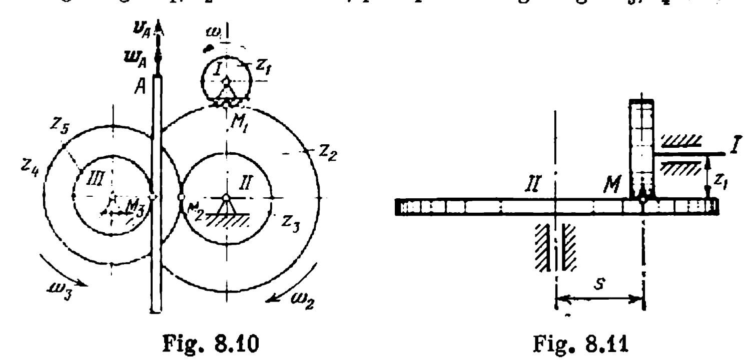


Fig. 8.10 Fig. 8.11

et enfin par l'engrenage z_5 à la crémaillère *A*. Les nombres de dents des engrenages sont $z_1 = 8$, $z_2 = 32$, $z_3 = 16$, $z_4 = 24$; le rayon de l'engrenage z_5 est $r_5 = 5$ cm.

On demande la vitesse et l'accélération de la crémaillère *A* au bout de 3 secondes après la mise en rotation uniformément accélérée de l'arbre d'entraînement *I*, à partir de l'état de repos, avec une accélération angulaire $\varepsilon_1 = 6\pi$ rad/s².

R é p o n s e. $v_A = 0{,}471$ m/s, $w_A = 0{,}157$ m/s².

E x e r c i c e 8.5. L'arbre de la roue de friction menante *I* tourne avec une vitesse angulaire constante qui correspond à $n = 360$ tr/mn (fig. 8.11). En même temps l'arbre *I* se déplace suivant son axe de droite à gauche, de telle façon que le point de contact *M* des roues de friction *I* et *II* effectue un mouvement de translation défini par la loi $s = 16 - 2t$ cm, où le temps t est mesuré en secondes et l'espace parcouru s est compté à partir de l'axe de la roue *II*. On demande de déterminer la vitesse angulaire et l'accélération angulaire de la roue menée *II* à l'instant $t = 5$ s si le rayon de la roue menante est $r_I = 8$ cm.

R é p o n s e. $\omega_{II}(5) = 50{,}2$ rad/s, $\varepsilon_{II}(5) = 16{,}7$ rad/s².

CHAPITRE IX

CAS GÉNÉRAL DE MOUVEMENT DU SOLIDE LIBRE. MOUVEMENT DU SOLIDE AYANT UN POINT FIXE

§ 1. Cas général de mouvement du solide libre

1.1. Notion de mouvement instantané. L'état cinématique d'un corps matériel se définit à chaque instant par la position de ses points dans l'espace et par leurs vitesses à l'instant considéré. Nous nous représentons le mouvement du corps comme une transition continue et successive d'un état cinématique à un autre. Tout en définissant les positions des points du corps mobile, on se pose la question de la distribution des vitesses des points du corps à l'instant donné.

Nous avons étudié dans le chapitre précédent deux types très simples de mouvement du solide, à savoir : le mouvement de translation et le mouvement de rotation. Maintenant nous abordons la loi de distribution des vitesses des points du solide à l'instant donné (vitesses instantanées) dans le cas général de mouvement du solide libre (non gêné).

Par *mouvement instantané du solide*, nous entendons seulement la *distribution des vitesses des points du solide mobile à l'instant donné*. Par exemple, la *translation instantanée* est un cas de distribution des vitesses où les vecteurs vitesse de tous les points du solide sont équipollents entre eux à l'instant considéré. En ce qui concerne les trajectoires et les accélérations des points, elles peuvent être quelconques.

Supposons que la distribution des vitesses des points du solide soit conforme à la formule (8.17), c'est-à-dire que la vitesse v_M d'un point quelconque M du solide soit égale, à l'instant considéré, à

$$\mathbf{v}_M = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{OM}],$$

où O est un point du solide et $\boldsymbol{\omega}$ un vecteur d'origine O. Nous sommes alors en présence d'une *rotation instantanée* du solide autour d'un axe instantané de rotation (passant par O et défini par la direction du vecteur $\boldsymbol{\omega}$) caractérisée par un vecteur vitesse angulaire instantanée égal à $\boldsymbol{\omega}$. Quant aux trajectoires suivies par les points et aux accélérations de ces points, elles peuvent être quelconques, comme nous venons de le signaler.

1.2. Théorème d'Euler. *Tout mouvement instantané du solide peut être ramené à une translation instantanée, de vitesse égale à celle d'un point arbitraire du solide, et une rotation instantanée autour d'un axe instantané de rotation passant par ce point.*

Démonstration. Choisissons dans l'espace un système de coordonnées fixe $Oxyz$. Le mouvement du solide se définit complètement par celui de ses trois points quelconques non alignés. Associons donc invariablement au solide considéré un trièdre $O'x'y'z'$ dont la position définira celle du solide par rapport au système de coordonnées fixe $Oxyz$. Désignons par $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ les vecteurs unités respectifs des axes Ox, Oy, Oz; $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$. Considérons la figure 9.1. Pour le point M nous avons

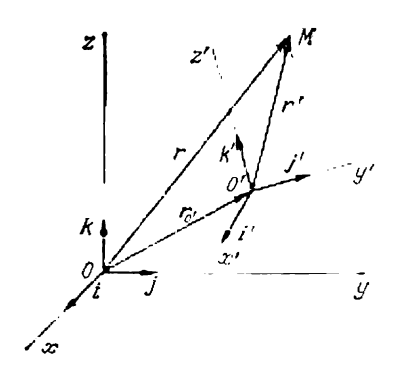


Fig. 9.1

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{O'} + \boldsymbol{r}', \tag{9.1}$$

où $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$, $\boldsymbol{r}_{O'} = \boldsymbol{OO'}$ et $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{O'M}$. Soient x, y, z et $x_{O'}$, $y_{O'}$, $z_{O'}$ les coordonnées des points M et O' par rapport au système fixe. Nous pouvons alors décomposer $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r}_{O'}$ comme suit:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{r}_{O'} = x_{O'}\boldsymbol{i} + y_{O'}\boldsymbol{j} + z_{O'}\boldsymbol{k}.$$

Désignons par x', y', z' les coordonnées de M par rapport au système $O'x'y'z'$; il vient

$$\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'. \tag{9.2}$$

Le vecteur vitesse du point M se définira, compte tenu de l'identité (9.1), par

$$\boldsymbol{v}_M = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \boldsymbol{v}_{O'} + \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}. \tag{9.3}$$

Le dernier terme de (9.3) peut être déterminé par dérivation de (9.2):

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = x'\frac{d\boldsymbol{i}'}{dt} + y'\frac{d\boldsymbol{j}'}{dt} + z'\frac{d\boldsymbol{k}'}{dt}. \tag{9.4}$$

Remarquons que les coordonnées x', y', z' du point M ne varient pas dans le temps, car le système de coordonnées $O'x'y'z'$ est invariablement lié au solide. Dans chaque terme du second membre de (9.2), on ne dérive donc que le facteur en seconde position.

Expliquons la signification mécanique de la formule (9.4). Multiplions scalairement ses deux membres par les vecteurs unités $\boldsymbol{i}'$,

j', k'. Il vient

$$\left(\frac{dr'}{dt},\ i'\right) = x'\left(\frac{di'}{dt},\ i'\right) + y'\left(\frac{dj'}{dt},\ i'\right) + z'\left(\frac{dk'}{dt},\ i'\right),$$
$$\left(\frac{dr'}{dt},\ j'\right) = x'\left(\frac{di'}{dt},\ j'\right) + y'\left(\frac{dj'}{dt},\ j'\right) + z'\left(\frac{dk'}{dt},\ j'\right), \quad (9.5)$$
$$\left(\frac{dr'}{dt},\ k'\right) = x'\left(\frac{di'}{dt},\ k'\right) + y'\left(\frac{dj'}{dt},\ k'\right) + z'\left(\frac{dk'}{dt},\ k'\right).$$

Les carrés scalaires des vecteurs unités sont égaux à 1, et les produits scalaires de deux vecteurs unités différents s'annulent, car ces vecteurs sont perpendiculaires deux à deux. On a donc

$$i'^2 = j'^2 = k'^2 = 1, \qquad (j',\ k') = (k',\ i') = (i',\ j') = 0.$$

Dérivons les dernières identités conformément aux formules (2) qu'on trouve dans le n° 5 de l'Introduction à la cinématique et divisons par 2 les trois premières égalités:

$$\left(i',\ \frac{di'}{dt}\right) = \left(j',\ \frac{dj'}{dt}\right) = \left(k',\ \frac{dk'}{dt}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{dj'}{dt},\ k'\right) + \left(j',\ \frac{dk'}{dt}\right) = \left(\frac{dk'}{dt},\ i'\right) + \left(k',\ \frac{di'}{dt}\right) = \quad (9.6)$$
$$= \left(\frac{di'}{dt},\ j'\right) + \left(i',\ \frac{dj'}{dt}\right) = 0.$$

Introduisons les notations

$$\left(\frac{dj'}{dt},\ k'\right) = p, \quad \left(\frac{dk'}{dt},\ i'\right) = q, \quad \left(\frac{di'}{dt},\ j'\right) = \tilde{r}$$

et mettons les trois dernières égalités (9.6) sous la forme

$$\left(j',\ \frac{dk'}{dt}\right) = -\left(\frac{dj'}{dt},\ k'\right) = -p, \quad \left(k',\ \frac{di'}{dt}\right) = -q,$$
$$\left(i',\ \frac{dj'}{dt}\right) = -\tilde{r}.$$

Alors, compte tenu de (9.6), les égalités (9.5) s'écriront

$$\left(\frac{dr'}{dt},\ i'\right) = qz' - \tilde{r}y', \quad \left(\frac{dr'}{dt},\ j'\right) = \tilde{r}x' - pz',$$
$$\left(\frac{dr'}{dt},\ k'\right) = py' - qx'. \quad (9.7)$$

Introduisons le vecteur glissant ω

$$\omega = pi' + qj' + \tilde{r}k' \quad (9.8)$$

dont le support passe par O'. Les égalités (9.7) se réduisent alors à une égalité vectorielle unique (voir ch. I, n° 1.2, formule (1.16))

$$\frac{dr'}{dt}=[\omega,\ r']=\begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ p & q & \tilde{r} \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}=$$

$$=(qz'-\tilde{r}y')\,i'+(\tilde{r}x'-pz')\,j'+(py'-qx')\,k'. \quad (9.9)$$

En effet, multiplions scalairement cette dernière égalité par les vecteurs unités i', j', k' : nous retrouvons les égalités (9.7) respectivement. Portant (9.9) dans (9.3), nous obtenons la *formule du vecteur vitesse* v_M *d'un point quelconque* M *du solide*:

$$v_M=v_{O'}+[\omega,\ r']. \quad (9.10)$$

Soulignons que les vecteurs $v_{O'}$ et ω sont indépendants du choix du point M ; en ce qui concerne le vecteur r', c'est le rayon vecteur du point choisi M par rapport au point O' :

$$r' = O'M = x'i' + y'j' + z'k'.$$

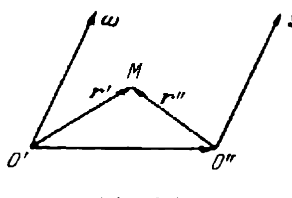


Fig. 9.2

En se rappelant la formule (8.17), on peut remarquer que le deuxième terme de la somme dans (9.10) est la vitesse qu'aurait le point M si le solide tournait autour d'un axe fixe passant par O' avec une vitesse angulaire de vecteur ω. Ainsi donc, tout mouvement du solide se laisse décomposer en:

1° un mouvement dans lequel tous les points du solide présentent la même vitesse $v_{O'}$ à l'instant donné (c'est une translation instantanée) ;

2° un mouvement qui représente une rotation instantanée autour d'un axe passant par O', caractérisée par une vitesse angulaire ω.

A l'instant suivant, tous les vecteurs figurant dans le second membre de (9.10) seront différents (dans le cas général). Il ressort de la démonstration développée que le solide n'effectue aucun autre mouvement instantané. Le théorème d'Euler est démontré.

1.3. Le vecteur vitesse angulaire du solide est indépendant du choix du pôle. Montrons que le vecteur vitesse angulaire instantanée ω du solide ne dépend pas du choix du pôle O'. Donnons-nous un autre point quelconque O'' et supposons que le solide effectue une rotation instantanée autour d'un axe instantané passant par O'' (fig. 9.2) avec une vitesse angulaire Ω. Prenant O'' comme pôle, nous obtenons par analogie à (9.10)

$$v_M=v_{O''}+[\Omega,\ r'']. \quad (9.11)$$

Identifions les formules (9.10) et (9.11):

$$v_{O''} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}'] = v_{O''} + [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{r}''].$$

Le vecteur vitesse de O'' s'obtient d'après la formule (9.10) dans laquelle on a $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{O'O''}$:

$$v_{O''} = v_{O'} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{O'O''}].$$

Portons cette expression dans la formule précédente. Il vient

$$[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}'] = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{O'O''}] + [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{r}''],$$

d'où

$$[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{O'O''}] = [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{r}''].$$

Or, on a sur la figure 9.2 $\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{O'O''} = \boldsymbol{r}''$; donc, $[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}''] = [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{r}'']$ ou définitivement

$$[\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{r}''] = 0.$$

Puisque cette égalité est vérifiée pour tout point M, donc pour toute valeur du vecteur $\boldsymbol{r}''$, le vecteur $\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}$ doit s'annuler, d'où

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega},$$

ce qu'il fallait démontrer.

La formule de l'accélération des points du solide libre dans le cas général sera déduite en fin du no 2.3.

§ 2. Mouvement du solide fixé en un point

2.1. Axe instantané de rotation et vitesse angulaire instantanée. Considérons le mouvement d'un solide qui présente un point fixe autour duquel il peut tourner de façon quelconque. A titre d'exemple, on peut choisir un solide dont l'unique liaison est une articulation sphérique, ou bien une toupie dont la pointe reste fixe pendant le mouvement. Un tel mouvement est appelé *sphérique*.

Plaçons l'origine du *système de coordonnées fixe Oxyz* au point fixe O du solide. Considérons un deuxième système de coordonnées: ce sera un *repère mobile Ox'y'z'* dont l'origine est encore le point fixe O et les axes sont invariablement liés au solide (fig. 9.3).

Fig. 9.3

Pour le mouvement du type considéré, le théorème d'Euler s'énonce de la façon suivante:

Tout mouvement instantané du solide à un point fixe se réduit à une rotation instantanée autour d'un axe instantané de rotation qui passe par le point fixe.

Il ressort de la formule (9.10) que le vecteur vitesse d'un point quelconque M du solide à un point fixe est égal à

$$v_M = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}], \tag{9.12}$$

où $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$ et $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur vitesse angulaire instantanée du solide (voir fig. 9.3).

A la différence du cas de rotation du solide autour d'un axe fixe (ch. VIII, § 2), le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ a non seulement son module variable avec le temps mais aussi sa direction : cette dernière passe cependant toujours par le point O.

Remarquons que le module du deuxième facteur dans (9.12), soit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$, reste constant, car la distance entre deux points du corps solide est invariable. On a par définition (voir (7.9)) $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$; aussi la formule (9.12) se laisse-t-elle récrire comme suit :

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}]. \tag{9.13}$$

2.2. Vitesse des points du solide ayant un point fixe. Formules d'Euler *). Désignons par ω_x, ω_y, ω_z les projections du vecteur vitesse angulaire instantanée $\boldsymbol{\omega}$ sur les axes de coordonnées fixes Ox, Oy, Oz, et par x, y, z les coordonnées du point M dans le même système. Il vient

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \boldsymbol{i} + \omega_y \boldsymbol{j} + \omega_z \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

où $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sont les vecteurs unités des axes Ox, Oy, Oz. La formule (9.12) se laisse développer comme suit :

$$\boldsymbol{v}_M = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y)\,\boldsymbol{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\,\boldsymbol{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\,\boldsymbol{k}.$$

Les *projections du vecteur vitesse de M sur les axes fixes* s'écriront donc

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x. \tag{9.14}$$

Les seconds membres de (9.14) sont fonctions non seulement de ω_x, ω_y, ω_z mais aussi des coordonnées x, y, z de M qui varient dans le temps.

Pour contourner cette difficulté, projetons l'égalité vectorielle (9.12) sur les axes du repère $Ox'y'z'$ invariablement lié au solide, dits *axes mobiles* (fig. 9.3). Soient p, q, $\tilde{r}$ les projections du vecteur

*) L. Euler a établi ses formules connues (9.15) dans son mémoire *Découverte d'un nouveau principe de mécanique* (Mémoires de l'Académie de Berlin, 1750, t. VI, pp. 185 à 217). Les cours de mécanique modernes mentionnent rarement la démonstration utilisée par Euler, qui est fondée sur la notion d'invariant intégral. Par contre, la notion de trièdre mobile associé au solide avancée par Euler a une importance capitale.

vitesse angulaire instantanée sur les axes mobiles Ox', Oy', Oz' et x', y', z' les coordonnées du point M par rapport aux mêmes axes. La formule (9.12) se laisse alors développer comme suit:

$$v_M = \begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ p & q & \tilde{r} \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = (qz' - \tilde{r}y')\, i' + (\tilde{r}x' - pz')\, j' + (py' - qx')\, k',$$

où i', j', k' sont les vecteurs unités des axes Ox', Oy', Oz'. Les projections $v_{x'}$, $v_{y'}$, $v_{z'}$ du vecteur vitesse du point M *sur les axes mobiles* s'écriront donc

$$v_{x'} = qz' - \tilde{r}y', \quad v_{y'} = \tilde{r}x' - pz', \quad v_{z'} = py' - qx'. \qquad (9.15)$$

Dans les seconds membres des formules (9.15) seules les quantités p, q, $\tilde{r}$ sont fonctions du temps dans le cas général, tandis que les coordonnées x', y', z' de M ne varient pas, car le système de coordonnées $Ox'y'z'$ est invariablement lié au solide. Les formules (9.14) et (9.15) ont été établies par Euler.

Le module de la vitesse d'un point quelconque du solide peut être calculé à partir de ses projections connues, d'après les formules

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad v = \sqrt{v_{x'}^2 + v_{y'}^2 + v_{z'}^2}.$$

D'autre part, puisque la vitesse de chaque point est assimilée à une vitesse de rotation autour d'un axe instantané, le module de la vitesse peut être calculé d'après la formule (8.11):

$$v_M = R\,|\,\omega\,|\,. \qquad (9.16)$$

Ici $R = MO_1$ est la longueur de la perpendiculaire abaissée de M sur l'axe instantané de rotation, et $|\,\omega\,|$ désigne le module du vecteur vitesse angulaire instantanée du solide.

2.3. Accélérations des points du solide ayant un point fixe. Dérivant l'identité (9.12) par rapport au temps et utilisant la formule (3) établie dans le n° 5 de l'Introduction à la cinématique, nous obtiendrons le vecteur accélération d'un point arbitraire du solide:

$$w = \frac{dv}{dt} = \left[\frac{d\omega}{dt},\ r\right] + \left[\omega,\ \frac{dr}{dt}\right].$$

Or, on a ici (voir (9.13))

$$\frac{dr}{dt} = [\omega,\ r],$$

si bien que

$$w = \left[\frac{d\omega}{dt},\ r\right] + [\omega,\ [\omega,\ r]\,].$$

Développons le deuxième terme de la somme d'après la formule du double produit vectoriel (ch. I, formule (1.20)):

$$w=\left[\frac{d\omega}{dt},\ r\right]+(\omega,\ r)\,\omega-\omega^2 r.$$

Introduisons le vecteur unité ω^0 de l'axe instantané de rotation, qui est de même sens que ω, et mettons le vecteur vitesse angulaire instantanée ω sous la forme

$$\omega=|\,\omega\,|\,\omega^0.$$

Il vient alors

$$w=\left[\frac{d\omega}{dt},\ r\right]+\omega^2\{(\omega^0,\ r)\,\omega^0-r\}.$$

Or, $(\omega^0,\ r)$ est la projection du rayon vecteur r du point M sur l'axe instantané de rotation, et $(\omega^0,\ r)\ \omega^0$ est la composante orthogonale

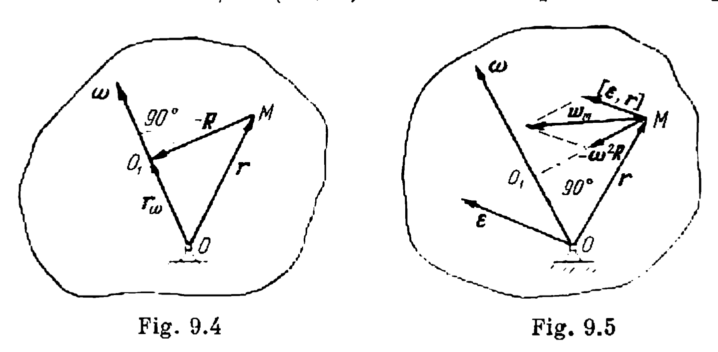


Fig. 9.4 Fig. 9.5

r_ω du rayon vecteur r dans la direction de ω (fig. 9.4). La différence des vecteurs figurant entre accolades est égale au vecteur $-R$:

$$r_\omega-r=-R,$$

où le vecteur $-R=MO_1$ est représenté sur la figure 9.4. Le vecteur accélération du point s'écrira donc

$$w=\left[\frac{d\omega}{dt},\ r\right]-\omega^2 R. \tag{9.17}$$

Expliquons la signification mécanique des deux vecteurs composants. Le vecteur $d\omega/dt$ est appelé *vecteur accélération angulaire instantanée* ε du solide:

$$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}.$$

Si nous plaçons l'origine du vecteur vitesse angulaire instantanée ω au point fixe O, son extrémité suivra une courbe appelée *hodographe* de la vitesse angulaire. La dérivée de ω par rapport au temps est dirigée suivant la tangente à l'hodographe et orientée dans le sens

de mouvement de l'extrémité de ω. Plaçons l'origine de cette dérivée, c'est-à-dire du vecteur accélération angulaire ε, en O et construisons au point M le vecteur $[\varepsilon, r]$ (fig. 9.5). Le vecteur $\left[\frac{d\omega}{dt}, r\right] = [\varepsilon, r]$ est appelé *composante rotative* de l'accélération, et le vecteur $-\omega^2 R$, *composante axipète* de l'accélération, par analogie à la composante centripète $R\omega^2 n$ dans la formule (8.14). Nous voyons sur la figure 9.5 le vecteur accélération du point M du solide mobile autour de son point fixe O.

2.4. Accélérations des points d'un solide libre. Le présent n° est un complément au § 1 qui a trait à l'accélération d'un point du solide libre dans le cas général du mouvement. Pour déterminer cette accélération, il suffit de dériver par rapport au temps la formule (9.10) du vecteur vitesse v_M d'un point quelconque M du solide:

$$w_M = \frac{dv_M}{dt} = \frac{dv_{O'}}{dt} + \left[\frac{d\omega}{dt}, r'\right] + \left[\omega, \frac{dr'}{dt}\right].$$

Le premier vecteur de la somme dans le second membre est l'accélération $w_{O'}$ du pôle O'. Transformons les deux autres vecteurs comme nous l'avons fait en déduisant la formule (9.17). Il vient

$$w_M = w_{O'} + [\varepsilon, r'] - \omega^2 R'. \tag{9.18}$$

Ici ε est le vecteur accélération angulaire instantanée du solide,

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt},$$

$r' = O'M$ (voir fig. 9.1), et le vecteur R' correspond à la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe instantané de rotation, c'est-à-dire sur la direction du vecteur vitesse angulaire instantanée d'origine en O'.

Le lecteur trouvera des exemples correspondants dans le chapitre XII, n° 1.2 (exemples 12.1 et 12.2).

Exercices

Exercice 9.1. Montrer que les projections des vecteurs vitesse des extrémités d'un segment de droite AB de longueur constante sur le support de AB restent égales entre elles, quel que soit le mouvement imprimé à AB.

Indication. Faire intervenir la formule (9.10) en prenant le point A comme pôle, et montrer que la projection du second terme sur $r' = AB$ s'annule.

Exercice 9.2. Deux roues sous forme de disques minces de rayon R sont emmanchées sur un essieu horizontal AB ($AB = 4R$) (fig. 9.6, *a*). Un axe vertical fixe Oz passe par le milieu O_1 de AB; l'essieu AB tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire constante Ω. Les roues se trouvent en contact avec le plan horizontal sur lequel elles roulent sans glisser. On demande la vitesse v d'un point M situé en périphérie de l'une des roues.

I n d i c a t i o n. Introduisons un système de coordonnées mobile $O_1x'y'z$ (fig. 9.6, *b*). Le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega} = -2\Omega\boldsymbol{j}' + \Omega\boldsymbol{k}$ (fig. 9.6, *c*), en sorte que $p = 0$, $q = -2\Omega$, $\tilde{r} = \Omega$ (voir n° 2.2). Soit φ l'angle définissant le

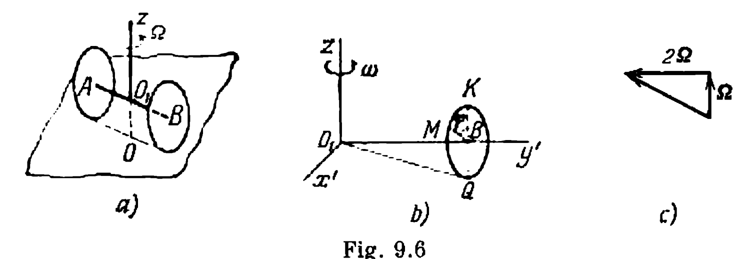


Fig. 9.6

point M (voir fig. 9.6, *b*); les coordonnées de M seront alors $x' = R \sin\varphi$, $y' = 2R$, $z = R\cos\varphi$. Les projections du vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ seront déterminées à l'aide des formules (9.15).

R é p o n s e. $v = R\omega\sqrt{5\sin^2\varphi + 4(1 + \cos\varphi)^2}$.

CHAPITRE X

MOUVEMENT PLAN DU SOLIDE

Par *mouvement plan* du solide, on entend un mouvement dans lequel *tous les points du solide se déplacent dans des plans parallèles à un plan fixe donné* Π. La distance de chaque point du solide au plan fixe donné reste donc invariable (fig. 10.1).

Choisissons un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires $Oxyz$ tel que le plan Oxy soit confondu avec le plan Π mentionné, ou

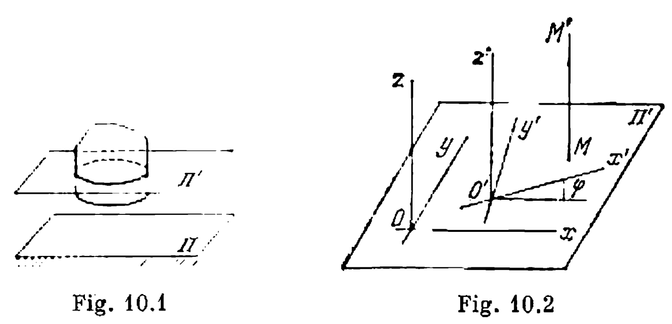


Fig. 10.1 Fig. 10.2

avec un plan Π' parallèle à Π. Faisons coïncider, à l'instant initial du mouvement, le plan $O'x'y'$ (fig. 10.2) du trièdre mobile associé au solide avec le plan Π. Le plan mobile $O'x'y'$ restera confondu avec le plan fixe pendant toute la durée du mouvement plan. En effet, étant par définition parallèles au plan fixe Oxy, les trajectoires de tous les points du plan mobile $O'x'y'$ seront entièrement contenues dans ce plan, car les positions initiales de ces points appartiennent à Oxy. Par conséquent, l'axe mobile $O'z'$ et toute autre droite MM' invariablement liée au solide et perpendiculaire au plan Oxy (voir fig. 10.2) resteront parallèles à l'axe fixe Oz pendant toute la durée du mouvement du type décrit.

§ 1. Vitesse du solide en mouvement plan

1.1. Equations du mouvement plan de la figure. Nous avons vu que *le mouvement plan* du solide *est* complètement *défini par le mouvement d'une figure plane* (ou, ce qui revient au même, d'un plan mobi-

le) *dans son propre plan.* Un tel mouvement s'appelle tout court *mouvement plan* de la figure. Pour définir la position d'une figure dans son plan, c'est-à-dire la position du système de coordonnées mobile $O'x'y'$ associé à la figure par rapport au système de coordonnées fixe Oxy, il suffit de connaître les coordonnées du point O' $(x_{O'}, y_{O'})$ appelé *pôle*, et l'angle φ entre l'axe mobile $O'x'$ et l'axe fixe Ox. Cela revient à dire que les *équations du mouvement plan* peuvent s'écrire ainsi:

$$x_{O'}=f(t),\quad y_{O'}=g(t),\quad \varphi=\varphi(t).$$

La dérivée de l'angle de rotation φ par rapport au temps s'appelle *vitesse angulaire* ω *de la figure* en mouvement plan:

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}.$$

La vitesse angulaire, comme nous l'avons vu dans le ch. IX, n° 1.3, est indépendante du choix du pôle et des axes mobiles. Démontrons-

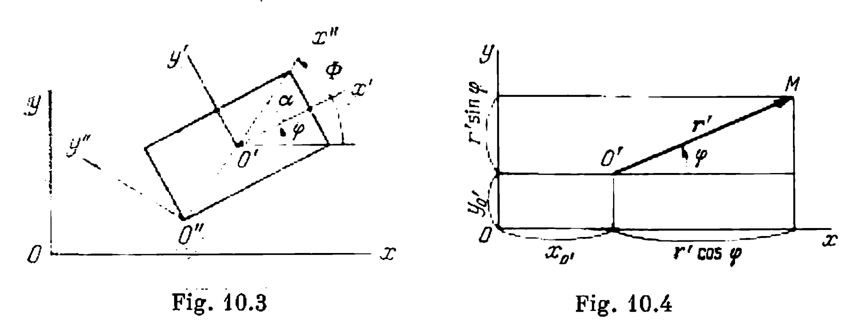


Fig. 10.3 Fig. 10.4

le plus spécialement pour le mouvement plan de la figure. Celle-ci est représentée sur la figure 10.3 sous forme d'un rectangle, le pôle O' se situe en son centre, et les axes mobiles $O'x'$, $O'y'$ associés à la figure sont orientés suivant les axes de symétrie du rectangle; l'angle de rotation $\varphi = (\widehat{x'O'x})$. Plaçons maintenant un nouveau pôle O'' en l'un des sommets du rectangle, orientons l'axe $O''x''$ suivant la diagonale, et l'axe $O''y''$, perpendiculairement à celle-ci. Le nouvel angle de rotation est $\Phi = (\widehat{x''O'x})$,

$$\Phi = \varphi + \alpha.$$

Puisque l'angle α est constant, on obtient en dérivant cette identité que

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}=\omega$$

pendant toute la durée du mouvement, ce qu'il fallait démontrer.

Examinons deux cas particuliers importants. Si $\varphi =$ $=$ const, seules les coordonnées du pôle O' changent avec le temps, tandis que les axes mobiles de $O'x'y'$ restent parallèles aux axes fixes de Oxy. Cela signifie que la figure plane et, par conséquent, le solide effectuent un *mouvement de translation plan.*

Si $x_{O'} =$ const et $y_{O'} =$ const, le pôle reste fixe; seul change avec le temps l'angle φ. Dans ce cas la figure tourne dans son plan autour de l'axe $O'z'$, qui reste fixe en l'occurrence. Ainsi donc, la *rotation du solide autour d'un axe fixe* est un cas particulier du mouvement plan.

Cette constatation n'est certainement pas applicable au mouvement de translation, qui ne peut être plan que dans un cas particulier.

1.2. Vitesses des points de la figure en mouvement plan. Dans le cas du mouvement plan, le théorème d'Euler (voir ch. IX, n° 1.2) s'énonce ainsi:

Tout mouvement instantané de la figure plane dans son plan (mouvement plan instantané) *se compose d'une translation instantanée dans le plan de la figure et d'une rotation instantanée autour d'un axe qui passe par le pôle O' perpendiculairement au plan de la figure.*

Démonstration. On pourrait appliquer la démonstration du théorème d'Euler au cas considéré du mouvement où les axes Oz et $O'z'$ restent parallèles; il est cependant plus instructif de démontrer le théorème de façon immédiate, c'est-à-dire de déduire la formule du vecteur vitesse d'un point M de la figure en mouvement plan. Soit O' le pôle. Désignons par $\boldsymbol{r}'$ le vecteur $\boldsymbol{O'M}$. Choisissons comme angle de rotation φ de la figure l'angle formé par le vecteur $\boldsymbol{r}'$ et la direction positive de l'axe fixe Ox et compté dans le sens antihoraire. De la figure 10.4, on déduit les expressions des coordonnées du point M:

$$x_M = x_{O'} + r' \cos \varphi, \quad y_M = y_{O'} + r' \sin \varphi.$$

Les projections du vecteur vitesse du point M sur les axes Ox et Oy s'en déduisent par dérivation:

$$v_x^M \equiv \dot{x}_M = \dot{x}_{O'} - r'\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad v_y^M \equiv \dot{y}_M = \dot{y}_{O'} + r'\dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (10.1)$$

Or, $\dot{\varphi} = \omega$ est la vitesse angulaire de la figure en mouvement plan, et $r' \cos \varphi$, $r' \sin \varphi$ sont les projections r'_x, r'_y du vecteur $\boldsymbol{r}'$. Les formules précédentes s'écriront donc

$$v_x^M = v_x^{O'} - \omega r'_y, \quad v_y^M = v_y^{O'} + \omega r'_x,$$

ou en notation vectorielle

$$\boldsymbol{v}_M = (v_x^{O'} - \omega r'_y)\, \boldsymbol{i} + (v_y^{O'} + \omega r'_x)\, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{v}_{O'} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r'_x & r'_y & 0 \end{vmatrix},$$

si bien que

$$v_M = v_{O'} + [\omega, r'] \qquad (r' = O'M), \tag{10.2}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Le vecteur v_M est équipollent à la *somme du vecteur vitesse d'un pôle* arbitrairement choisi O' de la figure plane *et du vecteur vitesse du point M de la figure en mouvement de rotation* autour de l'axe $O'z'$ (perpendiculaire au plan de la figure). Connaissant la vitesse $v_{O'}$ du pôle O' et la vitesse angulaire ω de la figure, on peut construire le vecteur vitesse d'un point quelconque M de la figure (fig. 10.5).

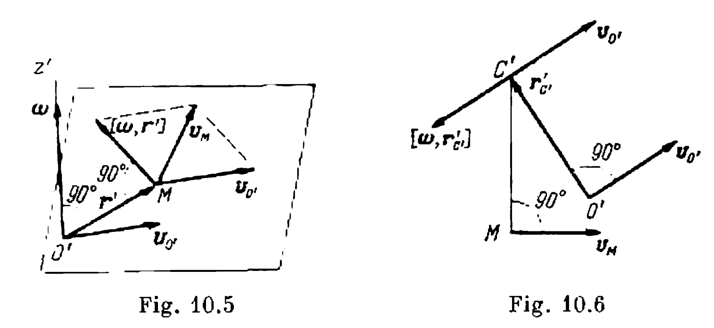


Fig. 10.5 Fig. 10.6

Puisque les vecteurs ω et r' forment entre eux un angle droit, le module du second terme de la somme dans la formule (10.2) est égal à $r' \mid \omega \mid$.

Soulignons que, comme nous l'avons montré dans le n° 1.1, la vitesse angulaire ω de la figure est indépendante du choix du pôle.

1.3. Centre instantané des vitesses. On peut se demander si la figure animée d'un mouvement plan admet un point dont la vitesse à l'instant donné est nulle. Supposons que ce soit un point C'. Menons son rayon vecteur $r'_{C'}$ à partir du pôle O'. Annulant le second membre de la formule (10.2), on obtient une équation vectorielle en $r'_{C'}$:

$$[\omega, r'_{C'}] = -v_{O'}.$$

Cherchons d'abord le module du vecteur $r'_{C'}$. A cet effet, identifions les modules des deux membres de l'équation vectorielle:

$$r'_{C'} \mid \omega \mid = v_{O'}.$$

Pour $\omega \neq 0$, on en déduit

$$r'_{C'} = \frac{1}{\mid \omega \mid} v_{O'}. \tag{10.3}$$

Reste à déterminer la direction de $r'_{C'}$. Regardons la figure 10.6. Faisons tourner le vecteur $v_{O'}$ d'un angle droit autour du point O' dans le sens de la rotation et portons dans cette direction, à partir

de O', un vecteur de module égal à (10.3): ce sera précisément le vecteur $r'_{C'}$. Le vecteur vitesse du point C', défini par la formule (10.2), sera donc nul:

$$v_{C'} = v_{O'} + [\omega, \; r'_{C'}] = 0.$$

En effet, on remarque sur la figure 10.6 que les vecteurs $v_{O'}$ et $[\omega, \; r'_{C'}]$ sont de sens opposés et de modules égaux, en vertu de la formule (10.3). Ainsi donc, la vitesse du point C' de la figure *à l'instant donné* est bien nulle. Ce point de la figure plane (du plan mobile $O'x'y'$) porte le nom de *centre instantané des vitesses.*

Si nous choisissons comme pôle à l'instant donné le point C' au lieu de O', la formule (10.2) s'écrira

$$v_M = [\omega, \; C'M] \qquad (10.4)$$

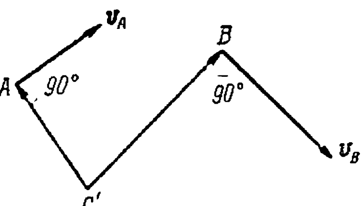


Fig. 10.7

(voir fig. 10.6), car le premier terme $v_{C'}$ est égal à zéro. Le point C' étant mobile, soulignons que dans la formule (10.4) aux instants t différents correspondent des points C' différents. Cette formule laisse voir que n'importe quel point M de la figure en mouvement plan possède à l'instant donné t la même vitesse qu'il aurait en rotation de vitesse angulaire ω autour d'un point C du plan fixe (ou plus exactement autour de l'axe Cz') qui serait confondu à l'instant t avec le point C'. C'est la raison pour laquelle le point C du plan fixe Oxy s'appelle *centre instantané de rotation.*

Si l'on connaît la position du centre instantané des vitesses C' et la vitesse angulaire ω de la figure à cet instant, le vecteur vitesse d'un point quelconque se laisse déterminer comme nous le voyons sur la figure 10.7. Ici on a construit les vecteurs vitesse des points A et B:

$$\begin{aligned} v_A &= C'A \; |\omega| \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v}_A \perp C'A; \\ v_B &= C'B \; |\omega| \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v}_B \perp C'B. \end{aligned} \qquad (10.5)$$

Cette construction peut être considérée comme un exemple de détermination du centre instantané des vitesses dans le cas où les directions des vecteurs vitesse de deux points quelconques de la figure sont connues. On voit en effet que le *centre instantané des vitesses C'* se trouve *à l'intersection des perpendiculaires* élevées en chaque point à la direction du vecteur vitesse correspondant. Le sens de l'un des vecteurs vitesse suffit pour définir le sens de la rotation instantanée de la figure.

On ne peut pas construire le point C' si les perpendiculaires ne se coupent pas: or, dans ce cas les vecteurs vitesse ont leurs directions parallèles. Nous montrerons un peu plus tard que la distribu-

tion instantanée des vitesses est dans ce cas la même qu'en mouvement de translation. On a à l'instant considéré $\omega = 0$ et le centre instantané des vitesses s'éloigne à l'infini, ce qui peut être interprété comme un cas limite de la formule (10.3).

Il ressort des égalités (10.5) que

$$\frac{v_A}{C'A} = |\omega| \quad \text{et} \quad \frac{v_B}{C'B} = |\omega|,$$

ou

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{C'A}{C'B}, \tag{10.6}$$

ce qui veut dire que *les modules des vecteurs vitesse* des points de la figure en mouvement plan *sont proportionnels aux distances* des points *au centre instantané des vitesses.*

Dans la construction décrite, les perpendiculaires peuvent se confondre, auquel cas la position du point C' devient indéterminée

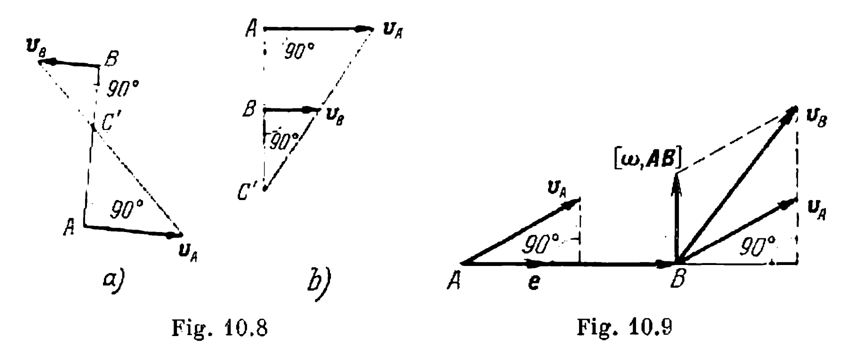


Fig. 10.8 Fig. 10.9

(fig. 10.8). On cherche alors le centre instantané des vitesses C' à l'intersection du segment joignant les extrémités des vecteurs v_A, v_B avec la perpendiculaire commune AB ou avec son prolongement. En effet, on a dans les deux cas de la figure 10.8, *a*, *b*, par similitude des triangles, la proportion

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{C'A}{C'B}.$$

En dehors des cas montrés sur la figure 10.8, les vecteurs vitesse de deux points de la figure en mouvement plan ne peuvent pas être de modules et de directions quelconques. Il existe entre ces vecteurs une dépendance définie par le

Théorème. *Les vecteurs vitesse de deux points de la figure ont leurs projections égales sur la droite joignant ces points.*

Démonstration. On a construit sur la figure 10.9 les vecteurs $\boldsymbol{v}_A$ et $\boldsymbol{v}_B$. Choisissons le point A comme pôle; la formule

(10.2) s'écrit alors

$$v_B = v_A + [\omega, AB].$$

Pour avoir les projections indiquées, multiplions scalairement les deux membres de cette égalité vectorielle par le vecteur unité e de support AB:

$$(v_B, e) = (v_A, e) + ([\omega, AB], e).$$

Or, $[\omega, AB]$ est un vecteur perpendiculaire à AB, si bien que son produit scalaire par le vecteur e porté par AB est nul. De la dernière égalité scalaire on tire donc

$$\text{proj}_{AB} v_B = \text{proj}_{AB} v_A, \tag{10.7}$$

et le théorème est démontré *).

Le théorème découle d'ailleurs immédiatement de la figure 10.9. Les projections sur la droite AB du vecteur v_B et du vecteur v_A porté en B sont égales, car les extrémités de ces vecteurs sont portées par une même perpendiculaire à AB.

Supposons à présent que $v_A \parallel v_B$. Si l'on a en outre $v_A \perp AB$ (auquel cas on a aussi $v_B \perp AB$), les valeurs de v_A, v_B peuvent être quelconques (fig. 10.8, *a*, *b*). Cela ne contredit pas le théorème, vu que les projections de v_A et v_B sur AB s'annulent.

Or, si deux vecteurs parallèles v_A, v_B ne sont pas perpendiculaires à AB, il doit y avoir $v_A = v_B$ en vertu du théorème que l'on vient de démontrer. Pour s'en persuader, il suffit de construire les vecteurs v_A, v_B et leurs projections sur AB. Il est à noter que l'égalité $v_A = v_B$ signifie que la distribution instantanée des vitesses des points de la figure plane est la même que dans son mouvement de translation.

Considérons deux exemples de détermination des vitesses des points de la figure en mouvement plan.

Exemple 10.1. Déterminer les vitesses des points A, B, D, E d'une roue de wagon qui roule sans glisser sur le rail. Les rayons extérieur et intérieur de la roue sont R et r, la vitesse de son centre O' est $v_{O'}$ (fig. 10.10).

Solution. Puisque la roue roule sans glisser, la vitesse instantanée du point de contact C' avec le rail est nulle: par conséquent, C' est le centre instantané des vitesses de la roue. Adoptons le point C' comme pôle; le module $v_{O'}$ du vecteur vitesse de O' s'écrira

$$v_{O'} = r\,|\,\omega\,|.$$

La vitesse angulaire ω de la roue (qui est indépendante, rappelons-le, du choix du pôle) sera alors

$$|\,\omega\,| = \frac{1}{r}\, v_{O'}.$$

---

*) Dans la démonstration de ce théorème, nous n'avons pas invoqué la condition $\omega \perp AB$, ce qui fait que le théorème est applicable aussi au cas général du mouvement du solide.

Les modules des vecteurs vitesse cherchés seront donc égaux aux produits de $|\omega|$ par la distance du point correspondant de la roue au centre instantané des vitesses C' :

$$v_A = C'A\,|\omega| = \frac{1}{r}\sqrt{R^2+r^2}\,v_{O'}, \qquad v_B = C'B\,|\omega| = \frac{1}{r}(R+r)\,v_{O'},$$

$$v_D = C'D\,|\omega| = \frac{1}{r}\sqrt{R^2+r^2}\,v_{O'}, \qquad v_E = C'E\,|\omega| = \frac{1}{r}(R-r)\,v_{O'}.$$

Les vecteurs vitesse sont perpendiculaires à $C'A$, $C'B$, $C'D$ et $C'E$ respectivement. Le sens de chaque vecteur est celui de la rotation autour du centre instantané de rotation C'.

E x e m p l e 10.2. La manivelle $OA = r$ d'un mécanisme bielle-manivelle tourne uniformément autour d'un point fixe O avec une vitesse angulaire Ω

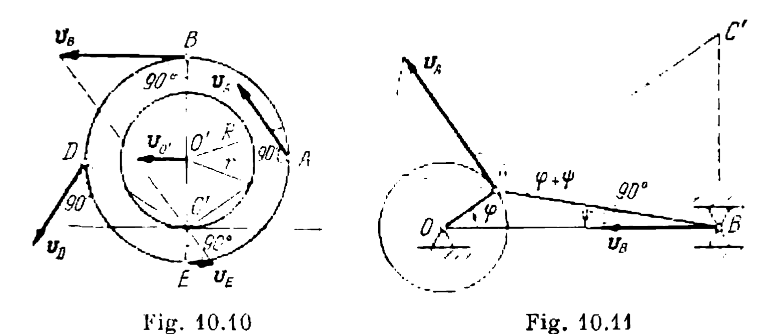


Fig. 10.10 Fig. 10.11

(fig. 10.11). Elle est articulée en A sur la bielle $AB = l$ qui actionne le coulisseau B guidé en translation parallèlement à l'axe OB. On demande la vitesse du coulisseau B et la vitesse angulaire ω de la bielle AB à l'instant où l'angle $\widehat{AOB}$ est égal à φ.

S o l u t i o n. Nous admettons que l'angle ψ est connu : pour le déterminer, il suffit de reconstituer la position du mécanisme pour l'angle φ donné. La détermination analytique de ψ est également possible (voir l'exemple 7.6). Le vecteur vitesse v_A du point A de la manivelle est perpendiculaire au rayon OA, son module est égal à $r\Omega$. Le vecteur vitesse du point B est porté par la droite BO. Le centre instantané des vitesses C' de la bielle AB est situé à l'intersection des perpendiculaires en A et B aux directions des vecteurs vitesse de ces deux points.

Les modules des vecteurs vitesse des points étant proportionnels aux distances entre ces derniers et le centre instantané des vitesses (voir formule (10.6)), on a

$$v_B = \frac{C'B}{C'A}\,v_A = \frac{C'B}{C'A}\,r\Omega.$$

La deuxième méthode de solution utilise le théorème d'égalité des projections des vecteurs vitesse des extrémités d'un segment sur le support de ce segment. Le segment étant constitué par la bielle AB, on a

$$v_A \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\varphi+\psi)\right] = v_B \cos\psi,$$

d'où

$$v_B = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi}\,v_A = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi}\,r\Omega.$$

Appliquant le théorème des sinus au triangle ABC', on montre que l'expression de v_B obtenue est identique à l'expression établie plus haut.

La vitesse angulaire ω de la bielle est déterminée par la formule (10.6):

$$\omega = \frac{v_A}{C'A} = \frac{r}{C'A}\,\Omega.$$

§ 2. Accélération du solide en mouvement plan

2.1. Accélération des points de la figure en mouvement plan. Pour déterminer les projections du vecteur accélération d'un point M de la figure sur les axes de coordonnées fixes Ox et Oy, dérivons les expressions (10.1) par rapport au temps:

$$w_x^M = \ddot{x}_{O'} - \ddot{\varphi} r' \sin\varphi - \dot{\varphi}^2 r' \cos\varphi,$$

$$w_y^M = \ddot{y}_{O'} + \ddot{\varphi} r' \cos\varphi - \dot{\varphi}^2 r' \sin\varphi.$$

Reprenant les notations adoptées dans le nº 1.2 et introduisant le vecteur accélération du pôle $w_{O'}$ et l'accélération angulaire de la figure plane $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$, on obtient

$$w_x^M = w_x^{O'} - \varepsilon r_y' - \omega^2 r_x', \quad w_y^M = w_y^{O'} + \varepsilon r_x' - \omega^2 r_y',$$

ou en notation vectorielle

$$w_M = w_x^M \boldsymbol{i} + w_y^M \boldsymbol{j} = w_x^{O'} \boldsymbol{i} + w_y^{O'} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ r_x' & r_y' & 0 \end{vmatrix} - \omega^2 (r_x' \boldsymbol{i} + r_y' \boldsymbol{j}).$$

On peut obtenir la même expression à partir de la formule (9.18) pour l'accélération d'un point arbitraire M dans le cas général du mouvement du solide. En effet, le vecteur $\boldsymbol{R}'$ dans (9.18) est égal au vecteur $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{O'M}$ puisque la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe instantané de rotation de la figure en mouvement plan est $\boldsymbol{MO'}$ (voir fig. 9.5). Mettons donc la dernière expression sous la forme

$$\boldsymbol{w}_M = \boldsymbol{w}_{O'} + [\boldsymbol{\varepsilon}, \ \boldsymbol{r}'] - \omega^2 \boldsymbol{r}'. \tag{10.8}$$

Le *vecteur accélération* $\boldsymbol{w}_M$ *du point* M en mouvement plan est équipollent *à la somme géométrique du vecteur accélération* $\boldsymbol{w}_{O'}$ *d'un pôle* arbitraire O' de la figure plane, *du vecteur accélération rotative* $\boldsymbol{w}_\tau^r = [\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{r}']$ *et du vecteur accélération centripète* $\boldsymbol{w}_n^r = -\omega^2 \boldsymbol{r}'$ (figure 10.12). Ici $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le vecteur accélération angulaire instantanée de la figure plane:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

(voir ch. IX, nº 2.4). Or, puisque le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ de la figure plane reste perpendiculaire au plan de cette dernière

pendant toute la durée du mouvement plan, le vecteur ε est dirigé lui aussi suivant l'axe instantané de rotation, étant orienté dans le sens de ω si la rotation est accélérée et dans le sens inverse si elle est retardée. Nous utiliserons par la suite les valeurs algébriques de la vitesse angulaire et de l'accélération angulaire de la figure plane:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

En traçant la figure 10.12, on a supposé que $\varepsilon > 0$. Aussi le vecteur accélération rotative w_τ^r est-il orienté dans le sens positif (dans le

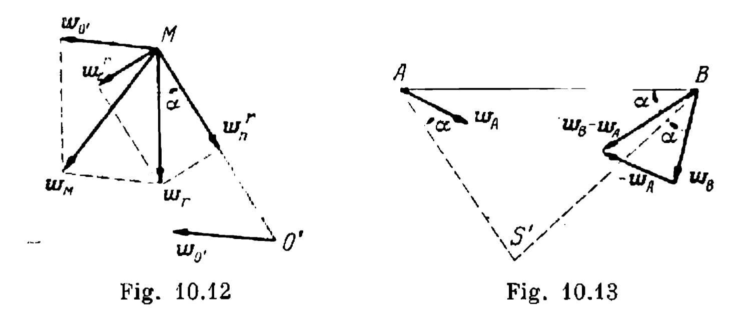


Fig. 10.12 Fig. 10.13

sens antihoraire par rapport au pôle O'). On aboutit au même résultat en portant le vecteur ε à partir du point O' perpendiculairement en deçà du plan de la figure, en construisant le vecteur w_τ^r équipollent au produit vectoriel des vecteurs ε et $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{O'M}$ et orienté selon la règle de la vis à droite, et en reportant ensuite le vecteur w_τ^r au point M. En ce qui concerne le dernier terme de la somme, le vecteur accélération centripète w_n^r, il est toujours orienté du point M vers le pôle O' (sauf les cas où il s'annule, lorsque la vitesse angulaire ω de la figure plane est égale à zéro). Les modules des deux derniers termes de la formule (10.8) sont égaux respectivement à

$$w_\tau^r = r' \mid \varepsilon \mid, \quad w_n^r = r'\omega^2. \tag{10.9}$$

Ces expressions coïncident avec (8.12) et (8.13). D'après la formule (10.8), le vecteur accélération du point M en mouvement plan se réduit alors à la somme géométrique du vecteur accélération $w_{O'}$ du pôle O' et du vecteur accélération w_r du point M en rotation autour du pôle considéré comme fixe:

$$w_M = w_{O'} + w_r \quad (w_r = w_\tau^r + w_n^r). \tag{10.8a}$$

Considérant le vecteur w_r comme accélération de M relativement au pôle O', nous l'avons muni de l'indice r signifiant *relatif*. Quant à ses composantes w_τ^r et w_n^r, nous avons gardé pour l'accélération rotative et l'accélération centripète les mêmes indices distinctifs inférieurs que dans les formules (8.12) et (8.13), bien qu'elles ne

soient plus dirigées, en toute rigueur, suivant la tangente et la normale à la trajectoire du point M. Les composantes de $\boldsymbol{w}_r$ étant perpendiculaires entre elles, le module du vecteur w_r s'écrira (voir la formule (8.15))

$$w_r = \sqrt{(w_\tau^r)^2 + (w_n^r)^2} = r' \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Pour déterminer la direction du vecteur w_r, rappelons que le vecteur accélération rotative $\boldsymbol{w}_\tau^r$ est orienté dans le sens des valeurs croissantes ou décroissantes de l'angle φ, suivant que ε est positive ou négative, tandis que le vecteur accélération centripète w_n^r est toujours dirigé de M vers O' (fig. 10.12). Désignons par α l'angle aigu que fait le vecteur $\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{w}_\tau^r + \boldsymbol{w}_n^r$ avec la direction de $\boldsymbol{MO'}$; il vient

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w_\tau^r}{w_n^r} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \qquad (10.10)$$

Cela revient à dire que l'angle α reste le même, à l'instant donné, pour tous les points de la figure et ne dépend donc pas du choix du pôle O'.

2.2. Centre instantané des accélérations. Le point S' de la figure plane dont l'accélération est nulle à l'instant considéré porte le nom de *centre instantané des accélérations*. Si un tel point existe à l'instant donné, alors, en le prenant comme pôle, on obtient d'après la formule (10.8a):

$$\boldsymbol{w}_M = \boldsymbol{w}_\tau^r + \boldsymbol{w}_n^r.$$

Ainsi donc, le vecteur accélération d'un point quelconque de la figure à l'instant donné se laisse réduire à la somme géométrique des vecteurs accélérations rotative $\boldsymbol{w}_\tau^r$ et centripète w_n^r *relativement au centre instantané des accélérations* S'. L'angle α défini par la formule (10.10) sera alors égal à l'angle aigu compris entre le vecteur accélération $\boldsymbol{w}_M$ du point M et la direction de $\boldsymbol{MS'}$.

Cette propriété du centre instantané des accélérations est analogue à celle du centre instantané des vitesses C': le vecteur vitesse d'un point quelconque M forme un angle invariable (plus exactement un angle droit) avec la direction de $\boldsymbol{MC'}$. Cette propriété permet de déterminer le centre instantané des accélérations S' à partir des vecteurs accélération connus de deux points, $\boldsymbol{w}_A$, $\boldsymbol{w}_B$ (fig. 10.13). Plaçons en l'un des points, par exemple en B, l'origine du vecteur $\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{w}_B - \boldsymbol{w}_A = \boldsymbol{w}_B + (-\boldsymbol{w}_A)$: c'est le vecteur accélération de B relativement à A, car on a d'après la formule (10.8a) en adoptant A comme pôle

$$\boldsymbol{w}_B = \boldsymbol{w}_A + \boldsymbol{w}_r.$$

Ceci fait, on détermine sur le dessin l'angle α entre le vecteur $\boldsymbol{w}_B - \boldsymbol{w}_A$ et le support de BA et l'on mène par A et B deux droites

faisant le même angle α (en conservant le sens de lecture de l'angle) avec w_A et w_B: c'est l'intersection de ces droites qui détermine la position du centre instantané des accélérations S'.

Exemple 10.3. Déterminer l'accélération du centre instantané des vitesses C' dans les conditions de l'exemple 10.1 en se donnant à titre complémentaire la valeur algébrique de l'accélération du centre de la roue O' à l'instant donné égale à $-w_{O'}$, où $w_{O'}$ est le module du vecteur accélération.

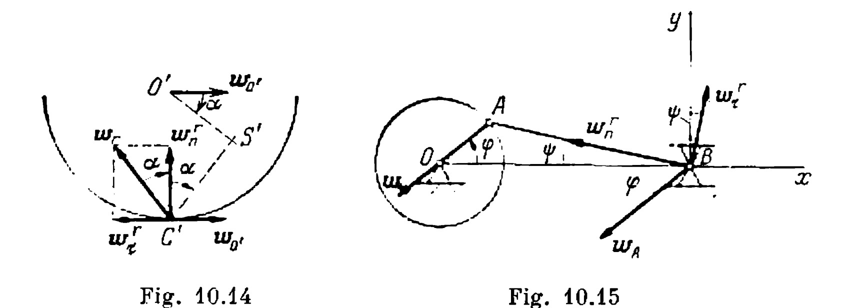


Fig. 10.14 Fig. 10.15

Solution. Construisons sur la figure 10.14 le vecteur $w_{O'}$ orienté dans le sens inverse du mouvement du centre O'. La vitesse angulaire de rotation de la roue est $\omega = v_{O'}/r$; l'accélération angulaire sera donc

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dv_{O'}}{dt} = -\frac{1}{r} w_{O'}.$$

Adoptons O' comme pôle et construisons les vecteurs accélération $w_{O'}$, w_τ^r et w_n^r de C'. Les modules des deux derniers seront

$$w_\tau^r = O'C' \, |\varepsilon| = w_{O'}, \qquad w_n^r = O'C'\omega^2 = \frac{1}{r} v_{O'}^2.$$

L'accélération centripète w_n^r est dirigée comme toujours vers le pôle O', et l'accélération rotative w_τ^r, perpendiculaire à cette dernière, est orientée en l'occurrence à l'opposé de la rotation, car ε est négative. D'après la formule (10.8a)

$$w_{C'} = w_{O'} + w_\tau^r + w_n^r = w_n^r.$$

En effet, pour le point C' on a $w_{O'} + w_\tau^r = 0$, aussi le vecteur accélération du point C' est-il égal à w_n^r.

Cherchons le centre instantané des accélérations. Construisons le vecteur

$$w_{C'} - w_{O'} = w_\tau^r + w_n^r = w_r$$

d'origine en C'. Déterminons sur le dessin l'angle α entre le vecteur w_r et la droite $C'O'$, menons par O' et C' deux droites sous l'angle α (mesuré dans le sens négatif, c'est-à-dire horaire, car $\varepsilon < 0$) par rapport aux vecteurs $w_{O'}$ et $w_{C'}$ et trouvons le centre instantané des accélérations S' à l'intersection de ces droites (voir fig. 10.14).

Exemple 10.4. Dans les conditions de l'exemple 10.2, déterminer l'accélération du coulisseau B (fig. 10.15).

S o l u t i o n. Adoptons le point A de la bielle AB comme pôle et décomposons le vecteur accélération du point B d'après la formule (10.9):

$$\boldsymbol{w}_B = \boldsymbol{w}_A + \boldsymbol{w}_\tau^r + \boldsymbol{w}_n^r.$$

Construisons les trois derniers vecteurs sur la figure 10.15 en supposant à priori que l'accélération angulaire inconnue ε de la bielle AB est positive: le vecteur $\boldsymbol{w}_\tau^r$ tourne donc autour de A dans le sens antihoraire. Les modules des vecteurs indiqués s'écrivent respectivement

$$w_A = r\Omega^2, \quad w_\tau^r = AB\varepsilon, \quad w_n^r = AB\omega^2 = AB\,\frac{r^2\Omega^2}{C'A^2},$$

où la vitesse angulaire ω de la bielle AB figure sous sa forme établie en fin de l'exemple 10.2. Projetons la formule vectorielle de $\boldsymbol{w}_B$ sur les axes Bx et By:

$$w_x^B = -w_A\cos\varphi + w_\tau^r\sin\psi - w_n^r\cos\psi = \\ = -r\Omega^2\cos\varphi + AB\varepsilon\sin\psi - AB\,\frac{r^2\Omega^2}{C'A^2}\cos\psi,$$

$$0 = w_y^B = -w_A\sin\varphi + w_\tau^r\cos\psi + w_n^r\sin\psi = \\ = -r\Omega^2\sin\varphi + AB\varepsilon\cos\psi + AB\,\frac{r^2\Omega^2}{C'A^2}\sin\psi;$$

on a mis $w_y^B = 0$, parce que le coulisseau B se déplace en suivant l'axe Ox. De la deuxième équation, tirons l'accélération angulaire ε de la bielle AB dans son mouvement plan:

$$\varepsilon = \frac{r\Omega^2}{AB\cos\psi}\left(\sin\varphi - \frac{rAB}{C'A^2}\sin\psi\right).$$

Portant cette expression de ε dans l'expression de w_x^B, on obtient

$$w_B = w_x^B = -r\Omega^2\left[\cos\varphi + \frac{rAB}{C'A^2}\cos\psi - \operatorname{tg}\psi\left(\sin\varphi - \frac{rAB}{C'A^2}\sin\psi\right)\right] = \\ = -\frac{r\Omega^2}{\cos\psi}\left[\cos(\varphi+\psi) + \frac{rAB}{C'A^2}\right].$$

Dans la position représentée sur la figure 10.15 on a $w_B < 0$, ce qui signifie que le vecteur accélération du coulisseau est orienté vers le point O.

E x e m p l e 10.5. Le segment de droite AB est animé d'un mouvement plan. On connaît les vitesses et les accélérations de ses extrémités. Déterminer la vitesse et l'accélération de son centre D, ainsi que la vitesse angulaire et l'accélération angulaire du segment AB (fig. 10.16).

S o l u t i o n. Prenons le point A comme pôle et choisissons un système de coordonnées mobile $Ax'y'$ associé au segment AB. Orientons l'axe Ax' suivant le support de AB, et l'axe Ay', perpendiculairement à Ax', de façon à avoir un repère direct (la rotation se faisant de Ax' vers Ay' dans le sens antihoraire). Soient $\boldsymbol{i}'$ et $\boldsymbol{j}'$ les vecteurs unités des axes Ax' et Ay'. On a d'après les formules (10.2) et (10.8) en mettant $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{AD}$

$$\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_A + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{AD}], \tag{1}$$

$$\boldsymbol{w}_D = \boldsymbol{w}_A + \varepsilon AD\boldsymbol{j}' - \omega^2 AD\boldsymbol{i}'. \tag{2}$$

Prenons à présent le point B comme pôle, orientons l'axe Bx'' du système de coordonnées mobile $Bx''y''$ suivant BA, et l'axe By'' suivant la perpendiculaire à Bx'', de façon à avoir le système $Bx''y''$ direct comme précédemment. Les vec-

teurs unités i'' et j'' s'écriront

$$i'' = -i', \qquad j'' = -j'.$$

D'après les formules (10.2) et (10.8), en mettant $r' = BD = -AD$, on a

$$v_D = v_B + [\omega, BD] = v_B - [\omega, AD], \tag{3}$$

$$w_D = w_B + \varepsilon BDj'' - \omega^2 BDi'' = w_B - \varepsilon ADj' + \omega^2 ADi'. \tag{4}$$

Additionnant les égalités vectorielles (1) et (3), puis (2) et (4), on obtient

$$v_D = \frac{1}{2}(v_A + v_B), \tag{5}$$

$$w_D = \frac{1}{2}(w_A + w_B). \tag{6}$$

Ainsi donc, le vecteur vitesse (le vecteur accélération) du centre du segment animé d'un mouvement plan est égal à la demi-somme des vecteurs vitesse (vecteurs accélération) de ses extrémités.

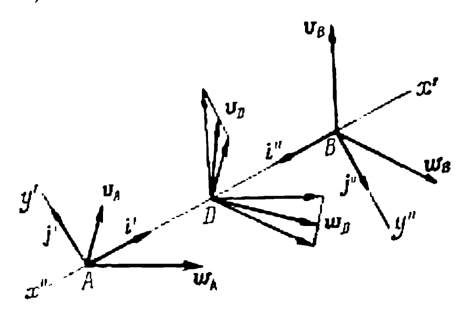


Fig. 10.16

Portons l'expression (5) dans la formule (1). Il vient

$$\frac{1}{2}(v_A + v_B) = v_A + [\omega, AD], \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}(v_B - v_A) = [\omega, AD]. \tag{7}$$

Le vecteur vitesse angulaire ω de la figure (ou du segment) en mouvement plan est perpendiculaire au plan de la figure. Identifiant les modules des vecteurs dans cette dernière égalité:

$$\frac{1}{2}|v_B - v_A| = |\omega| AD,$$

on obtient donc le module de la vitesse angulaire instantanée de la figure (du segment) en mouvement plan:

$$|\omega| = \frac{|v_B - v_A|}{2AD} = \frac{|v_B - v_A|}{AB}. \tag{8}$$

Le sens de la rotation se laisse déterminer à partir de l'égalité vectorielle (7). Portons à présent l'expression (6) dans la formule (2). Il vient

$$\frac{1}{2}(w_B - w_A) + \omega^2 ADi' = \varepsilon ADj'. \tag{9}$$

Multiplions scalairement les deux membres de l'égalité vectorielle (9) par le vecteur unité j' ; il vient, puisque $(i', j') = 0$ et $2AD = AB$,

$$(w_B, j') - (w_A, j') = \varepsilon AB.$$

Remarquant que le premier membre de l'égalité est la différence des projections des vecteurs accélération des extrémités du segment sur l'axe Ay', nous pouvons écrire la valeur algébrique de l'accélération angulaire instantanée ε du segment sous la forme

$$\varepsilon = \frac{1}{AB} (\text{proj}_{Ay'} w_B - \text{proj}_{Ay'} w_A). \tag{10}$$

R e m a r q u e. Les vecteurs vitesse des extrémités du segment, v_A, v_B, ne sont jamais arbitraires mais liés entre eux de la façon déterminée par le théorème du nº 1.3. Si les v_A et v_B sont connues, les vecteurs accélération des extrémités du segment, w_A, w_B, ne peuvent être arbitraires, eux non plus. En effet, multiplions scalairement les deux membres de l'égalité vectorielle (9) par le vecteur unité i'. Il vient

$$(w_B, i') - (w_A, i') + 2\omega^2 AD = 0.$$

Faisant intervenir la formule (8), on en déduit

$$\text{proj}_{AB}\, w_B = \text{proj}_{AB}\, w_A - \frac{|v_B - v_A|^2}{AB}.$$

Exercices

E x e r c i c e 10.1. La manivelle OA d'un mécanisme bielle-manivelle tourne autour de l'axe O avec une vitesse angulaire constante ω_{OA} qui correspond à 240 tr/mn. La bielle AB est articulée en son centre G sur un levier oscillant GD, lequel est articulé à son tour à une deuxième manivelle DE qui oscille

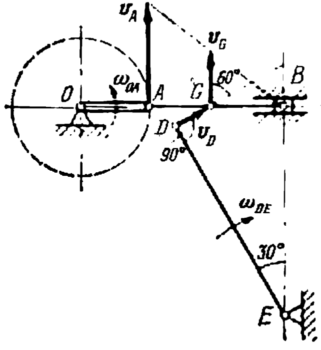



Fig. 10.17

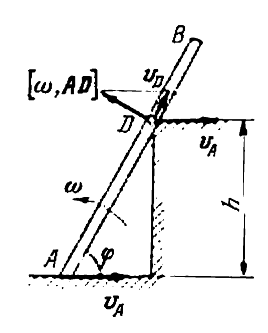


Fig. 10.18

librement autour de son point E (fig. 10.17). Déterminer la vitesse angulaire de la manivelle DE si les points B et E sont situés sur une même verticale, OA = $= 0{,}15$ m, $AB = 0{,}3$ m, $DE = 0{,}4$ m, $\widehat{GDE} = 90°$, $\widehat{BED} = 30°$.

R é p o n s e. $\omega_{DE} = \frac{3}{4}\pi = 2{,}36$ rad/s.

E x e r c i c e 10.2. La barre AB située dans un plan vertical glisse par son extrémité A sur le plan horizontal avec une vitesse $v_A = 1{,}2$ m/s tout en

s'appuyant en sa partie supérieure sur l'angle d'un massif de maçonnerie de hauteur $h = 2$ m (fig. 10.18). On demande de savoir la vitesse du point D en lequel la barre AB touche à la maçonnerie et la vitesse angulaire ω de la barre à l'instant où l'angle φ devient égal à 60°.

Réponse. $v_D = 0{,}6$ m/s, $\omega = 0{,}45$ rad/s.

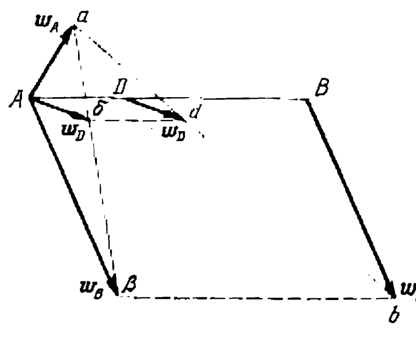


Fig. 10.19

Exercice 10.3. Montrer que les projections des vecteurs accélération de deux points quelconques de la figure en mouvement plan sur la droite joignant ces points deviennent égales entre elles à l'instant où la vitesse angulaire instantanée de la figure s'annule.

Indication. Cette proposition se démontre par analogie au théorème sur les projections des vecteurs vitesse de deux points de la figure sur la droite qui joint ces points.

Exercice 10.4. Montrer que les extrémités des vecteurs accélération des points d'un segment de longueur constante en mouvement plan (les points a, d, b) sont situées sur une même droite et divisent cette droite en parties proportionnelles aux distances entre les points (fig. 10.19).

Indication. Montrer d'abord que

$$\frac{|w_D - w_A|}{|w_B - w_A|} = \frac{AD}{AB},$$

c'est-à-dire que

$$\frac{a\delta}{a\beta} = \frac{AD}{AB},$$

puis démontrer par similitude des triangles que

$$\frac{ad}{ab} = \frac{a\delta}{a\beta}.$$

CHAPITRE XI

MOUVEMENT COMPOSÉ DU POINT

§ 1. Vitesse du point en mouvement composé

1.1. Mouvements absolu, relatif, d'entraînement. Nous avons étudié dans le chapitre VII le mouvement du point par rapport à un système de référence considéré comme fixe. Examinons maintenant le mouvement du point M par rapport à un solide S qui se déplace par rapport à un système de référence fixe $Oxyz$. Tout d'abord convenons de la terminologie et des notations.

Le mouvement du point M par rapport au système de référence fixe sera appelé *absolu*; nous dirons donc aussi *trajectoire absolue*, *vitesse absolue* et *accélération absolue*.

Le mouvement du même point M par rapport au solide S sera appelé *relatif* (*trajectoire relative*, *vitesse relative*, *accélération relative*).

Le mouvement du point M dans lequel ce point, considéré comme fixe par rapport au solide S, serait entraîné par le mouvement de S par rapport au système de référence fixe s'appelle *mouvement d'entraînement* (*trajectoire d'entraînement*, *vitesse d'entraînement*, *accélération d'entraînement*) à l'instant donné.

Ainsi donc, le mouvement absolu du point M est perçu par un observateur immobile, et le mouvement relatif, par un observateur mobile avec S. Quant au mouvement d'entraînement de M, c'est le mouvement du point de S avec lequel le point mobile M se confond à l'instant donné, perçu par un observateur immobile.

Les grandeurs scalaires et vectorielles intervenant dans le mouvement absolu seront marquées par l'indice a; les indices e et r désigneront le mouvement d'entraînement et le mouvement relatif respectivement.

1.2. Théorème de la composition des vitesses. On a représenté sur la figure 11.1 les positions du solide S et du point M aux instants t et $t' = t + \Delta t$; ici M' est la position de M à l'instant $t + \Delta t$. Soit M_1 la position que pourrait occuper le point M à l'instant $t + \Delta t$ si, à l'instant t, il était fixé par rapport au solide S. Les vecteurs $\boldsymbol{MM'}$, $\boldsymbol{MM_1}$ et $\boldsymbol{M_1M'}$ caractérisent donc les déplacements du point M dans ses mouvements absolu, relatif et d'entraînement. Ces trois vecteurs sont des cordes sous-tendant les arcs des trajectoires

absolue, relative et d'entraînement marquées sur la figure. Nous avons une égalité vectorielle évidente

$$\boldsymbol{MM'} = \boldsymbol{MM_1} + \boldsymbol{M_1M'}$$

que nous pouvons mettre sous la forme

$$\Delta \boldsymbol{r}_a = \Delta \boldsymbol{r}_e + \Delta \boldsymbol{r}_r,$$

$\Delta \boldsymbol{r}$ étant le symbole qui désigne de façon générale un vecteur déplacement. Remarquons que le vecteur déplacement relatif $\boldsymbol{M_1M'} =$

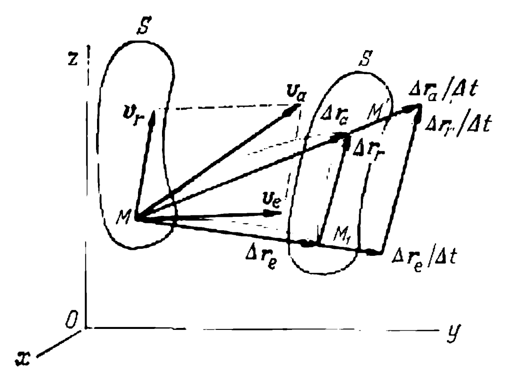


Fig. 11.1

$= \Delta \boldsymbol{r}_r$ est représenté ici pour l'instant $t + \Delta t$. Divisons la dernière égalité vectorielle terme à terme par le scalaire Δt; il vient

$$\frac{\Delta \boldsymbol{r}_a}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}_e}{\Delta t} + \frac{\Delta \boldsymbol{r}_r}{\Delta t}.$$

Compte tenu de la définition du vecteur vitesse moyenne (ch. VII, n° 1.1), cette égalité vectorielle s'écrira comme suit:

$$\boldsymbol{v}^a_{\text{moy}} = \boldsymbol{v}^e_{\text{moy}} + \boldsymbol{v}^r_{\text{moy}}.$$

Passons enfin à la limite pour $\Delta t \to 0$; il vient

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r. \qquad (11.1)$$

Nous avons le théorème de la composition des vitesses du point en mouvement composé:

En mouvement composé *la vitesse absolue du point est égale à la somme géométrique des vitesses d'entraînement et relative* de ce point. Autrement dit, le vecteur vitesse absolue du point résulte de la composition de ses vecteurs vitesse d'entraînement et vitesse relative d'après la règle du parallélogramme (ou du triangle, ce qui revient pratiquement au même). Nous voyons sur la figure 11.1 les vecteurs $\boldsymbol{v}_a$, $\boldsymbol{v}_e$, $\boldsymbol{v}_r$ dirigés suivant les tangentes aux trajectoires correspon-

dantes. Le vecteur v_r est représenté à l'instant t, ce qui est conforme à la réalité.

Le module du vecteur vitesse absolue du point se cherche d'après le théorème des cosinus:

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos(\widehat{v_e, v_r})}, \tag{11.2}$$

où $(\widehat{v_e, v_r})$ est l'angle formé entre les vecteurs vitesse d'entraînement et vitesse relative (voir fig. 11.1).

Dans le cas particulier où ces derniers sont perpendiculaires, le parallélogramme devient rectangle, si bien que

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} \quad (\text{si } v_e \perp v_r). \tag{11.2a}$$

Si les vecteurs vitesse d'entraînement et vitesse relative du point sont portés par une même droite et orientés dans le même sens, on a

$$v_a = v_e + v_r \qquad (\text{si } v_e \uparrow\uparrow v_r), \tag{11.2b}$$

et s'ils sont orientés dans les sens opposés, on a

$$v_a = |v_e - v_r| \qquad (v_e \uparrow\downarrow v_r). \tag{11.2c}$$

E x e m p l e 11.1. Deux tiges AB et CD se déplacent en translation dans un plan commun avec des vitesses v_1 et v_2 perpendiculaires à AB et à CD respectivement (fig. 11.2). L'angle entre les tiges est égal à α. Déterminer la vitesse du petit anneau M enfilé sur les deux tiges.

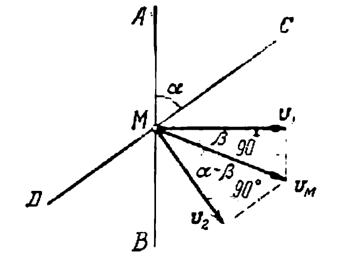


Fig. 11.2

S o l u t i o n. Le mouvement de l'anneau M peut être décomposé de deux façons: soit en mouvement d'entraînement avec la vitesse v_1 égale à la vitesse de translation de la tige AB et mouvement relatif de M le long de CD, soit en mouvement d'entraînement avec la vitesse v_2 de la tige CD et mouvement relatif le long de AB. Puisque la vitesse absolue v_M de l'anneau est égale à la somme géométrique de ses vitesses d'entraînement et relative, l'extrémité du vecteur v_M doit être située d'une part, sur la droite menée par l'extrémité du vecteur v_1 parallèlement à AB; d'autre part, sur la droite menée par l'extrémité du vecteur v_2 parallèlement à CD. C'est le point d'intersection de ces deux droites qui fournit la position de l'extrémité du vecteur vitesse absolue v_M du point M.

Considérons les triangles rectangles sur la figure 11.2. On a

$$v_M = \frac{v_1}{\cos\beta}, \quad v_M = \frac{v_2}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

Pour déterminer l'angle β, identifions les seconds membres: il vient

$$v_1 \cos(\alpha - \beta) = v_2 \cos\beta,$$

ou sous forme développée

$$v_1 \cos\alpha \cos\beta + v_1 \sin\alpha \sin\beta = v_2 \cos\beta,$$

ce qui nous donne

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{v_2-v_1\cos\alpha}{v_1\sin\alpha}.$$

Nous trouvons donc

$$\sec\beta=\sqrt{1+\frac{(v_2-v_1\cos\alpha)^2}{v_1^2\sin^2\alpha}}=\frac{1}{v_1\sin\alpha}\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha}$$

et, à l'aide de la première formule de v_M, nous obtenons

$$v_M=v_1\sec\beta=\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha}.$$

Quant à la direction du vecteur v_M, elle se définit par l'angle β.

1.3. Vitesse du point en coordonnées polaires. Soient les équations du mouvement plan du point en coordonnées polaires

$$r=r(t),\qquad \varphi=\varphi(t).$$

Cherchons la vitesse de ce point dans le cas où il se déplace sur un plan fixe.

Ce cas sera interprété comme un cas de mouvement composé. Assimilons le rayon polaire r à une tige S, et le point M, à un petit anneau qui se déplace sur la tige mobile en rotation. La rotation de la tige a pour équation $\varphi=\varphi(t)$. Pour déterminer la vitesse d'entraînement v_e de l'anneau, immobilisons-le sur la tige qui tourne avec une vitesse angulaire $\omega=d\varphi/dt$. Le module du vecteur vitesse d'entraînement s'écrira donc

$$v_e=r\,|\omega|=r\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|.$$

Le mouvement relatif de M est le mouvement rectiligne de l'anneau le long de la tige. Le module du vecteur vitesse relative est

$$v_r=\left|\frac{dr}{dt}\right|.$$

Puisque les vecteurs vitesse d'entraînement et vitesse relative du point M sont perpendiculaires entre eux (fig. 11.3), le module du vecteur vitesse absolue est la diagonale du rectangle dont les côtés sont les vecteurs v_e et v_r (formule (11.2a)):

$$v_a=\sqrt{v_e^2+v_r^2}=\sqrt{r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}. \qquad (11.3)$$

L'espace parcouru par le point M (dans son mouvement absolu, c'est-à-dire par rapport au plan fixe) se définit par la formule (7.14):

$$S=\int_0^t\sqrt{r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}\,dt$$

Transformons le radicande en portant dt sous le radical et en mettant ensuite $d\varphi$ en facteur. Changeant dans l'intégrale définie la variable d'intégration t en φ, nous obtenons

$$S=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi.$$

Cette formule traduit la longueur d'un arc de courbe plane en coordonnées polaires (voir Piskounov, tome I, ch. XII, § 3).

1.4. Démonstration analytique du théorème de la composition des vitesses. En plus du système de référence fixe $Oxyz$, introduisons

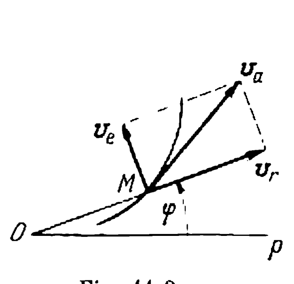


Fig. 11.3

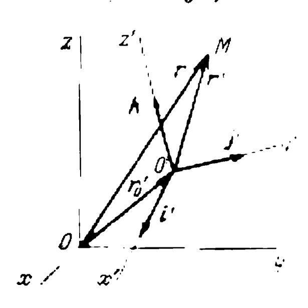


Fig. 11.4

un système $O'x'y'z'$ invariablement lié au solide S. Le mouvement du trièdre $O'x'y'z'$ reproduit donc fidèlement le mouvement du solide. Désignons par $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ les vecteurs unités des axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$. Sur la figure 11.4 on a pour le point M

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{O'}+\boldsymbol{r}',$$

où $\boldsymbol{r}_{O'}=\boldsymbol{OO'}$; $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{OM}$ et $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{O'M}$ sont les rayons vecteurs absolu et relatif de M. Désignons par x', y', z' les coordonnées du point M par rapport au système mobile $O'x'y'z'$. Il vient

$$\boldsymbol{r}'=x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'+z'\boldsymbol{k}',$$

d'où

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{O'}+(x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'+z'\boldsymbol{k}').$$

Puisque le vecteur vitesse absolue d'un point s'écrit

$$\boldsymbol{v}_a=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

nous trouverons ce vecteur pour M en dérivant l'expression de $\boldsymbol{r}$ ci-dessus par rapport au temps:

$$\boldsymbol{v}_a=\left(\frac{d\boldsymbol{r}_{O'}}{dt}+x'\frac{d\boldsymbol{i}'}{dt}+y'\frac{d\boldsymbol{j}'}{dt}+z'\frac{d\boldsymbol{k}'}{dt}\right)+\\+\left(\frac{dx'}{dt}\boldsymbol{i}'+\frac{dy'}{dt}\boldsymbol{j}'+\frac{dz'}{dt}\boldsymbol{k}'\right). \qquad (11.4)$$

Remarquons que les directions des vecteurs unités $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ sont généralement variables dans le temps, à cause du déplacement du trièdre $O'x'y'z'$. C'est précisément la raison pour laquelle la première parenthèse contient les dérivées des vecteurs unités par rapport au temps.

La *vitesse d'entraînement* du point M se confond avec sa vitesse absolue dans le cas où M reste fixe par rapport au solide S, c'est-à-dire quand x', y', z' restent inchangés dans le temps. Or, dans ce cas les trois derniers termes de la somme de (11.4) s'annulent, si bien que le vecteur vitesse d'entraînement du point s'écrit

$$\boldsymbol{v}_e = \frac{d\boldsymbol{r}_{O'}}{dt} + x' \frac{d\boldsymbol{i}'}{dt} + y' \frac{d\boldsymbol{j}'}{dt} + z' \frac{d\boldsymbol{k}'}{dt}. \qquad (11.5)$$

La *vitesse relative* du point est sa vitesse par rapport au système de référence mobile $O'x'y'z'$; elle se définit donc par une formule analogue à (7.8),

$$\boldsymbol{v}_r = \frac{dx'}{dt}\boldsymbol{i}' + \frac{dy'}{dt}\boldsymbol{j}' + \frac{dz'}{dt}\boldsymbol{k}'. \qquad (11.6)$$

La formule (11.4) s'apparente dès lors à (11.1),

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r,$$

et traduit le théorème de la composition des vitesses du point en mouvement composé.

Projetons les vecteurs intervenant dans (11.1), par exemple, sur les axes fixes Ox, Oy, Oz; il vient

$$v_x^a = v_x^e + v_x^r, \quad v_y^a = v_y^e + v_y^r, \quad v_z^a = v_z^e + v_z^r. \qquad (11.7)$$

La projection du vecteur vitesse absolue de M sur un axe est égale à la somme algébrique des projections des vecteurs vitesse d'entraînement et vitesse relative sur le même axe.

Ecrivons la formule (11.5) pour des cas particuliers du mouvement du solide S.

1. Le solide S est mobile en translation; le trièdre $O'x'y'z'$ se déplace donc parallèlement à lui-même, et les vecteurs unités $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ restent inchangés. Les trois derniers termes de (11.5) s'annulent alors, et le vecteur vitesse d'entraînement du point M dans le mouvement de translation du solide S s'écrit

$$\boldsymbol{v}_e = \frac{d\boldsymbol{r}_{O'}}{dt} = \boldsymbol{v}_{O'}.$$

Puisque la vitesse de translation du solide est égale à celle de son point quelconque, on est en droit de dire que la vitesse d'entraînement du point M est égale en l'occurrence à la vitesse de translation du solide S.

2. Dans le mouvement du solide S le point O' reste fixe. Ce cas se présente par exemple lorsque le solide tourne autour d'un axe fixe passant par O'. Le premier terme de (11.5) s'annule alors, et le vecteur vitesse d'entraînement du point M s'écrit

$$v_e = x' \frac{di'}{dt} + y' \frac{dj'}{dt} + z' \frac{dk'}{dt}. \qquad (11.8)$$

§ 2. Accélération du point en mouvement composé

2.1. Théorème de la composition des accélérations (Coriolis *)). Le vecteur accélération absolue w_a du point M est égal à

$$w_a = \frac{dv_a}{dt}.$$

Pour le déterminer, dérivons la formule (11.4) par rapport au temps:

$$w_a = \left(\frac{d^2 r_{O'}}{dt^2} + x' \frac{d^2 i'}{dt^2} + y' \frac{d^2 j'}{dt^2} + z' \frac{d^2 k'}{dt^2}\right) + \\ + \left(\frac{d^2 x'}{dt^2} i' + \frac{d^2 y'}{dt^2} j' + \frac{d^2 z'}{dt^2} k'\right) + \\ + 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{di'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{dj'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{dk'}{dt}\right). \qquad (11.9)$$

Analysons la formule obtenue. Si le point M est immobilisé par rapport au trièdre $O'x'y'z'$, c'est-à-dire si x', y', z' ont des valeurs constantes, il nous reste dans la formule (11.9) les quatre premiers termes exprimant le *vecteur accélération d'entraînement* w_e *du point*:

$$w_e = \frac{d^2 r_{O'}}{dt^2} + x' \frac{d^2 i'}{dt^2} + y' \frac{d^2 j'}{dt^2} + z' \frac{d^2 k'}{dt^2}.$$

L'*accélération relative du point* est l'accélération de ce dernier par rapport au système mobile $O'x'y'z'$; son vecteur s'exprime donc par une formule analogue à (7.18)

$$w_r = \frac{d^2 x'}{dt^2} i' + \frac{d^2 y'}{dt^2} j' + \frac{d^2 z'}{dt^2} k'.$$

Nous avons donc expliqué la signification mécanique de deux premières parenthèses de la formule (11.9). Or, la somme exprimant le vecteur w_a comprend un troisième terme qui s'appelle *vecteur accélération de Coriolis* ou *complémentaire du point* (notation w_c):

$$w_c = 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{di'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{dj'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{dk'}{dt}\right). \qquad (11.10)$$

Nous avons donc le théorème de la composition des accélérations établi par Coriolis: *l'accélération*

*) Gaspard Coriolis, mécanicien français (1792-1843).

absolue du point mobile est la somme géométrique de ses accélérations d'entraînement, relative et complémentaire:

$$w_a = w_e + w_r + w_c. \quad (11.11)$$

Projetons les vecteurs intervenant dans (11.11) sur les axes fixes du système $Oxyz$. Il vient

$$\begin{aligned} w_x^a &= w_x^e + w_x^r + w_x^c, \\ w_y^a &= w_y^e + w_y^r + w_y^c, \\ w_z^a &= w_z^e + w_z^r + w_z^c. \end{aligned} \quad (11.12)$$

La projection du vecteur accélération absolue du point sur un axe est égale à la somme algébrique des projections des vecteurs accélération d'entraînement, relative et complémentaire sur le même axe.

2.2. Vecteur accélération complémentaire du point. Analysons la formule (11.10) qui exprime le vecteur accélération complémentaire.

La formule (11.8) définit la vitesse d'entraînement du point M, c'est-à-dire de l'extrémité du vecteur

$$O'M = x'i' + y'j' + z'k',$$

dans le cas où l'origine O' de ce vecteur est un point fixe. Substituant à x', y', z' dans (11.8) les expressions dx'/dt, dy'/dt, dz'/dt, on obtient

$$\frac{dx'}{dt}\frac{di'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{dj'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{dk'}{dt},$$

expression qui définit la vitesse d'entraînement de l'extrémité du vecteur vitesse relative v_r du point M

$$v_r = \frac{dx'}{dt}i' + \frac{dy'}{dt}j' + \frac{dz'}{dt}k'$$

dans le cas où l'origine de ce vecteur est fixe (se trouve au point O).

Reprenant la formule (11.10), nous exprimons le résultat obtenu comme suit : *le vecteur accélération complémentaire du point est équipollent au double du vecteur vitesse d'entraînement de l'extrémité du vecteur* v_r, ce dernier étant porté au point fixe O.

Essayons d'aboutir au même résultat en transformant la formule (11.10). Voyons ce que deviennent les dérivées des vecteurs unités des axes mobiles. La quantité di'/dt peut être assimilée à la vitesse de l'extrémité du vecteur unité i' d'origine en un point fixe, par exemple en O. La formule (9.13) nous donne alors

$$\frac{di'}{dt} = [\omega_e, i'].$$

Ici ω_e est le vecteur vitesse angulaire instantanée du trièdre $O'x'y'z'$ (donc, du solide S). Il vient de façon analogue

$$\frac{dj'}{dt}=[\omega_e,\ j'] \text{ et } \frac{dk'}{dt}=[\omega_e,\ k'].$$

Portons ces valeurs dans la formule (11.10). Il vient

$$w_c=2\left\{\frac{dx'}{dt}[\omega_e,\ i']+\frac{dy'}{dt}[\omega_e,\ j']+\frac{dz'}{dt}[\omega_e,\ k']\right\}=$$
$$=2\left[\omega_e,\ \left(\frac{dx'}{dt}i'+\frac{dy'}{dt}j'+\frac{dz'}{dt}k'\right)\right].$$

Or, l'expression entre parenthèses est en vertu de (11.6) la vitesse relative v_r du point M. Il vient donc définitivement

$$w_c = 2[\omega_e,\ v_r]. \qquad (11.13)$$

Le vecteur accélération complémentaire du point en mouvement composé est équipollent au *double du produit vectoriel du vecteur vitesse angulaire instantanée du trièdre* $O'x'y'z'$ (du solide S) *par le vecteur vitesse relative du point.*

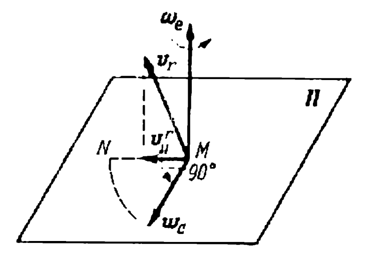


Fig. 11.5

Règle de Joukovski. Pour construire le vecteur accélération complémentaire, on doit mener par le point M un plan Π perpendiculaire au vecteur vitesse angulaire instantanée ω_e du trièdre $O'x'y'z'$ et projeter sur ce plan le vecteur vitesse relative v_r du point M (fig. 11.5). Multiplier la composante v_Π^r par $2\omega_e$, où ω_e est le module du vecteur vitesse angulaire du trièdre $O'x'y'z'$. Tourner le segment de droite MN ainsi obtenu dans le plan Π d'un angle droit dans le sens de la rotation d'entraînement. Le vecteur obtenu est le vecteur accélération complémentaire w_c.

Pour le module du vecteur accélération complémentaire, on a en vertu de la formule (11.13)

$$w_c=2\omega_e v_r \sin(\widehat{\omega_e,\ v_r}). \qquad (11.14)$$

Il ressort de la formule (11.13) que l'accélération complémentaire du point devient nulle soit quand $\omega_e = 0$, soit quand $v_r = 0$, soit quand les vecteurs ω_e et v_r sont colinéaires (l'angle $(\widehat{\omega_e,\ v_r})$ pouvant être égal à 0 ou à 180°). Par exemple, $v_r = 0$ chaque fois qu'un point en mouvement relatif change le sens de parcours.

Ecrivons l'expression de l'accélération complémentaire pour des cas particuliers de mouvement du trièdre $O'x'y'z'$ lié au solide S.

1. Le trièdre $O'x'y'z'$ est mobile en translation. Sa vitesse angulaire instantanée ω_e est donc identiquement nulle. Il ressort alors de la formule (11.13) que l'accélération complémentaire $\boldsymbol{w}_c \equiv \mathbf{0}$, et la formule (11.11) devient

$$\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{w}_e + \boldsymbol{w}_r. \tag{11.15}$$

Dans ce cas, le vecteur accélération absolue du point M est égal à la somme de ses vecteurs accélération d'entraînement et accélération relative. Ainsi donc, si le mouvement d'entraînement du point est défini par le mouvement de translation du solide S, la règle du parallélogramme est applicable non seulement aux vecteurs vitesse (ce qui est normal pour un mouvement d'entraînement quelconque du point), mais aussi aux vecteurs accélération.

2. Le trièdre $O'x'y'z'$ tourne avec une vitesse angulaire ω_e autour d'un axe fixe passant par O'. Le mouvement d'entraînement du point M se définit alors par la rotation du solide S. Dans ce cas, le vecteur accélération complémentaire w_c se cherche d'après la formule générale (11.13) où le vecteur ω_e est de direction constante.

Si par exemple la direction du vecteur vitesse relative v_r du point mobile est parallèle à celle du vecteur ω_e, c'est-à-dire à l'axe de rotation du solide S, l'angle $(\widehat{\omega_e, v_r})$ est égal soit à 0, soit à 180°; l'accélération complémentaire $w_c = \mathbf{0}$. Il en découle que l'accélération complémentaire peut s'annuler aussi dans le cas où le mouvement d'entraînement du point est défini par le mouvement de rotation du solide.

Exemple 11.2. La coulisse BC du mécanisme à coulisse est animée d'un mouvement de translation par la manivelle OA de longueur l qui tourne avec une vitesse angulaire constante $\omega > 0$ (fig. 11.6). La coulisse est actionnée par un ergot A fixé à l'extrémité de la manivelle et engagé dans la rainure de la coulisse. On demande de savoir la vitesse et l'accélération de la coulisse, ainsi que celles de l'ergot A.

Solution. En mouvement absolu, l'ergot A de la manivelle OA décrit une circonférence de rayon l centrée en O. Le vecteur vitesse absolue $\boldsymbol{v}_A$ de A est de direction perpendiculaire à OA et de module

$$v_A = l\omega.$$

D'autre part, le mouvement de A se laisse décomposer en mouvement relatif avec la vitesse $\boldsymbol{v}_r$ le long de la rainure de la coulisse et mouvement d'entraînement avec la vitesse $\boldsymbol{v}_e$ défini par le mouvement de translation de la coulisse. Considérant le parallélogramme (en l'occurrence le rectangle) des vitesses, nous obtenons

$$v_r = v_a \cos\varphi = l\omega \cos \omega t,$$

$$v_e = v_a \sin\varphi = l\omega \sin \omega t$$

en posant $\varphi(0) = 0$. Cette dernière quantité est précisément la vitesse algébrique du mouvement de translation de la coulisse.

En mouvement absolu, l'ergot A décrit une circonférence de rayon l avec une vitesse de module constant $v_a = l\omega$. Par conséquent, l'accélération tangentielle w_τ^a est nulle, et l'accélération normale w_n^a se confond avec l'accélération

totale:

$$w_a = w_n^a = \frac{v_a^2}{l} = l\omega^2.$$

On aboutit au même résultat en décomposant le mouvement de A. Puisque le mouvement d'entraînement de l'ergot est défini par le mouvement de translation

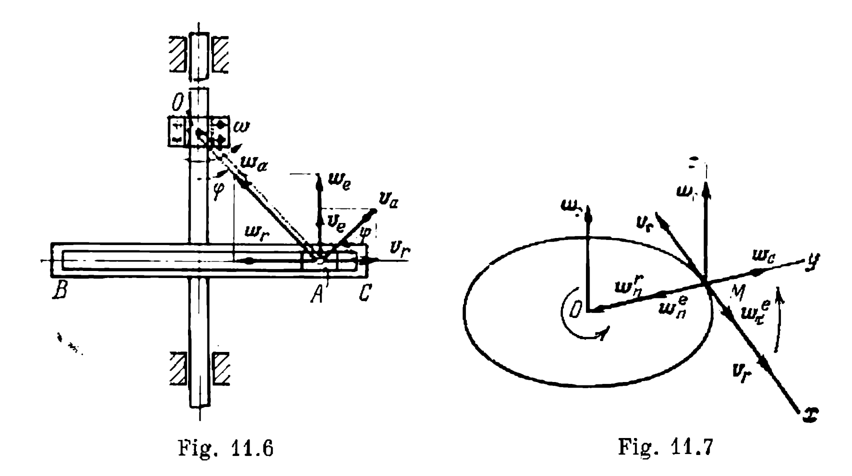


Fig. 11.6 Fig. 11.7

de la coulisse, l'accélération complémentaire est nulle, si bien que le vecteur accélération absolue se compose du vecteur accélération relative, de module

$$w_r = \left| \frac{dv_r}{dt} \right| = l\omega^2 \, |\sin \omega t|,$$

et du vecteur accélération d'entraînement égal au vecteur accélération de la coulisse dans son mouvement rectiligne alternatif:

$$w_e = \frac{dv_e}{dt} = l\omega^2 \cos \omega t.$$

Prenant la somme des deux vecteurs accélération, on obtient pour le module du vecteur accélération absolue de l'ergot A:

$$w_a = \sqrt{w_e^2 + w_r^2} = l\omega^2.$$

On vérifie sans peine que le vecteur w_a ainsi défini est toujours dirigé le long de la manivelle OA.

E x e m p l e 11.3. Un plateau de rayon R montré sur la figure 11.7 est animé d'un mouvement de rotation uniformément retardé autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan du plateau, avec une vitesse angulaire initiale $\omega_0 > 0$ et une accélération angulaire $\varepsilon < 0$. Un point M se déplace suivant la périphérie du plateau avec une vitesse de module constant u par rapport au plateau, dans le sens inverse de rotation de ce dernier à l'instant initial. Déterminer la vitesse absolue et l'accélération absolue du point M à l'instant initial.

S o l u t i o n. Portons le vecteur $\boldsymbol{\omega}_0$ sur l'axe de rotation et construisons le vecteur vitesse d'entraînement v_e du point M:

$$v_e = [\omega_0, OM].$$

Le vecteur v_e est dirigé au-delà du plan de la figure, conformément à la règle de la vis à droite appliquée à un produit vectoriel; cette direction est aussi conforme au sens de rotation du plateau. Puisque les vecteurs ω_0 et OM font un angle droit entre eux, on a $v_e = R\omega_0$; cela découle par ailleurs de la formule connue définissant la vitesse linéaire du point dans un mouvement de rotation. Le vecteur vitesse relative v_r de M est colinéaire à v_e et est orienté dans le sens opposé; son module est u. Le vecteur vitesse absolue v_a du point M est exprimé par la formule (11.1), et son module, par la formule (11.2c):

$$v_a = | R\omega_0 - u |.$$

Le vecteur v_a est de sens de celui des vecteurs v_e et v_r qui a le plus grand module.

Le mouvement d'entraînement du point M est dans notre exemple le mouvement du point du plateau avec lequel le point M coïncide à l'instant considéré. Dans ce sens, le mouvement d'entraînement de M est défini par la rotation du plateau autour de son axe fixe (voir ch. VIII, § 2). Le vecteur accélération d'entraînement w_e du point M est égal à la somme des vecteurs accélération tangentielle et accélération normale:

$$w_e = w_\tau^e + w_n^e.$$

Les deux vecteurs sont montrés sur la figure 11.7. L'accélération angulaire étant négative, le vecteur w_τ^e est dirigé en deçà du plan du dessin. Les modules de ces vecteurs sont définis par les formules (8.12) et (8.13). Le vecteur vitesse relative v_r du point M est constant en module par définition, $v_r = u =$ const.

Or, cela ne veut pas dire pour autant que le vecteur accélération relative w_r du point M soit nul. En effet, quand on étudie les grandeurs cinématiques intervenant dans le mouvement relatif, on est amené à considérer le mouvement du point par rapport au système de référence mobile lié au solide S. On sait que le point M se déplace par rapport au plateau le long de la périphérie de celui-ci avec une vitesse linéaire v_r de module constant mais de direction variable. On a donc comme précédemment

$$w_r = w_\tau^r + w_n^r$$

et, d'après les formules (7.25) et (7.26),

$$w_\tau^r = \frac{du}{dt} = 0, \quad w_n^r = \frac{u^2}{R}.$$

Le vecteur w_n^r est montré sur la figure 11.7.

Reste à déterminer le vecteur accélération complémentaire w_c du point M. On a en vertu de la formule (11.13)

$$w_c = 2[\omega_0, v_r];$$

le module du vecteur accélération complémentaire se définit donc par la formule (11.14),

$$w_c = 2\omega_0 u,$$

parce que $v_r \perp \omega_0$.

Pour construire le vecteur accélération complémentaire, portons en M un vecteur équipollent à ω_0 et orientons-le d'après la règle de la vis à droite. On peut appliquer aussi la règle de J o u k o v s k i. Puisque $v_r \perp \omega_0$, le vecteur v_r est déjà projeté sur le plan Π; on n'a qu'à le multiplier par $2\omega_0$ et le tourner d'un angle droit dans le sens de la rotation d'entraînement.

Le vecteur accélération absolue w_a est défini par la formule (11.11). Puisque dans notre exemple le vecteur w_e est égal à la somme de deux vecteurs w_τ^e et w_n^e, on a

$$w_a = w_\tau^e + w_n^e + w_n^r + w_c.$$

Nous n'avons pas représenté la somme des vecteurs indiqués pour ne pas charger le dessin. Calculons les projections du vecteur accélération absolue sur les axes Mx, My, Mz d'après les formules (11.12):

$$w_x^a = w_\tau^e = R\varepsilon,$$

$$w_y^a = -w_n^e - w_n^r + w_c = -R\omega_0^2 - \frac{u^2}{R} + 2\omega_0 u, \qquad w_z^a = 0.$$

Le module du vecteur accélération absolue est égal à

$$w_a = \sqrt{(w_x^a)^2 + (w_y^a)^2 + (w_z^a)^2} = \sqrt{R^2\varepsilon^2 + \left(R\omega_0^2 + \frac{u^2}{R} - 2\omega_0 u\right)^2}.$$

Exemple 11.4. Un train se trouvant à la latitude de Léningrad (60° N) roule exactement vers le Sud avec une vitesse de 20 m/s. On demande de savoir l'accélération complémentaire (fig. 11.8).

Solution. Le mouvement d'entraînement du train M est défini par la rotation de la Terre. Construisons en M le vecteur vitesse angulaire de rotation de la Terre ω_e orienté sur l'étoile Polaire. La Terre faisant une révolution complète en vingt-quatre heures, on a

$$\omega_e = \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60} = \frac{\pi}{43\,200} \text{ rad/s}.$$

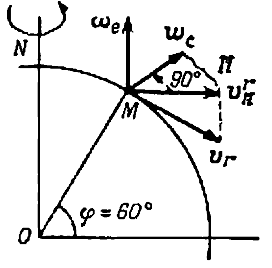


Fig. 11.8

Le module du vecteur accélération complémentaire peut être calculé d'après la formule (11.14):

$$w_c = 2\omega_e v_r \sin 120° =$$

$$= 2\frac{\pi}{43\,200}\, 20 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}00252 \text{ m/s}^2.$$

Déterminons la direction de l'accélération complémentaire d'après la règle de Joukovski. Projetons le vecteur vitesse relative v_r sur un plan Π perpendiculaire au vecteur ω_e et tournons le vecteur v_Π^r d'un angle droit dans le sens de rotation de la Terre. Il s'ensuit que le vecteur w_c est tourné vers l'Est, c'est-à-dire vers le rail de gauche (fig. 11.8).

Remarquons que si le train se trouvant en hémisphère boréal roulait vers le Nord, l'accélération complémentaire serait dirigée vers l'Ouest, donc toujours vers le rail de gauche. Nous laissons au lecteur le soin de le vérifier en appliquant la règle de Joukovski ou la règle de la vis à droite pour un produit vectoriel. L'effet dynamique produit par l'accélération complémentaire pendant la rotation de la Terre sera étudié dans le chapitre XVI, exemple 16.3.

2.3. Accélération du point en coordonnées polaires. En terminant ce chapitre, proposons-nous de résoudre le problème exposé dans le nº 1.3 par décomposition du mouvement du point. Pour calculer l'accélération d'entraînement w_e, immobilisons l'anneau M sur la tige en mouvement de rotation, dont la vitesse angulaire et l'accélération angulaire sont

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

La composante tangentielle w_τ^e du vecteur accélération d'entraînement est de module

$$w_\tau^e = r\,|\varepsilon| = r\left|\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right|$$

et de direction perpendiculaire au rayon polaire; son sens est défini par le signe de $d^2\varphi/dt^2$. La composante normale w_n^e a pour module

$$w_n^e = r\omega^2 = r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

et est dirigée le long du rayon polaire vers le centre O (fig. 11.9).

Le mouvement relatif du point M est le mouvement rectiligne de l'anneau le long de la tige. Le module du vecteur accélération relative est égal à

$$w_r = \left|\frac{d^2r}{dt^2}\right|.$$

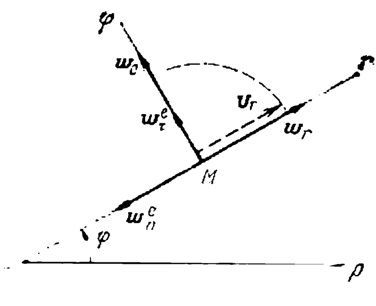


Fig. 11.9

Le module du vecteur accélération complémentaire est égal, d'après la formule (11.14), à

$$w_c = 2\,|\omega|\,|v_r| = 2\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|\left|\frac{dr}{dt}\right|,$$

parce que $\omega \perp v_r$. Pour connaître la direction du vecteur accélération complémentaire, on doit, selon la règle de J o u k o v s k i, tourner le vecteur v_r (contenu dans le plan Π) d'un angle droit soit dans le sens de rotation de la tige, c'est-à-dire dans le sens antihoraire, soit dans le sens inverse, suivant que $d\varphi/dt$ est positif ou négatif.

Le vecteur accélération absolue du point se définit par la formule (11.11):

$$\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{w}_\tau^e + \boldsymbol{w}_n^e + \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{w}_c.$$

Calculons ses projections sur le rayon polaire OM et la transversale $M\varphi$ (voir fig. 11.9):

$$\begin{aligned} w_r^a &= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \\ w_\varphi^a &= r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right). \end{aligned} \qquad (11.16)$$

Le module du vecteur accélération absolue est égal à la longueur de la diagonale du rectangle dont les côtés sont les composantes radiale et transversale:

$$w_a = \sqrt{(w_r^a)^2 + (w_\varphi^a)^2} =$$
$$= \sqrt{\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]^2 + \left(r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{dt}\right)^2}.$$

Exercices

Exercice 11.1. La manivelle CD tourne autour de son axe horizontal C avec une vitesse angulaire constante $\omega_{CD} = 2\pi$ rad/s et, à l'aide d'un coulisseau D articulé sur elle, imprime à la coulisse AB un mouvement de rotation autour de l'axe horizontal A (fig. 11.10). Déterminer la vitesse angulaire de la coulisse AB à l'instant où elle fait un angle de 75° avec la verticale CA si $AC =$ $= 0,3$ m et $CD = 0,5$ m.

Réponse. $\omega_{AB} = 2,5\pi = 7,85$ rad/s.

Exercice 11.2. Le triangle OAB tourne avec une vitesse angulaire $\omega = 6t^2$ rad/s autour de l'axe OA contenu dans le plan du dessin (fig. 11.11). Le

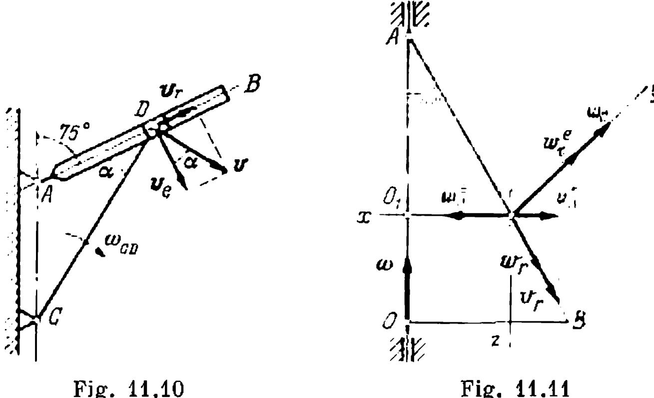


Fig. 11.10 Fig. 11.11

point M parcourt l'hypoténuse du triangle de A vers B suivant la loi $s = AM =$ $= 12t^2 + 0,04$; $\widehat{BAO} = 30°$. Supposant qu'à l'instant $t = 1$ s le plan du triangle se confond avec le plan du dessin, calculer l'accélération absolue w du point M à cet instant.

Réponse. $w = 3,66$ m/s², $\cos(\widehat{w, Mx}) = 0,754$, $\cos(\widehat{w, My}) = 0,656$, $\cos(\widehat{w, Mz}) = 0,057$.

Exercice 11.3. L'avion vole suivant un méridien terrestre de l'équateur vers le pôle avec une vitesse constante de 300 m/s. Quelles sont les composantes du vecteur accélération absolue de l'avion à l'équateur ? au pôle ? Quel est le module du vecteur accélération totale de l'avion ? Le rayon de la Terre est 6370 km.

Réponse. A l'équateur $w_e = 0,0337$ m/s², $w_r = 0,0141$ m/s², $w_c = 0$, $w_a = 0,0478$ m/s²; au pôle $w_e = 0$, $w_r = 0,0141$ m/s², $w_c = 0,0436$ m/s², $w_a =$ $= 0,0458$ m/s².

CHAPITRE XII

MOUVEMENT COMPOSÉ DU SOLIDE

Soit un solide mobile par rapport à un système de référence $O'x'y'z'$, ce dernier étant à son tour mobile par rapport à un système de référence fixe $Oxyz$. Désignons par v_M^r le vecteur vitesse relative d'un point M du solide dans son mouvement par rapport au trièdre $O'x'y'z'$, et par v_M^e le vecteur vitesse d'entraînement du même point M. Le vecteur vitesse absolue v_M^a du point M dans son mouvement composé est égal, en vertu du théorème de la composition des vitesses (ch. XI, nº 1.2), à la somme

$$\boldsymbol{v}_M^a = \boldsymbol{v}_M^e + \boldsymbol{v}_M^r.$$

L'objet du présent chapitre est de déterminer la distribution instantanée des vitesses des points du solide dans son mouvement composé résultant en se donnant différentes hypothèses quant au caractère des mouvements d'entraînement et relatif du solide à l'instant donné.

§ 1. Composition des mouvements simples

1.1. Composition de deux translations. Le cas le plus élémentaire est celui où le mouvement relatif du solide et son mouvement d'entraînement, c'est-à-dire le mouvement du système de référence mobile $O'x'y'z'$ sont des translations (ch. VIII, § 1). Si le solide se déplace en translation avec une vitesse $\boldsymbol{v}_2$ par rapport au trièdre $O'x'y'z'$ qui se déplace, lui aussi, en translation avec une vitesse $\boldsymbol{v}_1$ par rapport au système $Oxyz$, le vecteur vitesse absolue de chaque point du solide est égal à la somme du vecteur vitesse d'entraînement $\boldsymbol{v}_1$ et du vecteur vitesse relative $\boldsymbol{v}_2$:

$$\boldsymbol{v}_M^a = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2.$$

Puisque le vecteur vitesse absolue est le même pour tous les points du solide à l'instant donné, le mouvement absolu du solide est aussi un mouvement de translation avec une vitesse

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2.$$

1.2. Composition de deux rotations autour de deux axes concourants. Supposons que le mouvement admet comme composantes, à l'instant donné, deux rotations autour d'axes instantanés avec des vitesses angulaires instantanées ω_1 et ω_2. Considérons le cas où les axes instantanés de rotation *concourent* en un point O. Portons les vecteurs $\boldsymbol{\omega}_1$ et $\boldsymbol{\omega}_2$ au point O et faisons la composition selon la règle du parallélogramme: $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ (fig. 12.1). Calculons la vitesse de l'extrémité O_1 du vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ en appliquant la formule (8.17) à chacune des deux rotations:

$$v_{O_1} = [\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{OO}_1] + [\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{OO}_1].$$

Le module de chaque terme est égal au double de l'aire du triangle formé par les vecteurs ω_1 et ω_2, c'est-à-dire à l'aire du parallélogramme $O\omega_2O_1\omega_1$. Les deux vecteurs sont perpendiculaires au plan

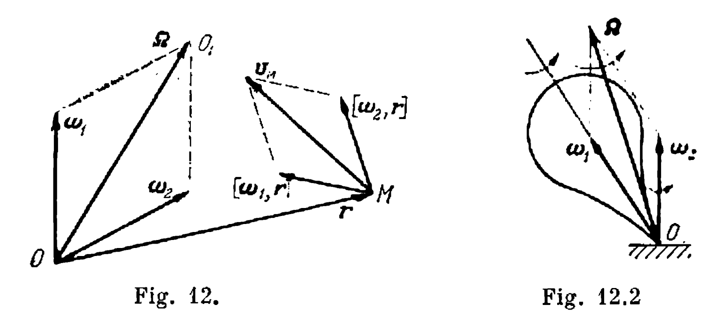


Fig. 12. Fig. 12.2

du parallélogramme et sont orientés de toute évidence dans les sens opposés. Aussi, la vitesse du point O_1 est-elle nulle, de même que celle de O; la droite OO_1 est donc l'*axe instantané de rotation dans le mouvement résultant.*

Calculons la vitesse d'un point quelconque M du solide en appliquant le théorème de la composition des vitesses (ch. XI, n° 1.2):

$$\boldsymbol{v}_M = [\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{r}] + [\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{r}] = [(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2), \boldsymbol{r}] = [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{r}],$$

où

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2.$$

En comparant l'expression de la vitesse v avec la formule d'E u l e r (9.10), nous nous assurons que le mouvement instantané résultant est la rotation autour d'un axe instantané passant par O avec une vitesse angulaire instantanée égale à la somme des vitesses angulaires instantanées connues. Ainsi donc, *si* les directions des vecteurs vitesse angulaire instantanée sont *concourants*, *ces vecteurs se composent selon la règle du parallélogramme.*

E x e m p l e 12.1. La toupie (fig. 12.2) tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire ω_1 (rotation propre de la toupie), tandis que l'axe de la toupie tourne autour de la verticale en son point d'appui avec une vitesse angulaire ω_2 (précession *) de l'axe de la toupie). Le mouvement résultant de la toupie est une rotation autour d'un axe instantané qui se confond avec la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs $\boldsymbol{\omega}_1$ et $\boldsymbol{\omega}_2$; la vitesse angulaire instantanée du mouvement résultant est égale à

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2.$$

E x e m p l e 12.2. Un petit engrenage conique (le pignon) fait le tour d'un grand engrenage horizontal (la roue) avec une vitesse qui correspond à $n =$ – 150 tr/mn. Le rayon de la roue est $R = 20$ cm ; l'angle au sommet du cône

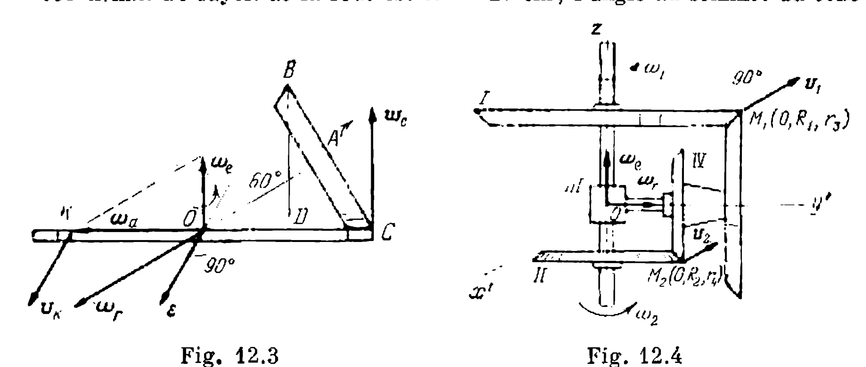


Fig. 12.3 Fig. 12.4

du pignon est égal à 60°. On demande la vitesse angulaire de roulement ω_r du pignon sur la roue, la vitesse du point B et l'accélération du point C du pignon (fig. 12.3).

S o l u t i o n. Déterminons les axes des rotations d'entraînement, relative et absolue (axe instantané) du pignon. La vitesse du point C du pignon étant nulle, c'est la droite OC qui constitue l'axe instantané de rotation du pignon. L'axe de la rotation relative est la droite OA. Portons le vecteur vitesse angulaire d'entraînement $\boldsymbol{\omega}_e$ au point O. Puisque les vecteurs $\boldsymbol{\omega}_e$ et $\boldsymbol{\omega}_r$ viennent se couper en O, construisons le parallélogramme des vitesses angulaires (fig. 12.3). Ce faisant, nous supposons que le pignon parcourt la roue dans le sens antihoraire en regardant du haut de la figure. La vitesse angulaire d'entraînement est

$$\omega_e = \frac{\pi n}{30} = 5\pi \text{ rad/s}.$$

L'analyse du parallélogramme nous donne

$$\omega_r = \frac{\omega_e}{\sin 30°} = 10\pi \text{ rad/s}, \qquad \omega_a = \omega_e \operatorname{tg} 60° = 5\sqrt{3}\,\pi \text{ rad/s}.$$

Pour déterminer les vitesses et les accélérations absolues des points du pignon, assimilons le mouvement de ce dernier au mouvement d'un solide ayant un point fixe O (ch. IX, § 2). Le vecteur vitesse du point B se détermine par la

*) La *précession* est une appellation générale qu'on donne au mouvement sphérique (ch. IX, n° 2.1) du solide, composé d'une rotation autour d'un axe lié au solide et d'une rotation de cet axe autour d'un deuxième axe qui coupe le premier et qui est fixe par rapport au repère adopté. Si les deux rotations sont uniformes, on dit que la précession est *régulière*.

formule (9.12):

$$v_B = [\boldsymbol{\omega}_a, \boldsymbol{OB}];$$

son module est égal à

$$v_B = \omega_a BD = 5\sqrt{3}\,\pi\cdot 0{,}1\,\sqrt{3} = 4{,}71 \text{ m/s},$$

où BD est la distance qui sépare B de l'axe instantané. Le vecteur vitesse de B est dirigé perpendiculairement au plan du dessin (au-delà).

Avant de déterminer les accélérations des points du pignon, on doit calculer l'accélération angulaire du pignon dans son mouvement absolu:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_a = \frac{d\boldsymbol{\omega}_a}{dt}.$$

L'extrémité K du vecteur $\boldsymbol{\omega}_a$ décrit une circonférence de rayon ω_a dans le plan horizontal. Celle-ci est l'hodographe du vecteur vitesse angulaire du pignon. Le vecteur $\boldsymbol{\omega}_a$ lui-même tourne autour de l'axe vertical avec la vitesse angulaire ω_e. L'accélération angulaire du pignon est égale à la vitesse de mouvement du point K de l'hodographe de la vitesse angulaire:

$$\varepsilon_a = v_K = \omega_e\omega_a = 5\pi\cdot 5\sqrt{3}\,\pi = 25\sqrt{3}\,\pi^2 \text{ rad/s}^2$$

et est dirigée du point O perpendiculairement au plan du dessin (en deçà). Le vecteur accélération du point C du pignon se calcule à l'aide de la formule (9.17):

$$\boldsymbol{w}_C = [\boldsymbol{\varepsilon}_a, \boldsymbol{OC}].$$

La seconde composante dans la formule (9.17) — l'accélération axipète — est nulle pour C, car le point C appartient à l'axe instantané ($R = 0$). Puisque les vecteurs $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ et $\boldsymbol{OC}$ sont perpendiculaires, le module du vecteur accélération est

$$w_C = \varepsilon_a OC = 25\sqrt{3}\,\pi^2\cdot 0{,}2 = 85{,}5 \text{ m/s}^2.$$

$\boldsymbol{w}_C$ est dirigé verticalement vers le haut, d'après la règle de la vis à droite pour un produit vectoriel.

Le cas examiné est un exemple d'application courant de la précession régulière (voir le renvoi en bas de la page 224).

Exemple 12.3. La figure 12.4 représente un différentiel à engrenages coniques. Les planétaires I, II de rayons R_1, R_2 tournent autour de leurs axes verticaux avec des vitesses angulaires ω_1, ω_2. Le bras porte-satellites III tourillonne autour d'un axe vertical et porte un train de satellites IV monté fou, constitué de deux roues satellites solidaires de rayons r_3, r_4. Déterminer la vitesse angulaire ω_e de rotation du bras porte-satellites et la vitesse angulaire ω_r du train de satellites par rapport au bras.

Solution. Les vecteurs vitesse absolue des points M_1, M_2 des planétaires I, II sont de modules respectifs

$$v_1 = R_1\,|\,\omega_1\,|, \qquad v_2 = R_2\,|\,\omega_2\,|,$$

et leurs projections sur les axes du système de coordonnées mobile $Ox'y'z$ sont

$$v_{1x'} = -R_1\omega_1, \quad v_{1y'} = v_{1z} = 0; \quad v_{2x'} = -R_2\omega_2, \quad v_{2y'} = v_{2z} = 0. \qquad (1)$$

Considérons maintenant le mouvement du train de satellites en l'assimilant au mouvement d'un solide autour d'un point fixe O. Il se décompose en deux mouvements:

— mouvement d'entraînement: rotation du bras porte-satellites avec la vitesse angulaire $\omega_e\boldsymbol{k}$;

— mouvement relatif: rotation du train de satellites avec la vitesse angulaire $\omega_r\boldsymbol{j}'$.

Les deux axes instantanés se rencontrant en O, le vecteur vitesse angulaire absolue ω_a du train de satellites est égal à

$$\omega_a = \omega_r j' + \omega_e k.$$

Les vitesses des points M_1 et M_2 du train de satellites se définissent par la formule (9.12). Comme l'abscisse de chacun de ces deux points est égale à zéro, le vecteur vitesse de chaque point s'écrit

$$v = [\omega_a, r] = \begin{vmatrix} i' & j' & k \\ 0 & \omega_r & \omega_e \\ 0 & y' & z \end{vmatrix} = (\omega_r z - \omega_e y')\, i',$$

si bien que

$$v_{x'} = \omega_r z - \omega_e y', \qquad v_{y'} = v_z = 0. \tag{2}$$

Pour M_1 on a $y_1' = R_1$, $z_1 = r_3$; pour M_2 on a $y_2' = R_2$, $z_2 = -r_4$. Portant ces valeurs dans (2) et égalant à (1), on obtient un système de deux équations algébriques linéaires en ω_e et ω_r:

$$R_1\omega_e - r_3\omega_r = R_1\omega_1, \qquad R_2\omega_e + r_4\omega_4 = R_2\omega_2.$$

La solution de ces équations fournit la réponse:

$$\omega_e = \frac{R_1 r_4 \omega_1 + R_2 r_3 \omega_2}{R_1 r_4 + R_2 r_3}, \qquad \omega_r = \frac{R_1 R_2 (\omega_2 - \omega_1)}{R_1 r_4 + R_2 r_3}.$$

Nous avons partout utilisé les valeurs algébriques des vitesses angulaires.

La solution reste valable si les planétaires *I*, *II* tournent dans les sens opposés, auquel cas ω_1 et ω_2 ont les signes différents. Les signes des vitesses angulaires cherchées ω_e, ω_r définissent le sens de rotation du bras porte-satellites et du train de satellites dans son mouvement relatif.

1.3. Exemple de mouvement hélicoïdal du solide. Considérons un mouvement qui se compose de la rotation du solide autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire constante ω, et de sa translation rectiligne uniforme avec une vitesse u parallèle à ω. On ne s'attache pas à savoir laquelle des composantes représente le mouvement d'entraînement et le mouvement relatif, car cela n'a aucune importance pour la distribution instantanée des vitesses.

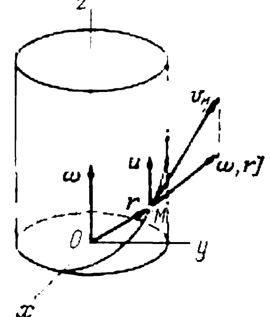


Fig. 12.5

Le vecteur vitesse absolue du point M (fig. 12.5) est égal à la somme des vecteurs vitesse de M dans ses deux mouvements composants. A l'aide de la formule (8.17), mettons le vecteur vitesse absolue du point M sous la forme

$$v_M = [\omega, r] + u. \tag{12.1}$$

Construisons sur la figure 12.5 les composantes du vecteur v_M. Adoptons l'axe de rotation comme axe Oz et désignons par x, y, z

les coordonnées du point M par rapport au système fixe. On a alors

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{u} = u\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

où $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sont les vecteurs unités des axes Ox, Oy, Oz. La formule (12.1) se laisse développer comme suit:

$$\boldsymbol{v}_M = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} + u\boldsymbol{k} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j} + u\boldsymbol{k}.$$

Il s'ensuit que les projections du vecteur vitesse absolue du point M sur les axes de coordonnées sont

$$v_x^M = -\omega y, \qquad v_y^M = \omega x, \qquad v_z^M = u. \tag{12.2}$$

Le module du vecteur vitesse du point M est égal à

$$v_M = \sqrt{(v_x^M)^2 + (v_y^M)^2 + (v_z^M)^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 + u^2}, \tag{12.3}$$

où $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance du point M à l'axe de rotation. La formule (12.3) se laisse d'ailleurs établir de façon immédiate: il suffit de se rappeler que les composantes $[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}]$ et $\boldsymbol{u}$ de $\boldsymbol{v}_M$ sont perpendiculaires entre elles et que leurs modules sont ωR et u respectivement.

Passons à la description géométrique du mouvement. Pendant toute la durée du mouvement, le point M reste sur la surface d'un cylindre circulaire droit (fig. 12.5). Si ce point se trouve à l'instant considéré sur une génératrice du cylindre, il la rencontrera de nouveau au bout d'un temps $T = 2\pi/\omega$ tout en se déplaçant sur cette génératrice d'une distance

$$h = uT = \frac{2\pi u}{\omega} \tag{12.4}$$

appelée *pas de l'hélice*. Le rapport

$$p = \frac{u}{\omega} \tag{12.5}$$

s'appelle *paramètre* ou *flèche de l'hélice*. Il ressort des deux dernières formules que

$$h = 2\pi p.$$

Etant donné que $v_x = dx/dt$, etc., les formules (12.2) se laissent mettre sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega x, \quad \frac{dz}{dt} = u \tag{12.6}$$

et interpréter comme un système d'équations différentielles relativement aux coordonnées d'un point mobile. Pour une position déterminée du point mobile M, à l'instant $t = 0$, ces équations admet-

tent la solution

$$x = R\cos\omega t, \qquad y = R\sin\omega t, \qquad z = ut. \qquad (12.7)$$

On le vérifie aisément en faisant la dérivation et en substituant les valeurs obtenues dans les équations (12.6).

Cette solution, qui représente les équations paramétriques du mouvement hélicoïdal de M, a été étudiée dans l'exemple 7.2. En vertu de la formule (12.4) on a $u = \omega h/(2\pi)$. La vitesse du point et la longueur de l'arc de trajectoire ont été calculées dans l'exemple 7.3.

§ 2. Composition des rotations autour de deux axes parallèles

2.1. Rotations parallèles de même sens. Considérons le cas où le mouvement d'entraînement et le mouvement relatif du solide représentent, à l'instant donné, des rotations autour de deux axes parallèles.

Supposons d'abord que les vecteurs vitesse angulaire instantanée ω_1, ω_2 sont parallèles *de même sens* (fig. 12.6). Le mouvement résultant sera plan, car les vitesses de tous les points d'une droite parallèle aux axes instantanés seront égales. Il suffit donc d'étudier la distribution instantanée des vitesses dans un plan Π perpendiculaire à ω_1 et ω_2. Supposons que le plan Π vient couper les supports des vecteurs ω_1 et ω_2 aux points O_1 et O_2. Pour simplifier les choses, nous retiendrons ces points comme origines des vecteurs glissants ω_1 et ω_2.

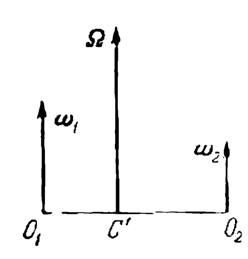


Fig. 12.6

Les vecteurs vitesse v_1, v_2 d'un point du segment O_1O_2 engendrés par les rotations instantanées données seront de sens opposés. Cherchons sur O_1O_2 un point C' dont la vitesse soit nulle, c'est-à-dire un point pour lequel soit vérifiée l'égalité $v_1 = v_2$. Or, $v_1 = O_1C'\omega_1$ et $v_2 = O_2C'\omega_2$, donc,

$$\frac{O_1C'}{O_2C'} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \qquad (12.8)$$

La vitesse du mouvement résultant est encore nulle pour chacun des points de la droite passant par C' et parallèle à ω_1 et ω_2. Par conséquent, le mouvement résultant est une rotation autour de cet axe instantané. Cherchons le module du vecteur vitesse angulaire instantanée Ω. La vitesse du point O_2 est de module

$$v_{O_2} = O_1O_2\omega_1;$$

d'autre part, on a

$$v_{O_2} = O_2C'\Omega,$$

d'où

$$\Omega = \frac{O_1O_2}{O_2C'}\,\omega_1 = \frac{O_1C' + C'O_2}{O_2C'}\,\omega_1 = \left(\frac{O_1C'}{O_2C'} + 1\right)\omega_1.$$

Substituant à ce dernier rapport sa valeur tirée de (12.8), on obtient en définitive

$$\Omega = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + 1\right)\omega_1 = \omega_1 + \omega_2. \qquad (12.9)$$

Ainsi donc, dans le cas où les mouvements d'entraînement et relatif du solide sont des rotations de même sens autour de deux axes instantanés parallèles avec des vitesses angulaires ω_1, ω_2, le *mouvement absolu* du solide est une rotation avec une vitesse angulaire instantanée $\Omega = \omega_1 + \omega_2$. L'axe instantané de la rotation résultante est contenu dans le plan des vitesses angulaires instantanées ω_1 et ω_2, est parallèle à celles-ci et partage intérieurement la distance entre elles en parties inversement proportionnelles à leurs modules (voir (12.8)).

Exemple 12.4. Le mécanisme représenté sur la figure 12.7 est composé de deux engrenages *I*, *II* de rayons r_1, r_2 reliés par un basculeur OO' qui tourne avec une vitesse angulaire ω. L'engrenage *I* est fixe, l'engrenage *II* est monté fou sur l'axe O' du basculeur. Calculer la vitesse angulaire absolue ω_2^a de l'engrenage *II* et sa vitesse angulaire par rapport au basculeur.

Solution. Le point C' de l'engrenage *II* est immobile à l'instant donné, car c'est son point de contact avec l'engrenage fixe *I*. Ce point représente le

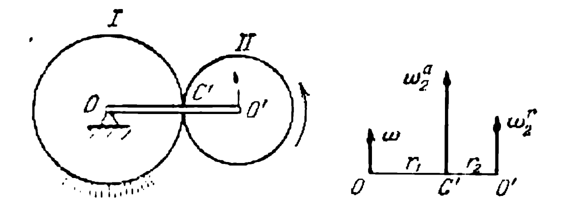


Fig. 12.7

centre instantané des vitesses de l'engrenage *II*; autrement dit, le point C' est situé sur l'axe instantané de rotation de l'engrenage *II*.

La rotation du basculeur sera assimilée au mouvement d'entraînement de l'engrenage *II*. Construisons les vecteurs vitesse angulaire d'entraînement ω, vitesse angulaire relative ω_2^r et vitesse angulaire absolue ω_2^a de l'engrenage *II* perpendiculairement au segment OO'. D'après les formules (12.8) et (12.9)

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\omega}{\omega_2^r}, \qquad \omega_2^a = \omega + \omega_2^r,$$

et nous obtenons les expressions de ω_2^r et ω_2^a en fonction de ω:

$$\omega_2^r = \frac{r_1}{r_2}\,\omega, \qquad \omega_2^a = \omega + \frac{r_1}{r_2}\,\omega = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\,\omega.$$

2.2. Rotations parallèles de sens opposés. Supposons maintenant que les vecteurs vitesse angulaire instantanée $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ sont parallèles et *de sens opposés*. Admettons, par analogie avec la figure 12.6, que le plan des vecteurs $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ est celui du dessin et traçons la droite d'intersection de ce plan et du plan Π perpendiculaire à $\boldsymbol{\omega}_1$ et $\boldsymbol{\omega}_2$ (fig. 12.8). Soit $\omega_1 \neq \omega_2$; pour fixer les idées, supposons que $\omega_1 < \omega_2$. Les vecteurs vitesse (dans les rotations instantanées) $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ d'un point M extérieur au segment O_1O_2 seront de sens opposés. Pour le point C' la vitesse absolue est nulle si $C'O_1\omega_1 = C'O_2\omega_2$ ou

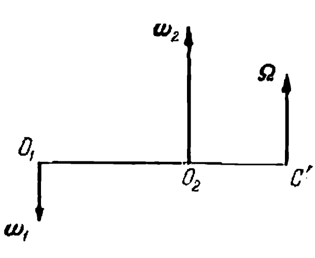


Fig. 12.8

$$\frac{C'O_1}{C'O_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \qquad (12.10)$$

Puisque ce rapport est supérieur à 1, on a $C'O_1 > C'O_2$. La droite passant par C' et parallèle aux vecteurs $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ est l'axe instantané de rotation dans le mouvement résultant. Déterminons le vecteur vitesse angulaire instantanée $\boldsymbol{\Omega}$ de ce mouvement. Le module du vecteur vitesse du point O_2 s'écrira

$$v_{O_2} = O_1O_2\omega_1 = C'O_2\Omega,$$

d'où

$$\Omega = \frac{O_1O_2}{C'O_2}\,\omega_1 = \frac{C'O_1 - C'O_2}{C'O_2}\,\omega_1 = \left(\frac{C'O_1}{C'O_2} - 1\right)\omega_1.$$

Substituant à ce dernier rapport sa valeur tirée de (12.10), on obtient définitivement

$$\Omega = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)\omega_1 = \omega_2 - \omega_1. \qquad (12.11)$$

Ainsi donc, dans le cas où les mouvements d'entraînement et relatif du solide sont des rotations instantanées parallèles de sens opposés avec des vitesses angulaires ω_1 et ω_2 telles que $\omega_2 > \omega_1$, le mouvement absolu du solide est une rotation avec une vitesse angulaire instantanée $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$. Cette dernière égalité veut dire en l'occurrence qu'on a $\Omega = \omega_2 - \omega_1$ et que le vecteur vitesse angulaire instantanée $\boldsymbol{\Omega}$ est de sens de celui des vecteurs vitesse angulaire composants qui a le plus grand module. L'axe instantané de la rotation absolue est contenu dans le plan des vecteurs vitesse angulaire instantanée $\boldsymbol{\omega}_1$ et $\boldsymbol{\omega}_2$, est parallèle à ces vecteurs et partage extérieurement la distance entre eux en parties inversement proportionnelles aux modules (voir (12.10)).

E x e m p l e 12.5. Le réducteur de vitesse représenté sur la figure 12.9 est constitué par trois engrenages I, II, III de rayons r_1, r_2, $r_3 = r_1 + 2r_2$ et un basculeur OO'. L'engrenage I tourne autour de l'axe fixe O; l'engrenage II

est monté fou sur le basculeur OO' et se trouve en prise avec l'engrenage *I* et l'engrenage fixe *III*. Quelle doit être la vitesse angulaire ω de rotation du basculeur pour que la vitesse angulaire de rotation de l'engrenage *I* soit égale à ω_1 ? Quelle sera dans ce cas la vitesse angulaire ω_2^r de l'engrenage *II* dans son mouvement relatif par rapport à l'engrenage *I* ?

Solution. Le point C' est le centre instantané des vitesses de l'engrenage *II*; autrement dit, il est situé sur l'axe instantané de rotation de l'engre-

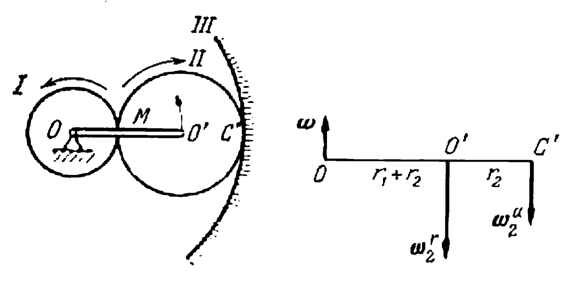


Fig. 12.9

nage *II*. Construisons les vecteurs vitesse angulaire d'entraînement $\boldsymbol{\omega}$, vitesse angulaire relative $\boldsymbol{\omega}_2^r$ et vitesse angulaire absolue $\boldsymbol{\omega}_2^a$ de l'engrenage *II* perpendiculairement au segment OC'. D'après les formules (12.10) et (12.11)

$$\frac{r_2}{r_1+2r_2}=\frac{\omega}{\omega_2^r}, \qquad \omega_2^a=\omega_2^r-\omega,$$

et nous obtenons les expressions de ω_2^r et ω_2^a en fonction de ω:

$$\omega_2^r=\frac{r_1+2r_2}{r_2}\,\omega, \qquad \omega_2^a=\frac{r_1+2r_2}{r_2}\,\omega-\omega=\frac{r_1+r_2}{r_2}\,\omega.$$

Le module du vecteur vitesse absolue du point de contact *M* des engrenages *I* et *II* s'écrit

$$v_M = 2r_2\omega_2^a = 2\,(r_1+r_2)\,\omega.$$

D'autre part, on a dans la rotation de l'engrenage *I*

$$v_M = r_1\omega_1.$$

Egalant les expressions de v_M, on obtient

$$\omega=\frac{r_1}{2\,(r_1+r_2)}\,\omega_1$$

et finalement

$$\omega_2^r=\frac{r_1+2r_2}{r_2}\,\omega=\frac{(r_1+2r_2)\,r_1}{2r_2\,(r_1+r_2)}\,\omega_1.$$

Les modules de ces vecteurs vitesse sont calculés en supposant que les sens des rotations sont ceux de la figure 12.9.

2.3. Couple de rotations. Il reste à considérer le cas où les vecteurs vitesse angulaire instantanée des mouvements composants sont parallèles, de sens opposés et de modules égaux: $\boldsymbol{\omega}_1 = -\boldsymbol{\omega}_2$ ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$). Un tel ensemble de mouvements composants est désigné

sous le terme de *couple de rotations*. Quel est le mouvement instantané engendré par un couple de rotations?

Calculons le vecteur vitesse d'un point M du solide (fig. 12.10):

$$v_M = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{AM}] + [-\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{BM}] = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{AM} - \boldsymbol{BM}] = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{AB}]. \quad (12.12)$$

Puisque le vecteur v_M est indépendant des coordonnées de M, tous les points du solide ont même vitesse à l'instant donné. Cela revient à dire que *le mouvement instantané résultant est une translation.*

Il ressort de (12.12) que la direction du vecteur vitesse de la translation résultante est perpendiculaire aux vecteurs $\boldsymbol{\omega}$ et $\boldsymbol{AB}$, c'est-à-dire perpendiculaire au plan du couple de rotations, et que l'orientation de ce vecteur est définie par la règle de la vis à droite. Quant au module, il est égal à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\boldsymbol{\omega}$ et $\boldsymbol{AB}$:

$$v = \omega h, \quad (12.13)$$

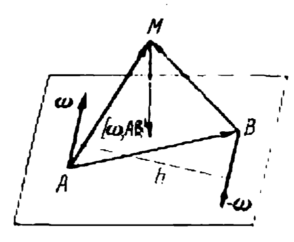


Fig. 12.10

où h est la distance entre les vecteurs $\boldsymbol{\omega}$ et $-\boldsymbol{\omega}$, dite *bras de levier du couple de rotations*. Le vecteur v, vecteur vitesse d'une translation instantanée, est un vecteur libre; on l'appelle aussi *vecteur moment du couple de rotations.*

Inversement, toute translation de vitesse v se laisse représenter sous forme d'un couple de rotations dans lequel:

— le plan est perpendiculaire à v;

— le bras de levier et les modules des vitesses angulaires vérifient la condition (12.13);

— l'orientation des vecteurs obéit à la règle de la vis à droite.

Grâce au fait que toute translation se laisse réduire à un couple de rotations, on peut, en étudiant les mouvements composés, considérer seulement des rotations.

E x e m p l e 12.6. Soit une roue mobile en rotation autour d'un axe horizontal fixe. Une tige $O'A$ est suspendue à la jante de la roue au moyen d'une articulation cylindrique, de manière à rester verticale pendant la rotation de la roue. Déterminer la nature du mouvement et les vitesses des points de la tige $O'A$ si la roue tourne avec une vitesse angulaire constante $\omega > 0$ (c'est-à-dire dans le sens antihoraire).

S o l u t i o n. On voit sur la figure 12.11 quatre positions de la tige $O'A$ pour quatre angles de rotation de la roue décalés de $\pi/2$. Adoptons l'articulation O' comme pôle et considérons la rotation de la tige autour de O' comme mouvement relatif. Pour mieux comprendre cette dernière convention, imaginons que les positions *I*, *II*, *III*, *IV* de la tige sont rapportées à une même position de l'articulation O'. Dans ce cas, pendant un tour complet de la roue, la tige $O'A$ aura fait également un tour complet autour de son articulation O', mais dans le sens rétrograde. Cela explique précisément pourquoi le mouvement relatif de la tige est une rotation de vitesse angulaire $-\omega$. Construisons le vecteur rotation d'entraînement $\boldsymbol{\omega}$ et le vecteur rotation relative instantanée $-\boldsymbol{\omega}$.

Les mouvements composants du mouvement absolu de la tige $O'A$ équivalent donc à un couple de rotations ; par conséquent, le mouvement résultant (absolu) de la tige est une translation. Son vecteur vitesse instantanée $\boldsymbol{v}$ est égal au vecteur moment du couple de rotations (voir fig. 12.11). Le module v est égal à ωR, où R est le rayon de la roue faisant office de bras de levier du couple de rotation.

Le fait que le mouvement de la tige $O'A$ soit une translation résulte d'ailleurs immédiatement de la verticalité du segment $O'A$ en mouvement plan. La vitesse

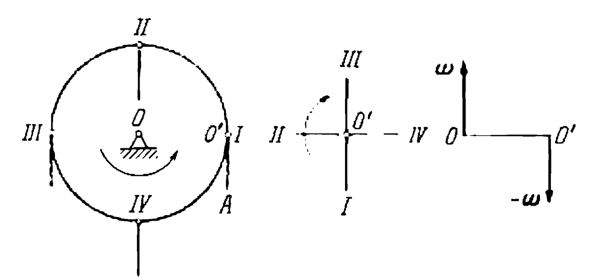


Fig. 12.11

de translation de la tige se définit par la vitesse de son point quelconque, par exemple de O'. Le point O' entraîné dans le mouvement de rotation de la roue a une vitesse ωR dirigée suivant la tangente à la jante. Notre but était de montrer, à l'aide d'un exemple fort simple, qu'un couple de rotations est équivalent à une translation.

Exercices

Exercice 12.1. Un cylindre creux de rayon $2r$ tourne autour de son axe de symétrie fixe avec une vitesse angulaire constante ω (fig. 12.12). Un second cylindre de rayon r roule sans glisser sur la surface intérieure du premier

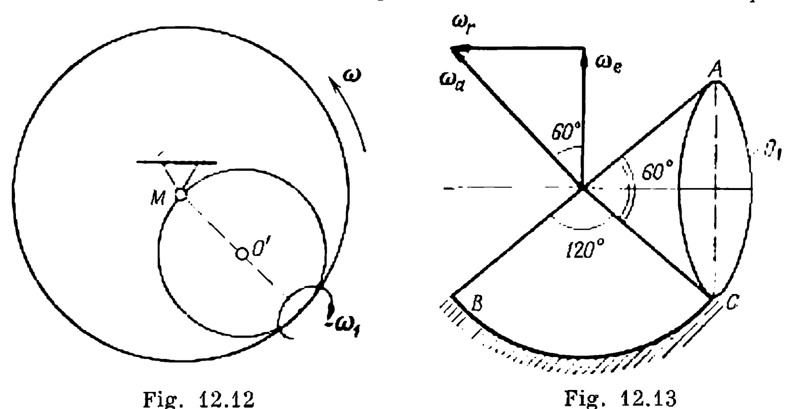


Fig. 12.12 Fig. 12.13

avec une vitesse angulaire relative constante $-\omega_1$ $(0 < \omega_1 < \omega)$. Définir l'accélération d'un point M du petit cylindre, qui se trouve, à l'instant considéré, sur l'axe du grand cylindre.

Indication. Prendre le point O' comme pôle. Calculer $v_{O'} = v^e_{O'} + v^r_{O'} = r(\omega + \omega_1)$ et $w_{O'} = v^2_{O'}/r$. Connaissant la vitesse angulaire absolue

du petit cylindre $\Omega = \omega - \omega_1$, déterminer l'accélération de M par rapport à O'. (Pourquoi les deux vecteurs accélération introduits n'admettent que des composantes normales ?) Déterminer ensuite le vecteur accélération totale du point M en se servant de la formule (10.8).

Réponse. $w_M = 4\omega\omega_1 r$, le vecteur w_M étant dirigé à partir du point O'.

Exercice 12.2. Le cône A (fig. 12.13) roule autour du cône fixe B en faisant n = const tours par minute. Déterminer les vitesses angulaires d'entraînement ω_e, relative ω_r (autour de l'axe OO_1) et absolue ω_a du cône A, ainsi que son accélération angulaire ε.

Indication. L'axe instantané de rotation du cône A se confond avec la génératrice OC commune aux deux cônes. Par définition, $\omega_e = \pi n/30$ rad/s.

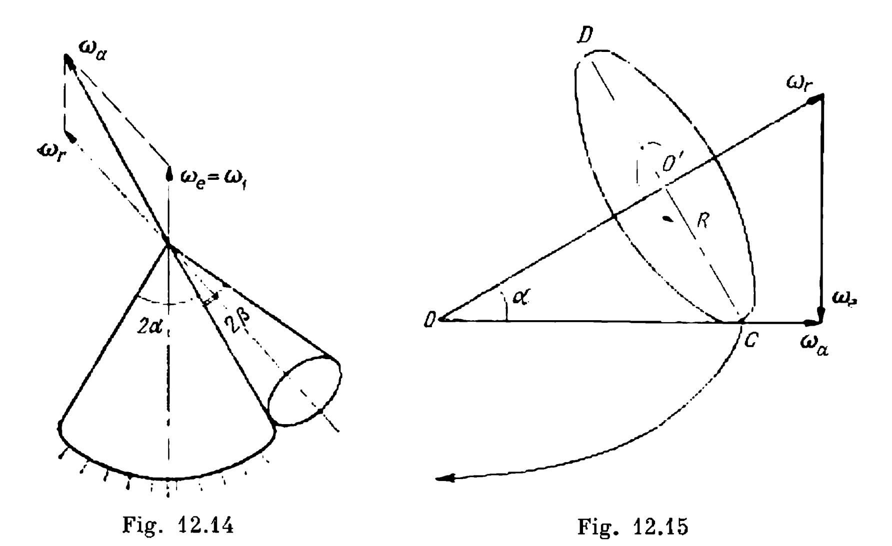


Fig. 12.14 Fig. 12.15

Trouver ω_a et ω_r dans le triangle des vitesses angulaires. L'accélération angulaire ε de A est égale à la vitesse de l'extrémité du vecteur ω_a.

Réponse. $\omega_r = \pi n\sqrt{3}/30$ rad/s, $\omega_a = \pi n/15$ rad/s, $\varepsilon = \omega_e\omega_r = \pi^2 n^2 \sqrt{3}/900$ rad/s²; le vecteur ε est dirigé perpendiculairement au plan du dessin, en deçà de celui-ci.

Exercice 12.3. Un cône circulaire droit d'angle au sommet 2β roule sans glisser sur un autre cône circulaire d'angle au sommet 2α. Dans ce mouvement, l'axe de symétrie du cône mobile tourne autour de l'axe de symétrie du cône fixe avec une vitesse angulaire constante ω_1 (fig. 12.14). Trouver les vitesses angulaires absolue ω_a et relative ω_r du cône en rotation.

Réponse. $\omega_a = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}\,\omega_1$, $\omega_r = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,\omega_1$.

Exercice 12.4. Un disque de rayon R, dont le plan fait un angle α avec la verticale, roule sans glisser sur un plan horizontal en décrivant une circonférence sur ce plan. Dans ce mouvement, l'axe du disque passe en permanence par le centre O de la circonférence décrite (fig. 12.15). Déterminer les vitesses angulaires absolue ω_a et relative ω_r de rotation du disque et la vitesse v_D de son point supérieur D, sachant que le centre O' du disque décrit une circonférence avec une vitesse de module constant $v_{O'}$.

I n d i c a t i o n. Construire le triangle des vitesses angulaires et définir ω_a et ω_r en fonction de ω_e. Pour calculer ω_e, appliquer la formule $v_{O'} = O_1O'\omega_e$.

R é p o n s e. $\omega_a = \frac{v_{O'}}{R \cos \alpha}$, $\omega_r = \frac{v_{O'}}{R \cos^2 \alpha}$, $v_D = 2v_{O'}$.

E x e r c i c e 12.5. Le disque AB tourne avec une vitesse angulaire constante ω_1 autour d'un axe OD qui passe par son centre O', tandis que l'axe OD lui-même tourne dans le même sens autour d'un axe vertical OE avec une vitesse angulaire constante ω_2 (fig. 12.16). Le rayon du disque est R, l'angle entre les axes est α, $OO' = a$. Déterminer la vitesse v_B du point le plus bas du disque.

I n d i c a t i o n. Le disque effectue un mouvement composé qui comprend deux rotations instantanées avec les vitesses angulaires ω_1 et ω_2. Déterminer les vitesses d'entraînement v_B^e et relative v_B^r du point B et appliquer le théorème de la composition des vitesses.

R é p o n s e. $v_B = (a \sin \alpha + R \cos \alpha)\, \omega_2 + R\omega_1$.

E x e r c i c e 12.6. La tige OA de longueur $2a$ tourne dans le sens antihoraire dans le plan du dessin autour de son extrémité fixe O avec une vitesse

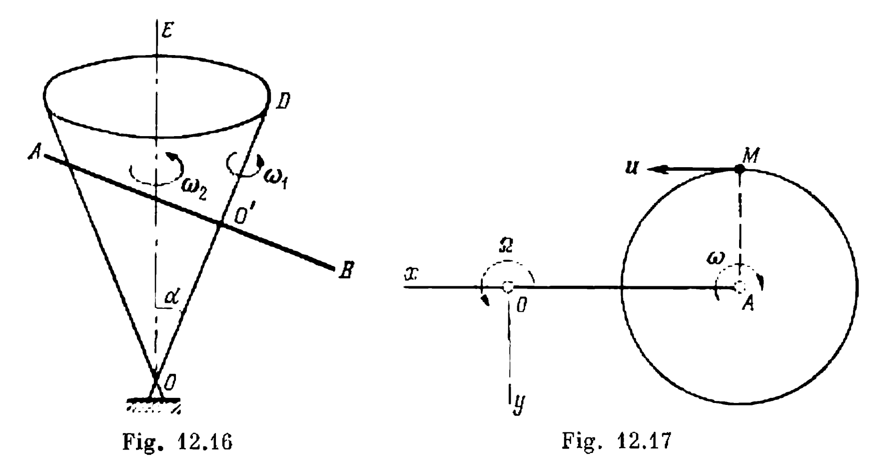


Fig. 12.16 Fig. 12.17

angulaire constante Ω (fig. 12.17). Une roue de rayon a montée folle sur l'extrémité A de la tige tourne dans le même plan mais en sens horaire avec une vitesse angulaire constante $(-\omega)$ par rapport à la tige. Déterminer l'accélération absolue d'un point matériel M qui se déplace sur la jante de la roue dans le sens antihoraire avec une vitesse de module constant u à l'instant où M se situe à l'aplomb de la tige.

R e m a r q u e. Envisager séparément le cas où $\omega = \Omega$.

I n d i c a t i o n. Le mouvement d'entraînement du point M est déterminé par le mouvement plan de la roue. Prenant A comme pôle, on a $w_A = w_x^A = 2a\Omega^2$; la vitesse angulaire de la roue en mouvement absolu est égale à $\Omega - \omega$, aussi l'accélération du point M de la roue par rapport au pôle A est-elle égale à $a\,(\Omega - \omega)^2$ et dirigée parallèlement à l'axe Oy. On a en somme

$$w_x^e = 2a\Omega^2, \qquad w_y^e = a\,(\Omega - \omega)^2.$$

L'accélération relative de M est $w_r = w_y^r = u^2/a$. Enfin, en construisant le vecteur accélération complémentaire de M, on s'assure que $w_c = w_y^c = 2u\,(\Omega - \omega)$.

Réponse. $w_x^a = 2a\Omega^2$, $w_y^a = \frac{1}{a}[a(\Omega-\omega)+u]^2$, $w_M^a = \sqrt{(w_x^a)^2+(w_y^a)^2}$.

Remarque. Dans le cas où $\omega = \Omega$, le premier terme de la somme entre crochets dans l'expression de w_y^a s'annule. En effet, dans le cas envisagé (un couple de rotations !) la roue effectue un mouvement de translation suivant une circonférence avec une vitesse de module constant $2a\Omega$ (module du moment du couple de rotations) et une accélération de module constant $(2a\Omega)^2/2a = 2a\Omega^2$ et de direction Ox. Quant à l'accélération du point M mobile sur la jante de la roue qui ne tourne pas, elle est de module u^2/a et de direction parallèle à l'axe Oy.

Exercice 12.7 (Chasles). Montrer que le mouvement instantané du solide peut entre décomposé, dans le cas général, d'une infinité de façons

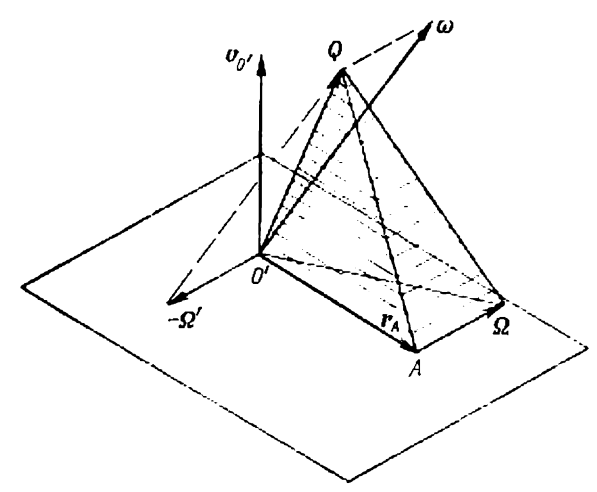


Fig. 12.18

en deux rotations instantanées de vitesses angulaires $\mathbf{\Omega}$ et Q, l'axe de l'une de ces rotations passant par un point arbitraire O' du solide. Montrer que le volume du tétraèdre construit sur les vecteurs $\mathbf{\Omega}$ et Q ne dépend pas du procédé choisi.

Indication. Conformément à la formule d'Euler, on a pour le cas général de mouvement du solide

$$v_M = v_{O'} + [\omega,\ r'] \qquad (r' = O'M).$$

Nous avons vu dans le n° 2.3 que toute translation instantanée de vecteur $v_{O'}$ se laisse remplacer par un couple de rotations instantanées de vitesses angulaires $\mathbf{\Omega}$, $-\mathbf{\Omega}'$ (voir fig. 12.18). Il ne reste qu'à remplacer deux rotations instantanées de vecteurs ω et $-\mathbf{\Omega}'$ par une rotation unique. Le volume cherché V du tétraèdre est égal, en vertu de (1.18), à

$$V = \frac{1}{6}([r'_A,\ \Omega],\ Q) = \frac{1}{6}([r'_A,\ \Omega],\ \omega) + \frac{1}{6}([r'_A,\ \Omega],\ -\Omega') = \frac{1}{6}(v_{O'},\ \omega) + 0 = \text{const.}$$

Remarque. Vérifier que dans tous les cas particuliers de mouvement du solide, le tétraèdre en question se réduit soit à une figure plane, soit à un point.

TROISIÈME PARTIE

DYNAMIQUE

INTRODUCTION À LA DYNAMIQUE

1. Objet de la dynamique. Comme nous l'avons dit dans l'Introduction à ce cours, *la dynamique s'occupe du mouvement mécanique* des corps matériels *en liaison avec les facteurs qui conditionnent ce mouvement*. Les facteurs en question sont l'interaction mécanique des corps (mesurée en unités de force, voir ch. I, nº 2.2), la propriété d'inertie des corps et la présence des liaisons imposées aux corps. La dynamique étudie les lois fondamentales du mouvement mécanique des corps matériels ; quant aux différents types de mouvement, ils sont examinés en vue d'expliquer l'application des lois fondamentales à des problèmes particuliers.

Toute force appliquée à une particule matérielle, c'est-à-dire à un corps relativement petit, lui communique une certaine accélération. Nous étudierons l'effet accélérateur de la force : c'est la raison pour laquelle les forces elles-mêmes seront appelées accélératrices, selon le terme de I. Newton. Cela ne veut pas dire pourtant que nous étudions des forces autres qu'en statique. La notion de force accélératrice est opposée par exemple à la notion de force vive que Leibniz proposait de mesurer par mv^2 (m étant la masse et v la vitesse de la particule). De même, la notion de force d'inertie (voir ch. XX, nº 1.1) est une notion fictive quand il s'agit des forces appliquées au solide, c'est-à-dire qu'elle est également opposée à la notion de force accélératrice considérée comme mesure d'action mécanique exercée par d'autres corps sur la particule (corps) en question.

Etudiant les forces, la mécanique fait abstraction de leur nature physique. La mesure statique d'une force se réduit à l'application d'une deuxième force qui équilibre la première. Tel est par exemple le principe du dynamomètre où la force à mesurer se voit équilibrée

par la force élastique du ressort. La valeur de la force est lue sur une échelle graduée.

Nous utiliserons partout le système international SI dont on trouve les principes dans le nº 2.3 du chapitre I ; sa liaison avec le système d'unités industriel est décrite dans le même paragraphe. Rappelons que l'unité SI de la force est le newton (N) : c'est la force qui communique à une masse égale à celle du prototype international du kilogramme une accélération égale à 1 m/s².

Dynamiquement, la force a pour mesure l'accélération qu'elle engendre. On comprend donc que la valeur de la force est étroitement liée avec la masse du corps qui définit son inertie. Il nous semble utile de définir la notion de masse plus tard, en abordant l'étude des lois de la mécanique classique qui portent le nom de Newton (voir ch. XIII, nº 1.1).

2. Petit historique. L'apparition de la dynamique date de la basse Renaissance (XVIe siècle). C'était l'époque où la résolution des problèmes de la dynamique devenait indispensable pour des buts pratiques. D'autre part, on commençait à comprendre que la nature du mouvement mécanique des corps ne pouvait plus être expliquée par un raisonnement de caractère purement spéculatif, à la manière du grand penseur d'Antiquité Aristote (384-322 avant notre ère) et de ses disciples: Héron d'Alexandrie (Ier siècle de notre ère) et autres. La spéculation devait céder la place aux observations systématiques et aux expériences. Les premiers pas dans cette voie furent faits par Nicolas Copernic (1473-1543) et Johannes Kepler (1571-1630) qui se consacrèrent à l'étude du mouvement des planètes, donc à la mécanique céleste. Par le dépouillement des observations nombreuses et fort minutieuses de l'astronome Tycho Brahe (1546-1601), Kepler réussit à dégager par voie empirique trois lois objectives qui régissent le mouvement non perturbé des planètes autour du Soleil. Plus tard, en 1687, Newton déduira les lois de Kepler par voie théorique à partir des principes de la mécanique classique et de la loi de l'attraction universelle, donnant à ces principes une confirmation expérimentale de plus.

Le plus éminent précurseur de Newton fut Galileo Galilée (1564-1642). Ses traités dans lesquels il se ralliait au système de mouvement des planètes de Copernic, hérétique aux yeux de l'église, lui valurent en 1633 le tribunal de la Sainte Inquisition. En dynamique, Galilée découvrit les lois de mouvement des corps lancés ou tombant en chute libre. Nous rencontrons dans ces lois un premier énoncé de la loi de l'inertie et de la deuxième loi de Newton pour les forces accélératrices.

Les lois d'oscillation du pendule mathématique circulaire, esquissées par Galilée, furent formulées par Christiaan Huygens (1629-1695) et Robert Hooke (1635-1703).

Publiés en 1687, les *Philosophiae naturalis principia mathematica* de Isaac Newton (1643-1727) allaient constituer une œuvre de fond dans le développement de la mécanique. Les *Principia* contiennent les trois lois fondamentales de la mécanique dont nous donnerons l'énoncé un peu plus tard. On y trouve en outre toute une série de corollaires et de problèmes résolus sur le mouvement des points matériels soumis à des forces connues, principalement les forces d'attraction et les forces de résistance du milieu. Grand naturaliste, Newton est connu aussi pour ses découvertes fondamentales en optique et en analyse.

Le développement rapide de la mécanique rationnelle après Newton s'explique en grande partie par la mise en œuvre d'un appareil mathématique approprié, surtout des méthodes d'analyse. Sur ce chapitre, il convient de

citer en premier lieu Leonhard Euler (1707-1783) qui laissa de nombreux ouvrages de mécanique, parmi lesquels la *Mécanique, ou science du mouvement exposée analytiquement* (1736).

Newton laissa sans solution certains problèmes liés à l'écriture des équations différentielles du mouvement. Ces difficultés furent levées en grande partie par Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) et Louis Lagrange (1736-1813). L'ouvrage de Lagrange intitulé *Mécanique analytique* (1788), écrit dans un style purement analytique, exerça une influence considérable sur le développement de la mécanique au XIXe siècle. Les bases physiques de la mécanique rationnelle y étaient reléguées au second plan, à tel point que tous les chercheurs d'Europe occidentale considéraient, à cette époque-là, la mécanique rationnelle comme un domaine des mathématiques appliquées. Or, un tel oubli du contenu physique, quelque riches que fussent les résultats analytiques obtenus, ne pouvait se prolonger infiniment. Il convient de noter tout spécialement que les mécaniciens russes ne se laissèrent pas tenter par une telle abstraction abusive.

Le fondateur de l'école russe de mécanique analytique fut M. Ostrogradski (1801-1862). Parmi ses contemporains, l'éminent mathématicien P. Tchébychev (1821-1894) fut en même temps un des créateurs de la théorie moderne des mécanismes et des machines. Tchébychev attachait une grande importance au rapprochement de la théorie et de la pratique. Il écrivait: « Se rapprochant de la pratique, la théorie apporte des résultats avantageux, et la pratique n'est pas seule à y gagner; les sciences mêmes s'épanouissent sous son influence: elle leur découvre de nouveaux objets d'étude ou des côtés nouveaux dans les objets connus depuis longtemps ». Tchébychev imagina plus de quarante mécanismes nouveaux, y compris les mécanismes à mouvement intermittent qui trouvent un large emploi dans les automatismes d'aujourd'hui.

En 1888, l'Académie des sciences de Paris lançait un concours de la meilleure étude théorique sur le mouvement d'un solide autour d'un point fixe. Il s'agissait de l'un des problèmes les plus ardus de la dynamique, qui attirait les plus éminents mécaniciens: Euler, Lagrange, Poinsot, Poisson et d'autres. L'unique prix du concours fut décerné à Sophie Kovalevskaïa (1850-1891) pour la découverte du dernier cas général possible du mouvement indiqué. Après Kovalevskaïa, le même problème préoccupa de nombreux savants russes: N. Joukovski, D. Bobylev, A. Liapounov, P. Voronets, V. Steklov, D. Goriatchev, S. Tchaplyguine et d'autres.

Dans le § 2 du chapitre XXIII, nous parlerons des grandes découvertes de K. Tsiolkovski (1857-1935) et de I. Mechtcherski (1859-1935) en théorie du vol spatial.

Avant de terminer ce bref historique, nous indiquerons l'ouvrage qui fit naître le plus grand nombre de travaux scientifiques: c'est le *Problème général de stabilité du mouvement* de Liapounov (1857-1918). La théorie de la stabilité du mouvement de Liapounov fut appliquée dans les recherches des auteurs soviétiques et étrangers sur la théorie des vibrations, dans le domaine de l'automatique, ainsi que dans de nombreux autres domaines de la science et de la technique. Un grand mérite en revient à N. Tchétaïev (1902-1959), chef de l'école soviétique de mécanique analytique dans les années 40.

CHAPITRE XIII

MOUVEMENT DU POINT MATÉRIEL LIBRE

§ 1. Lois fondamentales de la mécanique classique

1.1. Lois de Newton. Le mouvement mécanique est le déplacement d'un objet matériel par rapport à d'autres objets qui se produit dans le temps, si bien que tout mouvement est relatif à nos yeux. En effet, s'il n'y avait dans l'espace infini qu'une particule matérielle et une seule, on ne pourrait pas dire si la particule se déplace et de quelle manière, car il serait impossible de déterminer sa position. Newton, fondateur de la mécanique classique, a postulé l'existence de l'espace absolu (référentiel fixe) et du temps absolu, à l'aide desquels on détermine le mouvement absolu. Or, Newton luimême comprenait probablement que ces postulats ont un caractère limité (voir Introduction à la cinématique, n° 3).

Pour établir une relation entre le référentiel fixe et le temps absolu d'une part et les phénomènes du monde physique d'autre part, remarquons que les changements de position relative des étoiles observées sur le ciel sont si petits qu'on arrive à peine à les enregistrer en l'espace d'un an, même avec les méthodes de mesure contemporaines. C'est pourquoi les étoiles sont souvent appelées *immobiles*, à la différence des planètes.

Pour déterminer le mouvement absolu des objets matériels, imaginons un système de référence dont les axes sont liés de façon invariable aux étoiles immobiles: ce seront les axes *fixes* ou *axes de Copernic*. Ce mot est bien sûr conventionnel, car on n'a aucune raison de croire que les axes en question soient vraiment immobiles. Comme temps absolu, nous adopterons par convention le temps solaire moyen qui s'écoule de façon uniforme, compte tenu de la précision des observations astronomiques contemporaines. Quant aux unités de longueur et de temps, nous en avons déjà parlé dans le ch. I, n° 2.3, et dans l'Introduction à la cinématique.

Le déplacement du corps par rapport au système de référence fixe défini ci-dessus sera appelé *mouvement absolu* ; son déplacement par rapport à tout autre système non lié invariablement aux étoiles immobiles sera un *mouvement relatif*. Un peu plus tard, dans le n° 1.2, nous verrons que ces définitions ne sont pas tout à fait exhaustives.

Les trois lois fondamentales, ou principes, de la mécanique ont été exposées par Newton dans le second texte liminaire « Axiomes, ou lois de mouvement » de ses *Principia* ... (1687). Voici leurs énoncés pour le mouvement des corps matériels de dimensions négligeables et de masse finie, c'est-à-dire des objets que nous qualifions aujourd'hui par le terme *point matériel*.

Première loi (principe de l'inertie). *Tout point matériel demeure en repos ou en mouvement rectiligne uniforme tant et pour autant qu'aucune force appliquée ne l'incite à sortir de cet état.*

La première loi fait ressortir une propriété de la matière appelée *inertie*. Le mouvement rectiligne uniforme du point matériel s'appelle de ce fait *mouvement inertiel* ou *d'inertie*. Conformément à la première loi, le point matériel ne peut ni bouger (s'il se trouve en repos), ni s'arrêter ou changer la valeur et la direction de sa vitesse (s'il est en mouvement). Toute variation de la vitesse du point matériel doit donc avoir pour cause un facteur extérieur: c'est l'action des autres corps, ou la force.

Deuxième loi (relation entre la force et la quantité de mouvement). *Tout changement de la quantité de mouvement est proportionnel à la force motrice appliquée et se produit suivant la ligne d'action de cette force.*

Fig. 13.1

Soulignons qu'ici encore, Newton pense à un point matériel. Pour définir sa quantité de mouvement, on doit introduire la notion de masse. Par masse du corps en tant que mesure d'inertie du solide en translation, Newton entendait la quantité de matière renfermée dans le corps. Une telle masse, dite *inerte*, se prête mal à une évaluation quantitative. On la remplace donc par la *masse pesante*, rapport du poids $\boldsymbol{p}$ à l'accélération de la pesanteur $\boldsymbol{g}$ pour le lieu donné:

$$m = \frac{p}{g}.$$

Les expériences physiques montrent que la masse inerte et la masse pesante sont égales entre elles; en parlant d'un corps ou d'un point matériel, nous dirons donc simplement *masse*. L'unité SI de masse (voir ch. I, nº 2.3) est le kilogramme (kg).

On appelle *vecteur quantité de mouvement* $\boldsymbol{q}$ *du point matériel* M un vecteur appliqué en M et égal au produit de la masse du point par son vecteur vitesse à l'instant donné (voir fig. 13.1):

$$\boldsymbol{q} = m\boldsymbol{v}.$$

La deuxième loi de Newton prend la forme d'une égalité vectorielle:

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}. \qquad (13.1)$$

Si la masse du point est constante, c'est-à-dire ne varie pas dans le temps *), on a

$$mw = F. \tag{13.2}$$

Ici le vecteur $w = dv/dt$ est le vecteur accélération du point (voir ch. VII, n° 3.1) à l'instant donné. Ecrite sous cette forme, la deuxième loi de N e w t o n s'appelle *équation fondamentale de la dynamique du point matériel* et s'énonce ainsi :

La force est égale au produit de la masse du point par son accélération.

Il convient de compléter cet énoncé en disant que la force appliquée au point et l'accélération de celui-ci ont même direction et même sens (fig. 13.2).

T r o i s i è m e l o i (égalité de l'action et de la réaction). *A toute action correspond toujours une réaction égale et opposée.* Autrement dit, les actions réciproques de deux points matériels sont égales en valeur et en direction mais agissent dans les sens opposés.

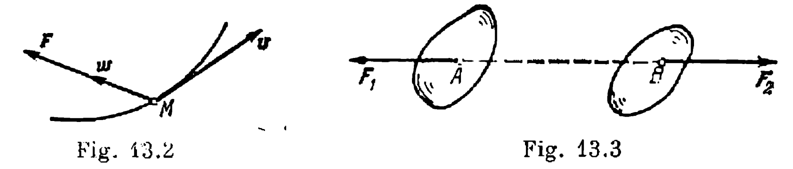


Fig. 13.2 Fig. 13.3

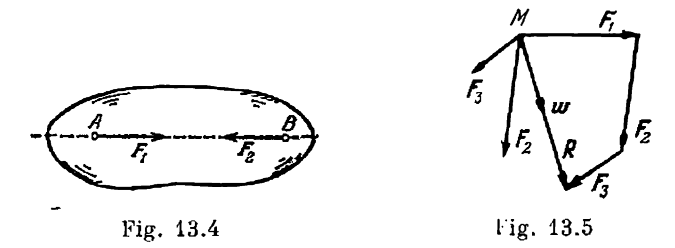


Fig. 13.4 Fig. 13.5

Considérons deux corps relativement petits. Si le corps A (fig. 13.3) subit une force F_1 de la part du corps B, le corps B éprouve, de la part de A, une force F_2 telle que

$$F_2 = -F_1.$$

Une des forces (n'importe laquelle) est appelée *action*, l'autre *réaction*. Elles ne se font pas équilibre, car elles sont appliquées à deux corps différents (voir ch. I, n° 2.5, axiome III).

R e m a r q u e. Considérons un solide parfait (fig. 13.4). Supposons que son point A subit une force intérieure F_1 exercée par le

*) Nous le supposerons pour les points matériels et les corps considérés partout sauf dans le § 2 du ch. XXIII.

point B du même solide. Alors, en vertu de la troisième loi da Newton, le point B éprouve de la part de A une force $\boldsymbol{F}_2$ telle que $\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1$. Les forces en question se font équilibre, car elles sont colinéaires. Ainsi donc, *les forces intérieures* agissant dans un même solide *se font mutuellement équilibre.*

Parmi les corollaires déduits par Newton à partir de ses lois, nous retiendrons deux que nous réunirons sous le terme de

Principe d'indépendance de l'action des forces. *Le point matériel soumis à plusieurs forces simultanées se voit imprimer une accélération égale à celle que pourrait lui imprimer la résultante du système de forces donné.*

Soient $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_l$ les forces appliquées au point matériel M de masse m. En vertu de la deuxième loi de Newton et conformément au principe d'indépendance de l'action des forces, l'accélération $\boldsymbol{w}$ prise par M est dirigée suivant la ligne d'action de la résultante $\boldsymbol{R}$ du système de forces donné (fig. 13.5). L'équation fondamentale de la dynamique du point matériel s'écrit alors

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{R}, \text{ où } \boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_l = \sum \boldsymbol{F}. \qquad (13.3)$$

1.2. Repère inertiel. Principe de la relativité de la dynamique classique. Puisque, conformément au principe de l'inertie de Newton, tout point matériel libre tend à conserver son état de repos absolu ou de mouvement absolu rectiligne uniforme, aucune expérience mécanique ne peut nous indiquer si le système de référence, ou repère, est en repos absolu ou en mouvement de translation absolu rectiligne uniforme. Autrement dit, la notion de mouvement absolu devient indéterminée. Il en découle que tous les repères qui se déplacent les uns par rapport aux autres en translation de façon rectiligne et uniforme *) sont équivalents lors de l'étude des phénomènes mécaniques: ce corollaire établi par Galilée s'appelle *principe de la relativité de la dynamique classique*. Examinons-le de plus près.

Considérons deux repères S et S', par exemple la Terre **) et un train en mouvement (fig. 13.6). Supposons que le repère S' est animé d'un mouvement de translation rectiligne par rapport à S suivant l'axe Ox et qu'un point matériel M se déplace suivant Ox avec la vitesse $\boldsymbol{v}$ et l'accélération $\boldsymbol{w}$ par rapport à S. La vitesse $\boldsymbol{v}'$ et l'accélération $\boldsymbol{w}'$ de M par rapport au repère S' sont alors (voir ch. XI,

*) On espérait jadis pouvoir mettre en évidence le mouvement rectiligne uniforme du repère à l'aide d'une expérience physique où la loi d'inertie n'intervient pas, telle qu'une expérience avec la lumière; toutes les expériences de ce type ont donné cependant des résultats négatifs. L'explication définitive a été fournie par Albert Einstein (1879-1955) dans sa théorie de la Relativité restreinte publiée en 1905.

**) Il sera plus exact de placer l'origine au centre de la Terre et de diriger les axes vers les étoiles immobiles.

n°s 1.2 et 2.2)

$$v' = v - V, \qquad w' = w - W, \tag{13.4}$$

où V et W sont la vitesse et l'accélération du repère S' (le train) par rapport au repère S (la Terre).

Si le point matériel se déplace par inertie dans S, on a dans S'

$$w' = -W \neq 0.$$

Le principe de l'inertie devient donc indéterminé, à moins de préciser le repère dans lequel il agit. Newton croyait que le principe de l'inertie jouait dans le système de référence « absolu ».

Supposons qu'il existe en effet un « repère fondamental » dans lequel le principe de l'inertie a lieu. On appelle *repère inertiel* tout

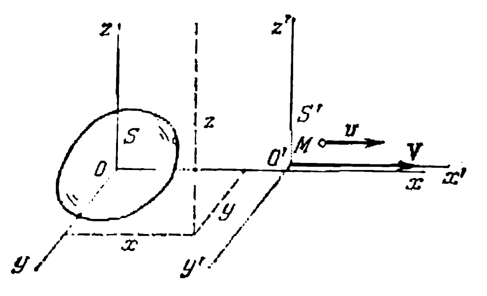


Fig. 13.6

repère S' animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme de vitesse V (et donc d'accélération nulle, $W = 0$) par rapport au repère fondamental.

Tout repère inertiel est un repère fondamental, car, en vertu de (13.4), tout point matériel animé d'un mouvement uniforme dans S l'est aussi dans S'.

Si les origines O, O' de deux repères inertiels S, S' ont été confondues à l'instant initial $t = 0$, de même que les axes correspondants, le passage d'un repère inertiel à l'autre s'opère à l'aide des formules

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \quad (W = 0) \tag{13.5}$$

appelées *relations de Galilée-Newton*. Ici t et t' est le temps compté dans S et S' respectivement. L'égalité $t = t'$ veut dire qu'en mécanique classique le temps ne change pas en passant d'un repère inertiel à l'autre; on dit qu'il est *invariant par changement de repère inertiel*.

Nous avons vu que le mouvement du point matériel dans le repère inertiel S est régi par la deuxième loi de Newton $mw = F$. En passant à un autre repère inertiel S', la force appliquée et l'accélé-

ration restent inchangées:

$$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}, \qquad \boldsymbol{w}' = \boldsymbol{w}.$$

La loi du mouvement reste donc la même:

$$m\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{F}'.$$

Ceci est le

Principe de la relativité de la dynamique classique: *les lois de la dynamique restent inchangées dans tous les repères inertiels ou, comme on dit, sont covariantes par toute transformation du type* (13.5).

Le sens de ce principe se résume par le fait expérimental que le mouvement de translation rectiligne et uniforme du repère S' ne fait naître aucune accélération et (s'agissant de corps animés d'un mouvement accéléré) ne détruit pas la proportionnalité entre les accélérations existantes et les forces appliquées aux corps. Nous reviendrons sur cette question dans le ch. XVI, nº 2.2.

§ 2. Equations différentielles du mouvement d'un point matériel libre

2.1. Equations du mouvement en coordonnées cartésiennes. Soit un système de forces connues $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_l$ appliquées à un point M de masse m (voir fig. 13.5). Considérons le mouvement de M dans un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires $Oxyz$ (repère inertiel, voir nº 1.2). Ecrivons la relation fondamentale de la dynamique du point matériel (voir la formule (13.3)):

$$m\boldsymbol{w} = \sum_{\lambda=1}^{l} \boldsymbol{F}_\lambda.$$

Cette relation vectorielle donne par projection sur les axes du repère inertiel $Oxyz$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_{\lambda=1}^{l} X_\lambda, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_{\lambda=1}^{l} Y_\lambda, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum_{\lambda=1}^{l} Z_\lambda. \qquad (13.6)$$

Ici x, y, z sont les coordonnées du point mobile M; d^2x/dt^2, d^2y/dt^2, p^2z/dt^2 les projections du vecteur accélération $\boldsymbol{w}$ de M (voir ch. VII, nº 3.2), et X_λ, Y_λ, Z_λ les projections du vecteur $\boldsymbol{F}_\lambda$ de la λ-ième force sur les axes Ox, Oy, Oz respectivement ($\lambda = 1, 2, \ldots, l$).

Pour se faire une idée du système d'équations différentielles (13.6), on désignera les projections de la résultante $\boldsymbol{R}$ des forces appliquées à M par R_x, R_y, R_z,

$$\boldsymbol{R} = \sum_{\lambda=1}^{l} \boldsymbol{F}_\lambda, \quad R_x = \sum_{\lambda=1}^{l} X_\lambda, \quad R_y = \sum_{\lambda=1}^{l} Y_\lambda, \quad R_z = \sum_{\lambda=1}^{l} Z_\lambda.$$

Les forces appliquées à M sont en général fonctions

a) de la position du point M, c'est-à-dire de x, y, z (par exemple, les forces d'attraction newtonienne);

b) de la vitesse du point M, c'est-à-dire de $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, $v_z = dz/dt$ (par exemple, les forces de résistance);

c) les deux premières dépendances renferment déjà une dépendance implicite du temps t, car x, y, z, dx/dt, dy/dt, dz/dt changent avec le temps. Or, les forces appliquées peuvent aussi dépendre du temps de façon explicite (par exemple, la force perturbatrice intervenant pendant les oscillations forcées du point, voir plus loin ch. XIV, n° 3.1).

Désignant dans le texte qui suit les dérivées premières par rapport au temps par un point supérieur et les dérivées secondes par deux points supérieurs, notons que les projections de la résultante sont fonctions de x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ et t. *Le système d'équations différentielles* (13.6) *du mouvement du point matériel s'écrira désormais sous forme générale, en termes de projections sur les axes du repère inertiel* $Oxyz$, *comme suit :*

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{1}{m} R_x(t;\ x,\ y,\ z;\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}), \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m} R_y(t;\ x,\ y,\ z;\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}), \\ \ddot{z} &= \frac{1}{m} R_z(t;\ x,\ y,\ z;\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}). \end{aligned} \qquad (13.7)$$

Le système (13.7) (de même que (13.6)) est un système d'équations différentielles ordinaires du sixième ordre. Dans le cas général ses solutions générale et particulières ne s'expriment pas au moyen de fonctions élémentaires, c'est-à-dire par des formules où intervient un nombre fini de fonctions puissances, logarithmiques, trigonométriques, etc., d'une variable indépendante t et d'intégrales de ces fonctions. On est donc amené à étudier les différentes classes de problèmes types, ce que nous ferons justement dans le paragraphe 3 du présent chapitre et dans les chapitres XIV à XVI.

2.2. Equations du mouvement rapporté au système d'axes intrinsèques. Remplaçons les axes cartésiens par les axes intrinsèques (voir fig. 7.9) du système $M\tau nb$, où $M\tau$ est la tangente, Mn la normale principale et Mb la binormale à la trajectoire en M (voir ch. VII, n° 3.3). D'après les formules (7.25a) et (7.26), les projections du vecteur accélération sur les axes indiqués s'écrivent respectivement

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad w_b \equiv 0.$$

Projetant l'équation fondamentale (13.3) sur les axes intrinsèques, on obtient les *équations intrinsèques du mouvement d'un point maté-*

riel (forme des équations du mouvement proposée par Euler):

$$m\frac{dv_\tau}{dt}=\sum F_\tau,\quad m\frac{v^2}{\rho}=\sum F_n,\quad 0=\sum F_b. \tag{13.8}$$

Ici v_τ est la vitesse algébrique du point (la projection du vecteur vitesse du point sur la tangente, voir formule (7.13)), ρ le rayon de courbure de la trajectoire à l'instant considéré, et $\sum F_\tau$, $\sum F_n$, $\sum F_b$ les sommes algébriques des projections de toutes les forces appliquées au point sur la tangente, sur la normale principale et sur la binormale respectivement. De la dernière équation du système (13.8) il ressort que la force résultante $\boldsymbol{R}$ (de même que l'accélération du point $\boldsymbol{w}$) est contenue dans le plan osculateur (voir ch. VII, nº 3.3).

2.3. Premier problème fondamental de la dynamique du point matériel. Chacune des équations de (13.6) établit la relation entre deux grandeurs: la projection de l'accélération du point et la projection de la force résultante sur un axe correspondant du repère inertiel. Ces équations permettent de résoudre deux problèmes fondamentaux.

Premier problème fondamental de la dynamique du point matériel. Connaissant la masse et le mouvement du point, c'est-à-dire connaissant les équations de son mouvement dans le repère cartésien rectangulaire inertiel:

$$x=f(t),\qquad y=g(t),\qquad z=h(t), \tag{13.9}$$

chercher la force appliquée au point.

Solution. Dérivons deux fois les équations (13.9). Il vient

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot f(t),\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\ddot g(t),\quad \frac{d^2z}{dt^2}=\ddot h(t).$$

Portons les projections du vecteur accélération du point dans les équations (13.6):

$$m\ddot f(t)=\sum X,\quad m\ddot g(t)=\sum Y,\quad m\ddot h(t)=\sum Z. \tag{13.10}$$

Or, $\sum X=R_x$, $\sum Y=R_y$, $\sum Z=R_z$, où R_x, R_y, R_z sont les projections de la force résultante sur les axes Ox, Oy, Oz. Le module de la résultante se cherche d'après la formule

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}=m\sqrt{\ddot f(t)^2+\ddot g(t)^2+\ddot h(t)^2}, \tag{13.11}$$

tandis que sa direction est déterminée par les cosinus directeurs

$$\begin{gathered}\cos(\widehat{\boldsymbol{R}, Ox})=\frac{R_x}{R}=\frac{\ddot f(t)}{\sqrt{\ddot f(t)^2+\ddot g(t)^2+\ddot h(t)^2}},\\ \cos(\widehat{\boldsymbol{R}, Oy})=\frac{R_y}{R},\quad \cos(\widehat{\boldsymbol{R}, Oz})=\frac{R_z}{R}.\end{gathered} \tag{13.12}$$

Ainsi donc, étant donné les équations du mouvement (13.9), chercher la résultante des forces appliquées au point matériel revient à dériver ces équations. On comprend donc que le premier problème fondamental de la dynamique se laisse résoudre toujours et sans difficulté aucune.

Exemple 13.1. Soient les équations du mouvement d'un point M soumis à une force unique F

$$x = a \cos \omega t, \qquad y = b \sin \omega t, \qquad z = 0. \tag{13.13}$$

On demande de savoir la force.

Solution. Le point M effectue un mouvement plan suivant une trajectoire dont on obtient l'équation en éliminant le temps t entre les équations (13.13):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ainsi donc, la trajectoire de M est une ellipse (fig. 13.7). Les projections de F se déduisent à l'aide des formules (13.10):

$$X = m\ddot{x} = -ma\omega^2 \cos \omega t, \quad Y = m\ddot{y} = -mb\omega^2 \sin \omega t, \quad Z = m\ddot{z} = 0.$$

D'après les formules (13.11) et (13.12) on obtient

$$F = m\omega^2 \sqrt{a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t} = m\omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = m\omega^2 r,$$

$$\cos(\widehat{F, Ox}) = -\frac{ma\omega^2 \cos \omega t}{m\omega^2 r} = -\frac{x}{r}, \quad \cos(\widehat{F, Oy}) = -\frac{y}{r}.$$

Ici r est le rayon vecteur $\boldsymbol{OM}$. Nous voyons que l'intensité de la force est proportionnelle au module du rayon vecteur et que les vecteurs $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{OM}$ sont de sens opposés (fig. 13.7). Ce résultat devient évident d'ailleurs en examinant l'expression de

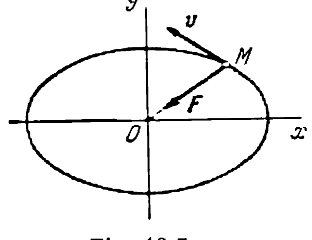


Fig. 13.7

$$\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k} = -m\omega^2 (\boldsymbol{i}a \cos \omega t + \boldsymbol{j}b \sin \omega t) = -m\omega^2 (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = -m\omega^2 \boldsymbol{r}.$$

Remarquons que les planètes décrivent, elles aussi, des orbites elliptiques autour du Soleil, le Soleil ne se trouvant pas au centre mais en l'un des foyers de l'ellipse (première loi de Kepler); remarquons aussi que la force d'attraction n'est pas proportionnelle à la distance mais inversement proportionnelle au carré de la distance (loi de l'attraction universelle de Newton). Les lois du mouvement sont alors beaucoup plus compliquées que (13.13).

2.4. Second problème fondamental de la dynamique d'un point matériel. Soient connus le système de forces $F_1, F_2, \ldots, F_l$ appliquées au point et la masse de ce dernier. On demande de déterminer le mouvement du point.

La solution consiste à rechercher les équations du mouvement (13.9) et à définir à partir de celles-ci, par des méthodes cinématiques, la trajectoire, la vitesse et l'accélération du point (les deux dernières grandeurs sont fonctions du temps t).

Le problème se fait par intégration du système d'équations différentielles (13.7) dont les seconds membres sont connus, parce que les forces $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_l$ le sont. Nous avons signalé dans le nº 2.1 que ce problème ne s'intègre pas dans le cas général et la solution ne peut être obtenue que dans des cas particuliers. Dans un cas un peu plus général, on n'obtient qu'une solution approchée par intégration numérique sur ordinateur.

En intégrant le système (13.7), on voit apparaître des constantes arbitraires dont le nombre est égal, dans le cas général, à l'ordre du système, donc à six. Ces constantes peuvent être déterminées en se donnant des conditions initiales. Soient pour $t = t_0$

$$\begin{aligned} &x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0; \\ &\dot{x}(t_0) = v_x^0, \quad \dot{y}(t_0) = v_y^0, \quad \dot{z}(t_0) = v_z^0. \end{aligned} \qquad (13.14)$$

Les conditions initiales définissent une solution unique (particulière) du système (13.7), autrement dit la position du point dans l'espace et sa vitesse à un instant quelconque

$$\begin{aligned} &x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t); \\ &v_x = \dot{x}(t), \qquad v_y = \dot{y}(t), \qquad v_z = \dot{z}(t). \end{aligned} \qquad (13.15)$$

On arrive à résoudre par un procédé analogue les deux problèmes fondamentaux de la dynamique du point matériel en utilisant les équations intrinsèques du mouvement (13.8).

Exemple 13.2. Le point matériel M de masse m lancé avec une vitesse initiale v_0 sous un angle α par rapport à l'horizontale surmonte pendant son trajet la résistance de l'air $\boldsymbol{S} = -\varkappa mg\boldsymbol{v}$, où $\varkappa$ est un coefficient de proportionnalité constant et $\boldsymbol{v}$ la vitesse du point. Déterminer la hauteur maximale H atteinte par le point, le temps τ nécessaire pour l'atteindre, et la portée s correspondant à H.

Solution. Plaçons l'origine des coordonnées O dans la position initiale du point; orientons l'axe Oz verticalement vers le haut, et l'axe Oy, horizontalement dans le plan passant par Oz et $\boldsymbol{v}_0$ (fig. 13.8) *). Le point M est soumis à l'action de deux forces: le poids $\boldsymbol{P} = -mg\boldsymbol{k}$ (où $\boldsymbol{k}$ est le vecteur unité de l'axe Oz) et la force de résistance $\boldsymbol{S}$. L'équation fondamentale de la dynamique du point (13.3) s'écrira comme suit:

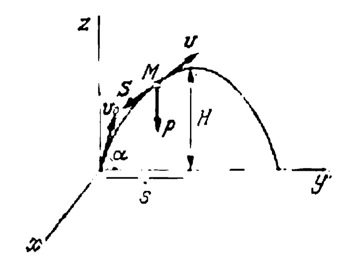


Fig. 13.8

$$m\boldsymbol{w} = -mg\boldsymbol{k} - \varkappa mg\boldsymbol{v}.$$

Projetant cette relation sur les axes Ox, Oy, Oz, on obtient, après avoir divisé par m, le système d'équations différentielles (13.7):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\varkappa g v_y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g - \varkappa g v_z,$$

*) Le repère choisi n'est pas inertiel mais l'erreur n'est pas grande, cf. ch. XVI, nº 2.2.

où $v_y = dy/dt$ et $v_z = dz/dt$ sont les projections du vecteur vitesse v du point sur les axes Oy et Oz. Prenant ces quantités, ainsi que $v_x = dx/dt$, comme variables intermédiaires, nous écrirons:

$$\frac{dv_x}{dt}=0, \quad \frac{dv_y}{dt}=-\varkappa g v_y, \quad \frac{dv_z}{dt}=-g(1+\varkappa v_z).$$

Séparant les variables:

$$dv_x=0, \quad \frac{dv_y}{v_y}=-\varkappa g\,dt, \quad \frac{dv_z}{1+\varkappa v_z}=-g\,dt, \tag{13.16}$$

on obtient après intégration

$$v_x=c_1, \quad \ln v_y-\ln c_2=-\varkappa g t, \quad \frac{1}{\varkappa}\ln(1+\varkappa v_z)-\frac{1}{\varkappa}\ln c_3=-gt,$$

où c_1, c_2, c_3 sont des constantes arbitraires. Des dernières formules on obtient

$$v_x=c_1, \quad v_y=c_2 e^{-\varkappa g t}, \quad v_z=\frac{1}{\varkappa}(c_3 e^{-\varkappa g t}-1).$$

Appliquons maintenant les trois dernières conditions initiales (13.14), notamment pour $t=0$,

$$v_x(0)=0, \qquad v_y(0)=v_0\cos\alpha, \qquad v_z=v_0\sin\alpha.$$

On a alors

$$c_1=0, \qquad c_2=v_0\cos\alpha, \qquad c_3=\varkappa v_0\sin\alpha+1.$$

Il vient donc pour un instant quelconque $t \geqslant 0$

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt}=v_x=0, \quad \frac{dy}{dt}=v_y=v_0 e^{-\varkappa g t}\cos\alpha,\\ \frac{dz}{dt}=v_z=\frac{1}{\varkappa}\left[(1+\varkappa v_0\sin\alpha)\,e^{-\varkappa g t}-1\right].\end{gathered} \tag{13.17}$$

Remarquons qu'afin de faciliter les calculs dans la suite, les conditions initiales seront introduites (quand cela est possible) en tant que bornes d'intégration. En effet, on obtient de (13.16) par intégration sur le temps entre 0 et t et sur les projections de la vitesse entre $v_x^0=0$, $v_y^0=v_0\cos\alpha$, $v_z^0=v_0\sin\alpha$ et v_x, v_y, v_z:

$$v_x=0, \quad \int\limits_{v_0\cos\alpha}^{v_y}\frac{dv_y}{v_y}=-\varkappa g\int\limits_0^t dt, \quad \int\limits_{v_0\sin\alpha}^{v_z}\frac{dv_z}{1+\varkappa v_z}=-g\int\limits_0^t dt.$$

Cela nous permet d'aboutir plus vite aux formules (13.17) qui représentent la seconde moitié de la solution particulière cherchée (13.15). Séparons les variables dans (13.17):

$$\begin{gathered}dx=0, \quad dy=v_0 e^{-\varkappa g t}\cos\alpha\,dt,\\ dz=\frac{1}{\varkappa}\left[(1+\varkappa v_0\sin\alpha)\,e^{-\varkappa g t}-1\right]dt\end{gathered}$$

pour obtenir après intégration

$$\begin{gathered}x=c_4, \quad y=-\frac{v_0\cos\alpha}{\varkappa g}e^{-\varkappa g t}+c_5,\\ z=-\frac{1+\varkappa v_0\sin\alpha}{\varkappa^2 g}e^{-\varkappa g t}-\frac{t}{\varkappa}+c_6.\end{gathered}$$

Faisons intervenir les trois premières conditions initiales (13.14), notamment pour $t = 0$ il vient $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, d'où

$$c_4 = 0, \quad c_5 = \frac{v_0 \cos \alpha}{\varkappa g}, \quad c_6 = \frac{1 + \varkappa v_0 \sin \alpha}{\varkappa^2 g}.$$

On a pour la première moitié de la solution particulière cherchée (13.15)

$$x = 0, \quad y = \frac{v_0 \cos \alpha}{\varkappa g}(1 - e^{-\varkappa g t}), \quad z = \frac{1 + \varkappa v_0 \sin \alpha}{\varkappa^2 g}(1 - e^{-\varkappa g t}) - \frac{t}{\varkappa}. \tag{13.18}$$

Ce sont les équations de la trajectoire du point M sous forme paramétrique. Le point continue sa montée jusqu'à l'instant τ où la composante verticale de sa vitesse devient nulle, auquel cas on obtient en vertu de (13.17)

$$(1 + \varkappa v_0 \sin \alpha)\, e^{-\varkappa g t} - 1 = 0,$$

d'où

$$\tau = \frac{1}{\varkappa g} \ln (1 + \varkappa v_0 \sin \alpha).$$

Portant la valeur obtenue de τ dans (13.18), on obtient s et H:

$$s = y(\tau) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g(1 + \varkappa v_0 \sin \alpha)}, \tag{13.19}$$

$$H = z(\tau) = \frac{v_0 \sin \alpha}{\varkappa g} - \frac{1}{\varkappa^2 g} \ln (1 + \varkappa v_0 \sin \alpha).$$

§ 3. Intégration des équations différentielles du mouvement d'un point matériel dans les cas élémentaires de mouvement rectiligne

Dans le cas où la force résultante $\boldsymbol{R}$ (voir (13.3)) a une direction constante et la vitesse initiale du point est dirigée suivant la ligne d'action de $\boldsymbol{R}$ (ou est égale à zéro), le point matériel effectue un mouvement rectiligne. Adoptons la trajectoire rectiligne du point comme l'axe Ox, le sens de parcours de la trajectoire étant confondu avec le sens positif de l'axe. Lorsqu'il s'agit du mouvement rectiligne, il y a intérêt à remplacer les vecteurs force, accélération, vitesse du point par leurs valeurs algébriques, le sens de chaque vecteur étant précisé par le signe. Ces valeurs algébriques sont les projections des vecteurs en question sur l'axe Ox. Puisque les projections sur tout autre axe sont identiquement nulles, afin de simplifier la notation, nous omettrons l'indice d'axe en écrivant par exemple v tout court au lieu de v_x; le module de la vitesse sera désigné par $|v|$.

Mettons l'équation différentielle du mouvement rectiligne du point sous la forme suivante (voir (13.3) et (13.7)):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X(x, v, t). \tag{13.20}$$

Ici X est la valeur algébrique de la force résultante et $v = dx/dt$ la valeur algébrique de la vitesse. Il s'agit d'une équation différentiel-

le du second ordre dont la solution générale

$$x = x(t, c_1, c_2)$$

contient deux constantes arbitraires. Celles-ci peuvent être définies en se donnant des conditions initiales. Par exemple, soient pour $t = 0$

$$x(0) = x_0, \qquad v(0) = v_0. \tag{13.21}$$

La résolution de l'équation (13.20) offre des difficultés mathématiques considérables. Or, elle se réduit à des quadratures chaque fois que X ne dépend que de l'une des variables t, v ou x.

3.1. Cas où la force ne dépend que du temps. L'équation (13.20) se laisse transcrire alors de la façon suivante:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} X(t).$$

Séparons les variables:

$$dv = \frac{1}{m} X(t)\, dt$$

et intégrons sous les conditions initiales (13.21). Il vient

$$\int_{v_0}^{v} dv = \frac{1}{m} \int_0^t X(t)\, dt.$$

On a obtenu une intégrale première de l'équation du mouvement. Désignons son second membre par $f(t)$ et écrivons

$$v = v_0 + f(t). \tag{13.22}$$

Substituons-y la valeur de $v = dx/dt$ et séparons de nouveau les variables:

$$dx = [v_0 + f(t)]\, dt.$$

Intégrant une fois de plus sous les conditions initiales (13.21), on obtient

$$x = x_0 + v_0 t + \int_0^t f(t)\, dt. \tag{13.23}$$

Exemple 13.3. Soit X une force constante. Désignons la valeur algébrique constante de l'accélération par a,

$$\frac{X}{m} = a.$$

La fonction $f(t)$ de l'exemple précédent s'écrira alors

$$f(t) = \frac{1}{m} \int_0^t X\, dt = at \quad \text{et} \quad \int_0^t f(t)\, dt = \int_0^t at\, dt = \frac{1}{2} at^2.$$

L'intégrale première (13.22) et l'équation horaire (13.23) nous donnent les formules pour le calcul de la vitesse et de l'abscisse du point animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié:

$$v = v_0 + at, \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Exemple 13.4. Un point matériel est retenu par un fil sur un plan incliné dépoli de pente α. On coupe le fil à l'instant $t = 0$. Déterminer le mouvement du point, admettant que la force de frottement est régie par la loi d'Amontons-Coulomb (ch. IV, nº 1.1).

Solution. Dirigeons l'axe Ox parallèlement au plan incliné (fig. 13.9). La composante du poids normale au plan incliné est équilibrée par la composante normale N de la réaction. L'équation (13.20) s'écrira comme suit:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X = mg \sin \alpha - F_{fr}.$$

D'après les formules (4.1) et (4.2) on a

$$F_{fr} \leqslant fN = fmg \cos \alpha.$$

Si donc $mg \sin \alpha \leqslant fmg \cos \alpha$, c'est-à-dire si $\operatorname{tg} \alpha \leqslant f$, le point reste immobile ($X = 0$). Supposons que $\operatorname{tg} \alpha > f$. Alors

$$X = mg (\sin \alpha - f \cos \alpha) > 0,$$

si bien que le point commence à se déplacer avec une accélération constante (voir l'exemple précédent)

$$a = \frac{X}{m} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

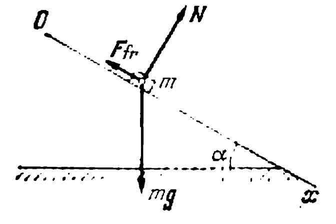


Fig. 13.9

3.2. Cas où la force ne dépend que de la vitesse. On rencontre généralement ces cas lorsque, en analysant le mouvement du point, on est obligé de tenir compte des forces résistantes. L'équation (13.20) s'écrit alors comme suit:

$$m \frac{dv}{dt} = X(v). \tag{13.24}$$

Pour réduire cette équation aux quadratures, on procède comme précédemment par séparation des variables:

$$m \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{X(v)} = \int_0^t dt.$$

Désignons le premier membre par $\varphi(v)$ et mettons l'intégrale première obtenue sous la forme

$$\varphi(v) = t. \tag{13.25}$$

Prenons la fonction réciproque $v = v(t)$ et portons-y l'expression de $v = dx/dt$; il vient

$$\frac{dx}{dt} = v(t).$$

Séparons de nouveau les variables et faisons l'intégration en reprenant comme précédemment les conditions initiales (13.21). L'équation horaire se présente comme suit:

$$x = x_0 + \int_0^t v(t)\, dt. \tag{13.26}$$

Remarquons que (13.24) permet de définir immédiatement x en fonction de v. Puisque

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v, \tag{13.27}$$

il découle de (13.24)

$$m \frac{v\, dv}{X(v)} = dx.$$

L'intégrale première s'écrira donc sous la forme

$$m \int_{v_0}^{v} \frac{v\, dv}{X(v)} = x - x_0. \tag{13.28}$$

Exemple 13.5. Dans les conditions de l'exemple 13.4, en plus du frottement coulombien, prendre en considération une force de frottement qui dépend linéairement de la vitesse avec un coefficient de proportionnalité km.

Solution. L'équation (13.20) prend la forme

$$m \frac{dv}{dt} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) - kmv$$

(on suppose que $\operatorname{tg}\alpha > f$, sinon le point demeure immobile). Désignons comme dans l'exemple 13.4

$$g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = a > 0.$$

L'équation différentielle du mouvement, après division par m et séparation des variables, s'écrira

$$\frac{dv}{a - kv} = dt.$$

Intégrons sous les conditions initiales $v(0) = 0$

$$\int_0^v \frac{dv}{a - kv} = \int_0^t dt.$$

L'intégrale première (13.25) s'écrira

$$-\frac{1}{k}\ln(a - kv)\Big|_0^v = t.$$

D'où

$$\ln \frac{a-kv}{a} = -kt$$

et

$$\frac{a-kv}{a} = e^{-kt},$$

c'est-à-dire

$$v = \frac{a}{k}\,(1-e^{-kt})$$

Puisque

$$\lim_{t\to\infty} e^{-kt} = 0,$$

on obtient

$$\lim_{t\to\infty} v = \frac{a}{k}, \qquad v\,(t) < v\,(\infty) = \frac{a}{k} \qquad (t>0).$$

D'après la formule (13.26), l'espace parcouru par le point mobile est égal à

$$x = \int_0^t \frac{a}{k}\,(1-e^{-kt})\,dt = \left(\frac{a}{k}\,t + \frac{a}{k^2}\,e^{-kt}\right)\Bigg|_0^t = \frac{a}{k}\,t - \frac{a}{k^2}\,(1-e^{-kt}).$$

Cette relation représente l'équation horaire du point en mouvement rectiligne sur le plan incliné dans le cas où la force de frottement est une fonction linéaire de la vitesse. Sans la force de frottement coulombienne, on aurait alors $f=0$, c'est-à-dire $a = g \sin \alpha$.

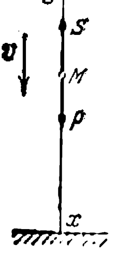


Fig. 13.10

Exemple 13.6. Un point matériel de masse m tombe dans l'air sans vitesse initiale. La résistance de l'air est $S = k^2mgv^2$, où v est la valeur algébrique de la vitesse, et k^2mg un coefficient de proportionnalité. On demande la vitesse du point au bout de t secondes après le commencement de la chute, ainsi que la vitesse limite pour $t \to \infty$.

Solution. L'origine des coordonnées sera confondue avec la position initiale du point, et la direction positive de l'axe Ox avec la direction du poids. Dans sa chute, le point sera sollicité par deux forces: le poids $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ dirigé verticalement vers le bas et la force résistante $\boldsymbol{S}$ dirigée verticalement vers le haut (fig. 13.10): en effet, la résistance est toujours dirigée à l'opposé du mouvement. L'équation (13.24) s'écrira alors

$$m\frac{dv}{dt} = mg - S.$$

En y portant la valeur $= k^2mgv^2$ et en divisant par m, on obtient

$$\frac{dv}{dt} = g\,(1-k^2v^2).$$

On sépare les variables et on fait l'intégration en se donnant la condition initiale $v\,(0) = 0$:

$$\int_0^v \frac{dv}{1-k^2v^2} = g\int_0^t dt.$$

L'intégrale du premier membre se trouvant dans les tables, il vient immédiatement

$$\frac{1}{2k}\ln\frac{1+kv}{1-kv}=gt.$$

On a donc une intégrale première du type (13.25), qui donne

$$\frac{1+kv}{1-kv}=e^{2kgt}.$$

Explicitons v:

$$v=\frac{1}{k}\,\frac{e^{kgt}-e^{-kgt}}{e^{kgt}+e^{-kgt}}=\frac{1}{k}\,\mathrm{th}\,(kgt)$$

(la fraction est une fonction appelée tangente hyperbolique). Passons à la limite pour $t \to \infty$ afin d'obtenir la valeur limite de la vitesse $v_{\lim}$:

$$v_{\lim}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{k}\,\frac{e^{kgt}-e^{-kgt}}{e^{kgt}+e^{-kgt}}=\frac{1}{k}.$$

Remarquons que pour définir l'abscisse du point tombant en fonction du temps, on doit intégrer d'après la formule (13.26). Par contre, si l'on veut connaître l'abscisse en fonction de la vitesse (ou la vitesse en fonction de l'espace parcouru), on fera l'intégration d'après la formule (13.28).

3.3. Cas où la force ne dépend que de la position du point mobile. En vertu de (13.27), l'équation (13.20) se laisse écrire sous la forme

$$mv\frac{dv}{dx}=X\,(x). \tag{13.29}$$

On peut alors séparer les variables et faire l'intégration sous les conditions initiales (13.21):

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv=\frac{1}{m}\int_{x_0}^{x} X\,(x)\,dx.$$

Désignons l'intégrale du second membre par $\psi\,(x)$ et mettons l'intégrale première obtenue sous la forme

$$\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}v_0^2=\psi\,(x),$$

c'est-à-dire

$$v=\sqrt{v_0^2+2\psi\,(x)}. \tag{13.30}$$

Puisque v est la valeur algébrique de la vitesse, le signe de la racine doit traduire le sens physique du problème. Par analogie aux cas traités dans les nos 3.1 et 3.2, on obtient l'équation du mouvement à partir de l'intégrale première en y portant l'expression $v = dx/dt$,

en séparant de nouveau les variables et en faisant l'intégration:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2+2\psi(x)}} = t.$$

La fonction réciproque nous fournit l'équation horaire:

$$x = x(t).$$

Exemple 13.7. Un point pesant M est lancé verticalement vers le haut, à partir de la surface de la Terre, avec une grande vitesse initiale v_0. Déterminer l'altitude atteinte par le point si la force d'attraction (newtonienne) varie en raison inverse du carré de la distance du point au centre de la Terre (on ne prend pas en considération la résistance de l'air).

Solution. L'axe Ox sera disposé comme il est montré sur la figure 13.11. Représentons le point sur la verticale, à un certain instant de sa montée, à une distance déterminée x du centre de la Terre; représentons aussi la force d'attraction $P(x)$ exercée sur le point. On a par définition

$$\frac{P(x)}{P(R)} = \frac{R^2}{x^2}, \tag{13.31}$$

où $P(R)$ est la force d'attraction à la surface de la Terre que nous prenons ici égale au poids *) mg. D'où

$$P(x) = \frac{mgR^2}{x^2}. \tag{13.32}$$

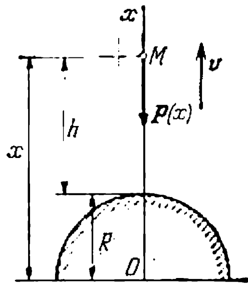


Fig. 13.11

Mettons maintenant l'équation différentielle du mouvement sous la forme (13.29):

$$mv\frac{dv}{dx} = -\frac{mgR^2}{x^2},$$

d'où il découle

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = -gR^2 \int_{R}^{x} \frac{dx}{x^2}.$$

Calculons les intégrales, il vient

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = gR^2 \left.\frac{1}{x}\right|_R^x = gR^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R}\right),$$

ce qui nous donne une intégrale première sous la forme (13.30):

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gR\left(1-\frac{R}{x}\right)}.$$

Annulant v, on obtient

$$x = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2}$$

et l'altitude h:

$$h = x - R = \frac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2}.$$

*) Voir l'expmele 16.4 dans le ch. XVI, n° 2.2.

Pour $v_0^2 \to 2gR$ l'altitude h tend vers l'infini. La valeur indiquée de la vitesse initiale,

$$v_0 = \sqrt{2gR},$$

s'appelle *vitesse de libération*, ou *deuxième vitesse cosmique*: c'est la vitesse que le point matériel pesant doit développer pour vaincre l'attraction terrestre. Calculons sa valeur numérique:

$$v_{\text{cosm}}^{\text{II}} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6} = 11\,170 \text{ m/s}. \qquad (13.33)$$

3.4. Cas où la force dépend de la vitesse et de la position du point mobile. Soit un point pesant qui tombe d'une altitude h sous l'action d'une force d'attraction $\boldsymbol{P}$ (voir l'exemple 13.7) et rencontre une résistance de l'air $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ proportionnelle au carré de la vitesse v du point et à la densité de l'air ρ, où ρ est une fonction monotone croissante de z $(0 \leqslant z \leqslant h)$ (fig. 13.12).

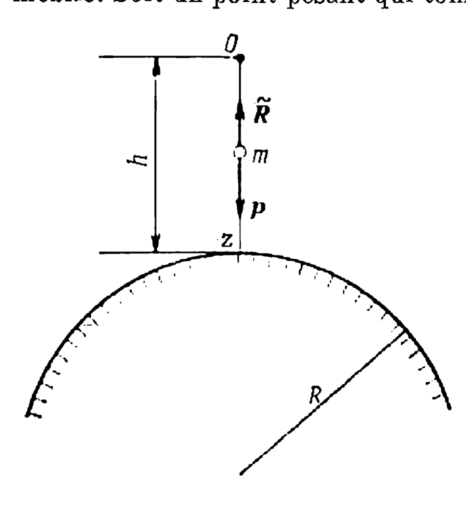


Fig. 13.12

Abstraction faite de la rotation diurne de la Terre (voir l'exemple 16.4), orientons l'axe Oz suivant la verticale vers le bas et prenons comme origine des coordonnées la position initiale du point. Mettons la force de résistance de l'air sous la forme

$$\widetilde{R} = -\varkappa m \rho(z)\, v^2/\rho(h),$$

où m est la masse du point et $\rho(h)$ la densité de l'air à la surface de la Terre; on a $\rho'(z) \geqslant 0$ quand $0 \leqslant z \leqslant h$. Après avoir divisé par m, on écrira l'équation différentielle du mouvement (13.20) sous la forme

$$\frac{dv}{dt} = \frac{gR^2}{(h+R-z)^2} - \varkappa \frac{\rho(z)}{\rho(h)} v^2 \qquad (0 \leqslant z \leqslant h) \qquad (13.34)$$

(R est le rayon de la Terre), avec les conditions initiales

$$z(0) = v(0) = 0. \qquad (13.35)$$

On a en vertu de (13.27)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dz} v = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dz};$$

multipliant (13.34) par 2, on obtient

$$\frac{dv^2}{dz} = \frac{2gR^2}{(h+R-z)^2} - 2\varkappa \frac{\rho(z)}{\rho(h)} \cdot v^2.$$

Ceci fait, on introduit des variables sans dimension, un paramètre et une fonction:

$$\zeta=\frac{1}{h}z, \quad \lambda=\frac{v^2}{2gh}, \quad \chi=\frac{h}{R}, \quad p(\zeta)=2\varkappa h\frac{\rho(h\zeta)}{\rho(h)} \qquad (13.36)$$

qui permettent de présenter l'équation (13.34) sous la forme

$$\frac{d\lambda}{d\zeta}+p(\zeta)\lambda=\frac{1}{[1+\chi(1-\zeta)]^2} \qquad (0\leqslant\zeta\leqslant1), \qquad (13.37)$$

avec la condition initiale

$$\lambda(0)=0 \qquad (13.38)$$

et sous les conditions

$$2\varkappa h\frac{\rho(0)}{\rho(h)}\leqslant p(\zeta)\leqslant 2\varkappa h, \quad p'(\zeta)\geqslant 0 \text{ pour } 0\leqslant\zeta\leqslant1.$$

L'équation (13.37) est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec un coefficient variable $p(\zeta)$. Pour la condition initiale (13.38), sa solution s'écrit

$$\lambda=e^{-\int_0^\zeta p(\xi)\,d\xi}\int_0^\zeta [1+\chi(1-\xi)]^{-2}e^{\int_0^\xi p(\eta)\,d\eta}\,d\xi.$$

Nous venons d'obtenir une intégrale première de (13.20). Pour définir la coordonnée z du point tombant en fonction du temps, on doit faire encore une intégration en conservant les notations introduites (13.36). Bien que le second problème de la dynamique du point soit résoluble dans le cas considéré par quadratures (c'est-à-dire par intégration), sa résolution efficace ne peut être faite que par calcul numérique des intégrales.

Exemple 13.8. (N. Kotchine*)). On considère que le point pesant tombe d'une altitude trop faible pour que la force d'attraction soit distincte du poids: cela revient à négliger, dans le second membre de (13.37), la quantité $\chi=h/R$ devant l'unité. On demande de montrer que la vitesse du point peut varier de deux façons différentes:

a) croître de façon monotone;

b) croître d'abord pour décroître ensuite de façon monotone suivant les variations de la densité de l'air ρ, où ρ est une fonction à valeurs croissantes.

Solution. Dans notre hypothèse l'équation (13.37) se réduit à

$$\frac{d\lambda}{d\zeta}=1-p(\zeta)\lambda \qquad (0\leqslant\zeta\leqslant1). \qquad (13.39)$$

Commençons par le cas a). La vitesse croît tant que dure la chute,

$$\frac{d\lambda}{d\zeta}=1-p(\zeta)\lambda>0, \quad \lambda=\frac{v^2}{2gh}<\frac{1}{p(\zeta)},$$

si bien que

$$v<\sqrt{\frac{2gh}{p(\zeta)}}. \qquad (13.40)$$

*) N. Kotchine, mécanicien soviétique (1900-1944).

17*

Ce cas se présente si l'on admet que la densité de l'air $\rho = \rho(h\zeta)$ est constante et égale à la densité de l'air $\rho(h)$ à la surface de la Terre (voir l'exemple 13.7). On a alors $p(\zeta) = 2\varkappa h$ et en vertu de l'inégalité (13.40)

$$v < \sqrt{\frac{g}{\varkappa}},$$

ce qui correspond aux conditions de l'exemple (13.7), puisque $\varkappa = gk^2$.

Envisageons à présent le cas b). Eliminant l'éventualité de $\rho(h\zeta) = \text{const}$, admettons que $p'(\zeta) > 0$ $(0 \leqslant \zeta \leqslant 1)$.

Quand le cas b) se présente, on a $\lambda'(\zeta^*) = 0$ pour une valeur de $\zeta = \zeta^*$. Ici λ passe par un maximum, car on a en vertu de (13.39)

$$\lambda''(\zeta^*) = -p(\zeta^*)\lambda'(\zeta^*) - p'(\zeta^*)\lambda(\zeta^*) = -p'(\zeta^*)\lambda(\zeta^*) < 0.$$

Ensuite (pour $\zeta^* \leqslant \zeta \leqslant 1$) on voit λ décroître, si bien que $\lambda'(\zeta) < 0$. Cette décroissance a lieu pendant toute la durée de la chute. En effet, $\lambda'(\zeta)$ ne peut s'annuler une seconde fois, sinon il existerait un $\tilde{\zeta}$ $(\zeta^* < \tilde{\zeta} < 1)$ tel que $\lambda'(\tilde{\zeta}) = 0$ et $\lambda''(\tilde{\zeta}) \geqslant 0$, puisque λ' cesse d'être négatif et devient positif. On a, d'autre part, comme précédemment

$$\lambda''(\tilde{\zeta}) = -p'(\tilde{\zeta})\lambda(\tilde{\zeta}) < 0,$$

d'où contradiction.

Il reste à montrer que le cas b) peut se présenter en réalité. Nous en laissons le soin au lecteur, en indiquant à son intention qu'il ferait bien de commencer par étudier la loi de variation linéaire de la densité.

Exercices

Exercice 13.1. Supposons que le point matériel soit sollicité uniquement par la pesanteur et que sa vitesse initiale v_0 soit dirigée suivant la verticale; orientons l'axe Oz verticalement vers le haut. Déterminer la loi du mouvement du point et définir les instants $\tilde{t}$ où le point occupe la position $z = 0$.

Réponse. $z = z_0 + v_0 t - 1/2\, gt^2$, où $z_0 = z(0)$;

si $z_0 > 0$, on a $\tilde{t} = \frac{1}{g}\left(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2z_0 g}\right)$;

si $z_0 \leqslant 0$ et $v_0^2 + 2z_0 g \geqslant 0$, on a $\tilde{t}_{1,2} = \frac{1}{g}\left(v_0 \mp \sqrt{v_0^2 + 2z_0 g}\right)$;

si $z_0 < 0$ et $v_0^2 + 2z_0 g < 0$, le point n'atteint jamais la position $z = 0$ (ici v_0 est la valeur algébrique de sa vitesse initiale).

Exercice 13.2. Un point matériel de masse 4 kg soumis à l'action d'une force de répulsion F s'éloigne d'un centre fixe en décrivant une droite avec une vitesse proportionnelle au carré de la distance r. Sachant qu'à l'origine des temps on a $r_0 = 2$ m et $v_0 = 3$ m/s, déterminer l'intensité de la force à l'instant initial.

Réponse. $F_0 = 36$ N.

Exercice 13.3. Désirant connaître la résistance du milieu en fonction de la vitesse, on propulse un corps de masse m par une force constante P et l'on obtient la loi du mouvement $s = bt^3$. Quelle est la force résistante ?

Réponse. $R = P - 2m\sqrt{3bv}$.

Exercice 13.4. S'éloignant d'un centre fixe O, le point matériel M de masse m se déplace sur un plan poli horizontal sous l'action d'une force de répulsion F dont l'intensité est proportionnelle à la distance au centre, $F = k^2 mx$. A l'instant initial le point occupait la position M_0 (fig. 13.13), à une distance a du centre fixe O, et avait une vitesse v_0 orientée vers la droite

le long de l'axe Ox. On demande de former l'équation horaire du mouvement de M.

Réponse. $x = \frac{1}{2} a\,(e^{kt} + e^{-kt}) + \frac{v_0}{2k}\,(e^{kt} - e^{-kt})$.

Exercice 13.5. Un point matériel libre de masse m, après avoir reçu une vitesse initiale v_0, se déplace sous l'action d'une force proportionnelle

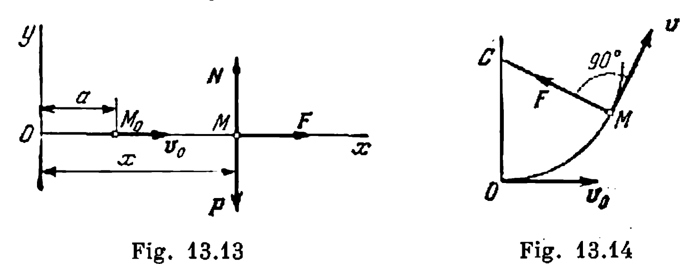


Fig. 13.13 Fig. 13.14

à la vitesse et dirigée perpendiculairement à celle-ci; le coefficient de proportionnalité est égal à km (fig. 13.14). Déterminer la trajectoire du point et l'équation horaire de son mouvement.

Indication. Appliquer les équations d'Euler (13.8).

Réponse. La trajectoire est une circonférence de rayon v_0/k dont le centre C est situé sur la perpendiculaire élevée au point mobile M, à la direction de la vitesse. L'équation horaire est $s = v_0 t$.

CHAPITRE XIV

MOUVEMENT OSCILLATOIRE RECTILIGNE DU POINT MATÉRIEL

§ 1. Oscillations harmoniques

Tous les mouvements oscillatoires présentent un trait particulier commun, à savoir: ce sont des mouvements qui se renouvellent à des intervalles déterminés. Quand on étudie un mouvement qui ne se reproduit pas, on s'attache surtout à déterminer la position du point matériel, ainsi que sa vitesse et accélération, à tel ou tel instant. Par contre, la théorie des oscillations analyse le processus de mouvement dans son ensemble. Plus que l'état du corps à l'instant donné, on veut connaître les grandeurs qui caractérisent la répétition du mouvement, et plus exactement:

a) l'équation suivant laquelle le mouvement se renouvelle;

b) le temps au bout duquel le corps reprend sa position ancienne avec la même direction de mouvement (la période d'oscillation);

c) l'écart maximal de la position d'équilibre.

1.1. Equation différentielle des oscillations harmoniques. Considérons un point matériel M de masse m qui effectue un mouvement horizontal rectiligne sur un plan poli fixe sous l'action de la force élastique d'un ressort. Plaçons l'origine des coordonnées O dans la position d'équilibre du point et orientons l'axe Ox par exemple vers la droite suivant l'axe du ressort (fig. 14.1). Soit M une des positions occupées par le point dans son mouvement.

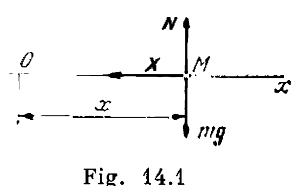


Fig. 14.1

Notons que l'écart initial et la vitesse initiale du point sont dirigés le long de l'axe du ressort, sinon le mouvement ne sera pas rectiligne. Le point M est sollicité par trois forces: son poids mg, la réaction N du plan poli et la force élastique X du ressort. Comme il n'y a pas de déplacement vertical, les deux premières forces se font équilibre, $N = mg$. Supposons que la force élastique soit conforme à la loi de Hooke, c'est-à-dire que sa valeur algébrique *) soit proportionnelle à la

*) Rappelons qu'en analysant le mouvement rectiligne, on utilise toujours les valeurs algébriques de la force, de la vitesse et de l'accélération (voir ch. XIII, § 3).

déformation (allongement ou compression) du ressort:

$$X = -cx. \tag{14.1}$$

Le signe négatif veut dire que la force élastique du ressort allongé ($x > 0$) est orientée dans le sens négatif de l'axe Ox ($X < 0$); la compression du ressort provoque l'effet contraire. Le coefficient de proportionnalité $c > 0$, mesuré en N/m, est appelé la *raideur du ressort*. Posons dans (14.1) $x = 1$ m, alors c est égal en module à X, ce qui signifie que la raideur du ressort est numériquement égale à la force qui provoque la déformation (allongement ou compression) du ressort égale à l'unité de longueur. Il s'ensuit de (14.1) que

$$c = \left|\frac{X}{x}\right|. \tag{14.2}$$

Passons à la decription du mouvement. Supposons que le point M s'est écarté initialement vers la droite à partir de sa position d'équilibre sans recevoir aucune vitesse initiale. Sous l'action de la force élastique dirigée de droite à gauche, le point commence à se déplacer d'un mouvement accéléré vers la gauche. Revenu en sa position d'équilibre, le point ne s'arrête pas, bien qu'il y ait en ce moment $X = 0$: grâce à la vitesse acquise, le point M continue à se déplacer vers la gauche mais, cette fois, d'un mouvement retardé (car la force élastique X change de sens), jusqu'à ce que sa vitesse redevienne nulle. Le mouvement reprend ensuite, mais en sens inverse.

Les oscillations du point dues uniquement à une force de rappel élastique sont appelées *oscillations libres*, ou *propres*. Remarquons que X peut être une force de nature quelconque, à condition qu'elle attire le point vers le centre fixe O et que son intensité soit proportionnelle à la distance.

L'équation différentielle (13.20), dans le cas du mouvement oscillatoire rectiligne, s'écrira en vertu de (14.1) comme suit:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx.$$

Faisons passer $-cx$ dans le premier membre et divisons par m:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \left(\omega^2 = \frac{c}{m}\right). \tag{14.3}$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

n'admet que des racines imaginaires pures: $\lambda = \pm i\omega$ ($i^2 = -1$). La solution générale de (14.3) s'écrira soit comme $x = c_1 \cos \omega t +$

$+ c_2 \sin \omega t$, soit sous forme équivalente:

$$x = a \cos (\omega t - \varphi_0), \qquad (14.4)$$

où $a > 0$ et φ_0 sont des constantes arbitraires. L'équation du mouvement (14.4) montre que le mouvement du point est régi par la loi du cosinus. C'est la raison pour laquelle les oscillations libres (propres) examinées du point sont dites *harmoniques*.

Puisque les valeurs de $\cos (\omega t - \varphi_0)$ se répètent chaque fois que l'argument varie de 2π ($\omega T = 2\pi$), la *période d'oscillation* T est égale, en vertu de (14.3), à

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \qquad (14.5)$$

La période des oscillations harmoniques ne dépend pas des conditions initiales: cette propriété s'appelle *isochronisme*. Quel que soit l'écart du point de sa position d'équilibre et quelle que soit la vitesse initiale du point, le temps au bout duquel ce point revient au centre O reste le même.

Le nombre d'oscillations par seconde $\nu = 1/T$ s'appelle *fréquence d'oscillation*; l'unité de fréquence, égale à c^{-1} (une oscillation par seconde), s'appelle le *hertz*. La grandeur ω égale au nombre d'oscillations pendant 2π secondes s'appelle *pulsation*, ou *fréquence circulaire*.

Donnons une interprétation mécanique aux constantes arbitraires. La quantité positive a (écart maximal x d'un point de sa position d'équilibre) s'appelle *amplitude d'oscillation*. La fonction du temps, $\omega t - \varphi_0$, est la *phase d'oscillation*, et la constante φ_0, la *phase initiale*. Les quantités a et φ_0 sont des constantes arbitraires quand il s'agit de la solution générale de (14.3). Pour chaque oscillation harmonique elles prennent pourtant des valeurs bien déterminées en fonction des conditions initiales. On pose par exemple que pour $t = 0$ on a

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = v_0. \qquad (14.6)$$

1.2. Détermination de l'amplitude et de la phase initiale à partir des conditions initiales. Proposons-nous de déterminer a et φ_0. Par dérivation de (14.4), on obtient l'expression de la vitesse du point oscillant à un instant quelconque:

$$\dot{x} = -a\omega \sin (\omega t - \varphi_0). \qquad (14.7)$$

Posant $t = 0$ dans (14.4) et (14.7) et faisant intervenir les conditions initiales (14.6), on obtient deux équations qui définissent l'amplitude et la phase initiale:

$$x_0 = a \cos \varphi_0, \qquad \frac{v_0}{\omega} = a \sin \varphi_0.$$

Elevons au carré les deux équations et faisons leur somme. Il vient

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = a^2,$$

car $\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 = 1$. Divisons ensuite la première équation par la seconde:

$$\operatorname{cotg} \varphi_0 = \frac{\omega x_0}{v_0}.$$

Ainsi donc, on peut déduire l'amplitude et la phase initiale des oscillations à partir des conditions initiales en appliquant les formules

$$a = +\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \operatorname{cotg} \varphi_0 = \frac{\omega x_0}{v_0} \quad (14.8)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \leqslant \varphi_0 \leqslant \pi & \text{si } v_0 \geqslant 0; \\ \pi < \varphi_0 < 2\pi & \text{si } v_0 < 0 \end{pmatrix}.$$

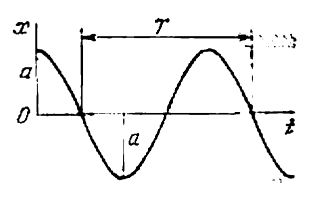


Fig. 14.2

En particulier, si $v_0 = 0$, il ressort des formules (14.8) que $a = |x_0|$, $\operatorname{cotg} \varphi_0 = \pm \infty$ (le signe positif correspond à $x_0 > 0$, le signe négatif à $x_0 < 0$). On a donc pour $v_0 = 0$ et $x_0 > 0$

$$a = x_0, \qquad \varphi_0 = 0,$$

égalités qui permettent de déterminer, à l'aide de (14.4), la loi du mouvement sous la forme

$$x = x_0 \cos \omega t. \qquad (14.9)$$

La courbe représentative des oscillations pour $x_0 > 0$ et $v_0 = 0$ est donnée sur la figure 14.2.

Pour $v_0 = 0$ et $x_0 < 0$, on a

$$a = -x_0, \qquad \varphi_0 = \pi,$$

et l'équation du mouvement (14.4) s'écrira encore sous la forme (14.9):

$$x = -x_0 \cos(\omega t - \pi) = x_0 \cos \omega t.$$

1.3. Oscillations d'un solide suspendu à un ressort. Considérons à présent une masselotte M de masse m qui effectue des oscillations, étant suspendue à un ressort de raideur c. Soit B (fig. 14.3) la position occupée par l'extrémité inférieure du ressort non déformé dont l'extrémité supérieure est fixée en A. Après avoir suspendu et laissé descendre bien lentement (« statiquement ») la masselotte, l'extrémité inférieure du ressort occupera une position d'équilibre O. Nous l'adopterons comme origine des coordonnées et orienterons l'axe Ox verticalement vers le bas. Le segment BO s'appelle *allongement statique* λ_{st} *du ressort*. Puisque la force élastique du ressort, due à

la déformation, est égale en état d'équilibre au poids de la masselotte, $X = mg$, il ressort de (14.2) que

$$\lambda_{st} = \frac{mg}{c}. \tag{14.10}$$

En tirant verticalement, amenons la masselotte M à une distance de O, puis lâchons-la : nous constatons qu'elle prend, le long de l'axe orienté Ox et de part et d'autre de O, un mouvement oscillatoire. Examinons la position occupée par M à un instant donné t. Le point M est sollicité par son poids mg et la force élastique du ressort $X = -c(x + \lambda_{st})$, car l'allongement du ressort $BM = BO + OM = \lambda_{st} + x$. L'équation différentielle (13.20) s'écrira sous la forme

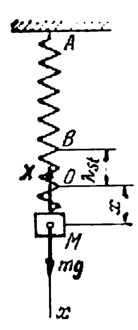


Fig. 14.3

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - c(x + \lambda_{st}) = -cx,$$

car $mg = c\lambda_{st}$ en vertu de (14.10). Divisant par m, on obtient

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \left(\omega^2 = \frac{c}{m}\right).$$

Ce n'est autre que l'équation différentielle (14.3) des oscillations harmoniques horizontales. Nous voyons maintenant pourquoi l'origine des coordonnées a été choisie en position d'équilibre statique et non à l'extrémité libre du ressort : cela permet de réduire l'analyse des oscillations harmoniques verticales au cas des oscillations horizontales. Puisqu'on a en vertu de (14.10)

$$\omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{g}{\lambda_{st}}, \tag{14.11}$$

la formule (14.5) définissant la période d'oscillation T se laisse écrire comme suit :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda_{st}}{g}}. \tag{14.12}$$

Les formules (14.4) et (14.7) à (14.9) restent inchangées.

Exemple 14.1. Supposons qu'on abandonne brusquement la masselotte suspendue en B (fig. 14.3). On demande de savoir l'élongation maximale λ_{dyn} de la masselotte, l'allongement statique λ_{st} du ressort étant connu.

Solution. Plaçons l'origine des coordonnées en O. Les conditions initiales pour $t = 0$ sont alors

$$x(0) = x_0 = -\lambda_{st}, \qquad \dot{x}(0) = v_0 = 0.$$

Conformément à la formule (14.9), l'équation des oscillations harmoniques sera

$$x = -\lambda_{st}\cos\omega t.$$

Substituons la valeur de ω tirée de la formule (14.11). Il vient

$$x = -\lambda_{st} \cos \sqrt{\frac{g}{\lambda_{st}}}\, t.$$

La valeur maximale de x sera atteinte pour

$$\cos \sqrt{\frac{g}{\lambda_{st}}}\, t = -1,$$

c'est-à-dire chaque fois qu'on aura $t = \frac{1}{2}T,\ \frac{3}{2}T,\ \frac{5}{2}T$, etc. Il en résulte que

$$x_{max} = \lambda_{st}.$$

L'élongation maximale λ_{dyn} de la masselotte de sa position initiale B est

$$\lambda_{dyn} = x_{max} + OB = \lambda_{st} + \lambda_{st} = 2\lambda_{st}. \quad (14.13)$$

Les élèves ingénieurs auront tout intérêt à apprendre par cœur cette formule bien simple qui leur sera d'une grande utilité.

E x e m p l e 14.2. Une masselotte M de poids P est attachée à deux ressorts assemblés bout à bout, de raideurs c_1 et c_2 (fig. 14.4). Déterminer la période T des oscillations propres de M.

S o l u t i o n. La force P provoque l'allongement des deux ressorts. En position d'équilibre statique de M les allongements des ressorts sont respectivement

$$\lambda_{st}^{(1)} = \frac{P}{c_1} \quad \text{et} \quad \lambda_{st}^{(2)} = \frac{P}{c_2}.$$

L'allongement total est

$$\lambda_{st} = \lambda_{st}^{(1)} + \lambda_{st}^{(2)} = \frac{P}{c_1} + \frac{P}{c_2} = P\,\frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2}. \quad (1)$$

D'autre part, on peut admettre que l'allongement λ_{st} se rapporte à un ressort unique de raideur $c_{réd}$:

$$\lambda_{st} = \frac{P}{c_{réd}}, \quad (2)$$

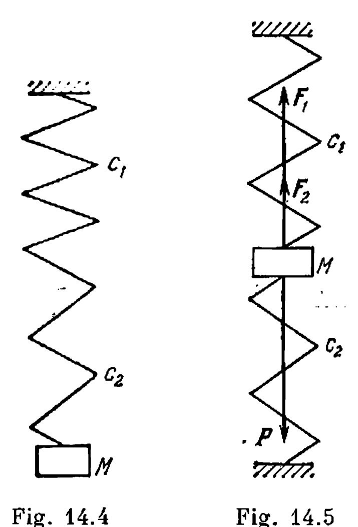


Fig. 14.4 Fig. 14.5

où $c_{réd}$ est la *raideur réduite* des ressorts. Egalant les seconds membres des égalités (1) et (2), on obtient

$$c_{réd} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}.$$

La période des oscillations propres de la masselotte M se laisse définir par la formule (14.5) dans laquelle $m = P/g$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{P}{g c_{réd}}} = 2\pi \sqrt{\frac{P(c_1 + c_2)}{g c_1 c_2}}.$$

E x e m p l e 14.3. Résoudre le problème précédent en plaçant la masselotte entre les mêmes ressorts (fig. 14.5).

S o l u t i o n. Supposons qu'en position d'équilibre statique de la masselotte M, l'allongement du ressort supérieur est égal à λ; le ressort inférieur sera alors comprimé d'autant. En position d'équilibre statique le poids P de M sera donc équilibré par les forces élastiques F_1, F_2 des ressorts (fig. 14.5), en sorte que

$$P = c_1\lambda + c_2\lambda. \quad (3)$$

D'autre part, on peut poser en remplaçant deux ressorts par un seul:

$$P = c_{\text{réd}}\lambda, \quad (4)$$

où $c_{\text{réd}}$ est la raideur réduite des ressorts. Egalant les seconds membres des égalités (3) et (4), on trouve

$$c_{\text{réd}} = c_1 + c_2.$$

La période des oscillations propres de la masselotte M se définira par la formule (14.5) en mettant $m = P/g$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{P}{g c_{\text{réd}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{P}{g(c_1 + c_2)}}.$$

§ 2. Oscillations amorties

2.1. Equation différentielle des oscillations amorties. En analysant les oscillations harmoniques propres, on suppose que le point ne subit qu'une force unique: la force de rappel $X = -cx$ qui rétablit l'équilibre. Or, dans la pratique, toute oscillation du point matériel s'évanouit, ou s'amortit, à moins d'être entretenue par une action extérieure. L'amortissement est causé par les forces qui s'opposent au mouvement: la résistance du milieu, le frottement, etc.

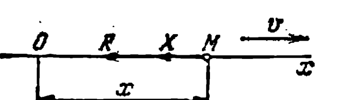


Fig. 14.6

Soit un point matériel M de masse m qui effectue un mouvement rectiligne sous l'action de la force de rappel

$$X = -cx$$

qui attire le point à sa position d'équilibre O et dont le module est proportionnel à la distance $OM = x$; supposons que le point M éprouve en outre l'action d'une force résistante R orientée dans le sens inverse du mouvement (fig. 14.6). La force de rappel peut être matérialisée par un ressort de raideur c qui agit conformément à la loi de Hooke (voir n° 1). Quant à l'intensité de R, qui peut varier suivant la nature physique de la force, elle est toujours fonction de la vitesse du point. Nous supposerons donc que la force résistante varie de façon linéaire, c'est-à-dire proportionnellement à la valeur algébrique de la vitesse $v = dx/dt$:

$$R = -bv$$

(b est le coefficient de résistance).

L'équation différentielle (13.20) s'écrira sous la forme

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - b\frac{dx}{dt}.$$

Faisant passer tous les termes dans le premier membre et divisant par m, on obtient

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \left(2\beta = \frac{b}{m}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}\right). \qquad (14.14)$$

L'équation caractéristique de (14.14) est

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega^2 = 0;$$

elle admet comme racines

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}.$$

Bornons-nous à considérer le cas où $\beta^2 < \omega^2$, afin d'exclure des coefficients de résistance trop élevés, et introduisons la notation *)

$$k^2 = \omega^2 - \beta^2 > 0. \qquad (14.15)$$

Les racines s'écrivent alors

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm ki \qquad (i^2 = -1),$$

et la solution générale de l'équation différentielle se laisse mettre sous la forme

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(kt - \varphi_0), \qquad (14.16)$$

où $a_0 > 0$ et φ_0 sont des constantes arbitraires déterminées à partir des conditions initiales pour chaque mouvement oscillatoire concret.

2.2. Propriétés des oscillations amorties.

1° La période d'oscillation est égale à

$$T' = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}, \qquad (14.17)$$

où k est la pulsation des oscillations amorties. La période constante T' (indépendante des conditions initiales) est plus grande que la période des oscillations harmoniques $T = 2\pi/\omega$ d'un point de même masse soumis à une même force de rappel $X = -cx$ mais évoluant dans un milieu de résistance nulle:

$$T' > T.$$

La *résistance* du milieu a donc pour effet de *faire croître la période d'oscillation* (ou de réduire la pulsation, ce qui revient au même).

2° La valeur instantanée de l'amplitude des oscillations

$$A(t) = a_0 e^{-\beta t}$$

*) L'inégalité (14.15) est une condition nécessaire du mouvement oscillatoire. Si elle n'est pas vérifiée ($\beta^2 \geqslant \omega^2$), le mouvement sera apériodique.

est une quantité variable, qui tend asymptotiquement vers zéro pour $t \to \infty$ (d'où l'appellation: oscillations amorties). On a à l'instant initial $t = 0$

$$A(0) = a_0,$$

et en fin de la première alternance (demi-période)

$$A\left(\frac{1}{2}T'\right) = a_0 e^{-\frac{1}{2}\beta T'}.$$

Le rapport des amplitudes au début et en fin de l'alternance,

$$\frac{A(0)}{A\left(\frac{1}{2}T'\right)} = e^{\frac{1}{2}\beta T'},$$

s'appelle *décrément d'amplitude*. Il sert à évaluer la diminution de l'amplitude des oscillations au bout de chaque alternance. Le logarithme naturel du décrément d'amplitude, c'est-à-dire la quantité

$$\Delta = \ln e^{\frac{1}{2}\beta T'} = \frac{1}{2}\beta T', \tag{14.18}$$

est le *décrément logarithmique*. Il peut aussi être déduit par observation directe, en mesurant les amplitudes A_n, A_{n+1} de deux alternances consécutives (fig. 14.7):

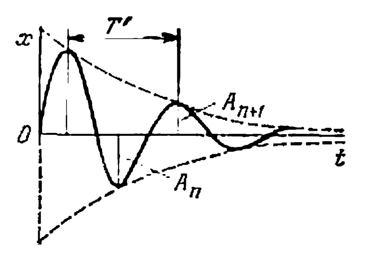


Fig. 14.7

$$\Delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{1}{2}\beta T',$$

puisque la quantité

$$\ln \left| \frac{x(t)}{x\left(t + \frac{1}{2}T'\right)} \right|$$

reste égale à Δ, quel que soit l'instant considéré t.

Connaissant Δ et la pulsation des oscillations non amorties ω, on peut déterminer le coefficient de résistance réduit β. Portons dans la dernière égalité la valeur de T' tirée de (14.17). Il vient

$$\Delta = \frac{\pi\beta}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}},$$

d'où

$$\Delta^2\omega^2 = (\pi^2 + \Delta^2)\,\beta^2$$

et finalement

$$\beta = \frac{\omega\Delta}{\sqrt{\pi^2 + \Delta^2}}. \tag{14.19}$$

Remplaçant β et ω par leurs valeurs tirées de (14.14), on obtient pour le coefficient de résistance b:

$$b=\frac{2\sqrt{cm}}{\sqrt{\pi^2+\Delta^2}}\,\Delta. \qquad (14.19')$$

On voit sur la figure 14.7 un exemple de courbe représentative des oscillations amorties.

3° Définition de l'amplitude initiale a_0 et de la phase initiale φ_0 à partir des conditions initiales. La dérivation de (14.16) donne l'expression de la vitesse du point animé d'oscillations amorties:

$$\dot{x} = -a_0\beta e^{-\beta t}\cos(kt-\varphi_0) - a_0 k e^{-\beta t}\sin(kt-\varphi_0). \qquad (14.20)$$

Posant $t=0$ dans (14.16) et (14.20), on a sous les conditions initiales (14.6)

$$x_0 = a_0\cos\varphi_0,\quad v_0 = -a_0\beta\cos\varphi_0 + a_0 k\sin\varphi_0,$$

ou

$$a_0\cos\varphi_0 = x_0,\quad a_0\sin\varphi_0=\frac{1}{k}(v_0+\beta x_0).$$

Ces équations seront résolues par analogie au n° 1.2. Il vient

$$a_0=+\sqrt{x_0^2+\frac{1}{k^2}(v_0+\beta x_0)^2},\qquad \operatorname{cotg}\varphi_0=\frac{kx_0}{v_0+\beta x_0}$$
$$\left(\begin{array}{ll} 0\leqslant\varphi_0\leqslant\pi & \text{si } v_0+\beta x_0\geqslant 0\,; \\ \pi<\varphi_0<2\pi & \text{si } v_0+\beta x_0<0 \end{array}\right). \qquad (14.21)$$

Pour $\beta=0$ on a $k=\omega$ en vertu de (14.15); les formules (14.21) se réduisent à (14.8). Cela est normal, car la condition $\beta=0$ veut dire que l'amortissement est inexistant ($b=0$) et les oscillations deviennent harmoniques.

Exemple 14.4. Un cylindre de poids P, de rayon r et de longueur h est suspendu à un ressort dont l'extrémité supérieure est fixe. La raideur du ressort est c. Le cylindre est plongé dans un liquide de poids spécifique γ; il y est immergé à mi-hauteur en état d'équilibre statique. A l'instant initial le cylindre a été immergé de $^2/_3$ de sa hauteur et abandonné sans vitesse initiale. Former l'équation du mouvement du cylindre si la résistance du liquide est égale à $R=-bv$. Déterminer la condition pour que le mouvement du cylindre soit oscillatoire (fig. 14.8).

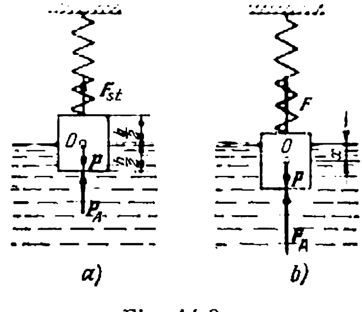


Fig. 14.8

Solution. En position d'équilibre statique le poids P du cylindre est équilibré par la force élastique du ressort $F_{st}=c\lambda_{st}$ et la force archimédienne $P_A=\frac{1}{2}\pi r^2 h\gamma$ orientée verticalement vers le haut (fig. 14.8, a), si bien que

$$P=\frac{1}{2}\pi r^2 h\gamma + c\lambda_{st}. \qquad (14.22)$$

Considérons la position du cylindre à un instant t où le centre O du cylindre s'écarte, en sens vertical, d'une distance x de la position d'équilibre statique adoptée comme origine (fig. 14.8, b). Le cylindre sera sollicité par son poids P, la force élastique du ressort $F = c(\lambda_{st} + x)$, la force archimédienne $P_A = \pi r^2 (h/2 + x)\gamma$ et la résistance $R = -b\dot{x}$. L'équation différentielle du mouvement du cylindre s'écrira comme suit:

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = P - \pi r^2 \left(\frac{h}{2} + x\right)\gamma - c(\lambda_{st} + x) - b\dot{x}.$$

Faisant intervenir l'égalité (14.22), on obtient

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = -(c + \pi r^2 \gamma)\,x - b\dot{x}.$$

Divisant par P/g et introduisant les notations

$$\omega_0^2 = \frac{c + \pi r^2 \gamma}{P}\,g, \quad 2\beta = \frac{gb}{P}, \tag{14.23}$$

on obtient l'équation différentielle des oscillations amorties (14.14):

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Pour que le mouvement du cylindre soit oscillatoire, il est nécessaire que soit réalisée la condition (14.15), c'est-à-dire l'inégalité

$$k^2 = \frac{c + \pi r^2 \gamma}{P}\,g - \frac{1}{4}\left(\frac{gb}{P}\right)^2 > 0$$

que nous supposerons vérifiée. Les conditions initiales sont

$$x(0) = \frac{1}{2}h - \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}h, \quad \dot{x}(0) = v_0 = 0.$$

Les formules (14.21) nous donneront l'amplitude et la phase initiales:

$$a_0 = x_0\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{k^2}} = \frac{h\omega_0}{6\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arc\,cotg}\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{\beta},$$

et la solution (14.16) s'écrira comme suit:

$$x = \frac{h\omega_0}{6\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}\,e^{-\beta t}\cos\left[\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t - \operatorname{arc\,cotg}\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{\beta}\right],$$

où ω_0^2 et β se définissent par les formules (14.23).

Exemple 14.5. Un corps est suspendu à un ressort. Quand la résistance est nulle, il oscille avec une période $T = 0{,}2\,\pi$ s, et quand la résistance est proportionnelle à la première puissance de la vitesse, il oscille avec une période $T' = 0{,}25\,\pi$ s. Chercher l'équation des oscillations amorties du corps, sachant qu'à l'instant initial on a donné au ressort un allongement de 0,06 m avant d'abandonner le corps.

Solution. La pulsation ω des oscillations propres est égale, d'après (14.5), à

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}2\pi} = 10\ \text{s}^{-1}.$$

Cherchons le coefficient β à l'aide de la formule (14.17)

$$0{,}25\pi = \frac{2\pi}{\sqrt{100-\beta^2}}, \quad \beta = 6\ \text{s}^{-1},$$

puis cherhons k à l'aide de (14.15):

$$k = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} = 8\ \text{s}^{-1}.$$

La solution générale (14.16) pour les oscillations amorties s'écrira en l'occurrence

$$x = a_0 e^{-6t} \cos (8t - \varphi_0). \qquad (1)$$

L'amplitude initiale a_0 et la phase initiale φ_0 se définissent à partir des conditions initiales $x_0 = 0{,}06$ m, $v_0 = 0$ à l'aide des formules (14.21):

$$a_0 = \sqrt{0{,}06^2 + \frac{36}{64} 0{,}06^2} = 0{,}075\ \text{m}, \quad \varphi_0 = \text{arc cotg}\,\frac{8}{6} = 0{,}643.$$

Portant les valeurs calculées dans (1), on obtient l'équation du mouvement oscillatoire:

$$x = 0{,}075\ e^{-6t} \cos (8t - 0{,}643).$$

§ 3. Oscillations forcées

3.1. Oscillations forcées en l'absence de la résistance. Supposons que le point matériel M de masse m effectue un mouvement rectiligne sous l'action de deux forces appliquées: une force de rappel $X = -cx$ et une *force perturbatrice* F (fig. 14.9) dont la valeur algébrique est une fonction périodique du temps t. Par exemple,

$$F = H \cos (pt - \psi_0).$$

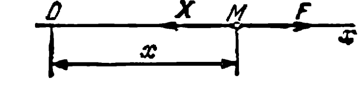


Fig. 14.9

Ici $H > 0$ est l'amplitude, p la pulsation, ψ_0 la phase initiale de la force perturbatrice. La période de variation de la force perturbatrice F est

$$\tau = \frac{2\pi}{p}. \qquad (14.24)$$

L'équation différentielle (13.20) s'écrira alors

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx + H \cos (pt - \psi_0),$$

ou sous forme équivalente

$$\ddot{x} + \omega^2 x = h \cos (pt - \psi_0) \qquad \left(\omega^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{H}{m}\right). \quad (14.25)$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Sa solution générale est égale à la somme de l'une de ses solutions particulières et de la solution générale x_1 de l'équa-

tion homogène associée

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0.$$

La solution générale x_1 est de la forme (14.4):

$$x_1 = a_1 \cos(\omega t - \varphi_1).$$

La solution particulière x_2 de (14.25) peut être cherchée sous la forme

$$x_2 = B \cos(pt - \psi_0).$$

Calculons la dérivée seconde de x_2 et portons sa valeur dans (14.25). On aboutit à l'identité

$$-p^2 B \cos(pt - \psi_0) + \omega^2 \cos(pt - \psi_0) = h \cos(pt - \psi_0).$$

Si donc $p \neq \omega$, il vient

$$B = \frac{h}{\omega^2 - p^2}, \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{h}{\omega^2 - p^2} \cos(pt - \psi_0). \tag{14.26}$$

Ainsi donc, la solution générale de (14.25) s'écrira définitivement pour $p \neq \omega$ comme suit:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega t - \varphi_1) + \frac{h}{\omega^2 - p^2} \cos(pt - \psi_0). \tag{14.27}$$

Donnons à cette solution une interprétation mécanique. Le mouvement du point M se compose de deux mouvements oscillatoires: oscillations x_1 de pulsation égale à celle des oscillations harmoniques propres, et *oscillations forcées* x_2 de pulsation égale à celle de la force perturbatrice. Il est à noter que les conditions initiales, c'est-à-dire la position et la vitesse du point M à l'instant initial, exercent une influence sur l'amplitude a_1 et la phase initiale φ_1 des oscillations x_1 mais n'affectent aucunement les oscillations forcées x_2. Il ressort de la formule (14.27) que l'amplitude et la phase initiale des oscillations x_1, dont la pulsation est celle des oscillations propres, dépendent non seulement des conditions initiales mais aussi des paramètres h, p, ψ_0 caractérisant la force perturbatrice.

Nous décrirons maintenant les propriétés des oscillations forcées.

La pulsation des oscillations forcées est égale à p, donc à celle de la force perturbatrice $\boldsymbol{F}$. De ce fait, la période τ des oscillations forcées se définit, elle aussi, par la formule (14.24). Pour $p < \omega$, c'est-à-dire dans le cas des oscillations forcées de *faible pulsation*, leur amplitude A_f est égale à

$$A_f = \frac{h}{\omega^2 - p^2} \tag{14.28}$$

et l'équation des oscillations forcées s'écrit comme suit:

$$x_2 = \frac{h}{\omega^2 - p^2} \cos(pt - \psi_0). \tag{14.28a}$$

Par conséquent, pour $p < \omega$ les oscillations forcées et la force perturbatrice se trouvent toujours en phase: autrement dit, les valeurs algébriques de la force F et de l'élongation x_2 sont toujours de même signe.

Pour $p > \omega$, c'est-à-dire quand les oscillations forcées ont une *pulsation élevée*, leur amplitude est

$$A_f = \frac{h}{p^2 - \omega^2} \tag{14.29}$$

et l'équation des oscillations forcées s'écrit

$$x_2 = \frac{h}{p^2 - \omega^2} \cos(pt - \psi_0 - \pi),$$

ce qui est de toute évidence identique à (14.26). Dans le cas considéré les oscillations forcées et la force perturbatrice sont en opposition de phase, ce qui veut dire que les valeurs algébriques de la force F et de l'élongation x_2 sont toujours de signes opposés.

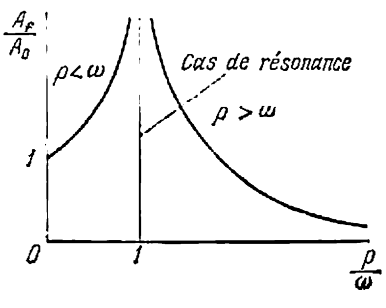


Fig. 14.10

Il ressort des formules (14.28) et (14.29) que l'amplitude des oscillations forcées ne dépend pas seulement de l'amplitude réduite $h = H/m$ de la force perturbatrice mais aussi (quand la pulsation ω des oscillations propres est fixée) de la pulsation p de cette force. Portons en abscisses le rapport p/ω et en ordonnées le rapport A_f/A_0, où $A_0 = h/\omega$ est la valeur limite de l'amplitude des oscillations forcées pour $p \to 0$: nous obtenons la courbe représentative de la fonction

$$\frac{A_f}{A_0} = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right|}$$

(voir fig. 14.10). Cette courbe montre que pour $0 < p/\omega < 1$ on a $1 < A_f/A_0 < \infty$ et pour $1 < p/\omega < \infty$ on a $\infty > A_f/A_0 > 0$. Autrement dit, quand la pulsation p de la force perturbatrice augmente, l'amplitude des oscillations forcées croît de façon monotone à partir de la valeur

$$A_0 = \frac{h}{\omega^2} = \frac{H}{c}$$

pour devenir infiniment grande quand p est voisin de ω, c'est-à-dire de la pulsation des oscillations propres. Si p continue à croître au-delà de cette valeur, l'amplitude des oscillations forcées décroît de façon monotone en tendant vers zéro.

3.2. La résonance *). Si la pulsation de la force perturbatrice coïncide avec celle des oscillations propres, on observe un phénomène appelé *résonance*. La formule (14.26) fait alors défaut, si bien qu'on est obligé de chercher la solution particulière x_2 de l'équation (14.25) pour $p = \omega$ sous la forme

$$x_2 = Dt \sin(\omega t - \psi_0).$$

Calculons les dérivées

$$\dot{x}_2 = D \sin(\omega t - \psi_0) + \omega Dt \cos(\omega t - \psi_0),$$
$$\ddot{x}_2 = 2\omega D \cos(\omega t - \psi_0) - \omega^2 Dt \sin(\omega t - \psi_0)$$

et portons-les dans (14.25) (pour $p = \omega$). Après réduction des termes semblables, il reste

$$2\omega D \cos(\omega t - \psi_0) = h \cos(\omega t - \psi_0),$$

d'où

$$D = \frac{h}{2\omega}.$$

En cas de résonance, l'équation des oscillations forcées s'écrit donc

$$x_2 = \frac{h}{2\omega} t \sin(\omega t - \psi_0). \qquad (14.30)$$

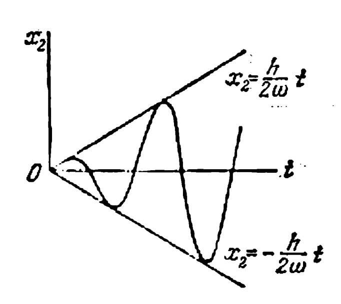


Fig. 14.11

La courbe représentative des oscillations forcées x_2 est montrée sur la figure 14.11.

En analysant la formule (14.30) et la figure 14.11, on s'assure qu'en cas de résonance l'amplitude des oscillations forcées $ht/(2\omega)$ croît indéfiniment dans le temps de façon linéaire **), c'est-à-dire proportionnellement à t.

Remarquons qu'il est pratiquement impossible d'assurer une coïncidence rigoureuse des pulsations de la force perturbatrice et des oscillations propres, ainsi que d'éliminer la résistance. On entend par

---

*) En plus de la résonance «ordinaire» étudiée ici, il convient d'indiquer un phénomène de grande importance en technique: c'est la résonance dite *paramétrique*, ou *amplification* des oscillations causée par une variation périodique (dans le temps) des paramètres du système vibratoire. La théorie mathématique de la resonance paramétrique est développée dans le livre de V. Y a k o u b o v i t c h et V. S t a r j i n s k i, *Equations différentielles linéaires à coefficients périodiques et leurs applications*, paru en anglais aux éditions John Wiley & Sons en 1975 (V. Yakubovich, V. Starzhinskii, Linear Differential Equations with Periodic Coefficients, v. 1 and 2); les applications sont décrites dans le chapitre VI de ce livre.

**) Ceci est la différence entre la résonance ordinaire et la résonance plus compliquée, dite *résonance paramétrique* (fondamentale et combinée): dans le dernier cas l'amplitude des oscillations croît de façon exponentielle.

résonance plutôt une croissance accusée de l'amplitude des oscillations dans le système oscillatoire, qui se manifeste dès que la pulsation de la force extérieure devient proche de l'une des pulsations qui caractérisent les oscillations propres (libres) du système.

Exemple 14.6. Déterminer la valeur de la flèche statique du ressort d'un wagon, propre à éviter la résonance due aux chocs de la roue sur les joints de rails pour une vitesse de roulement jusqu'à 40 m/s. La longueur du rail est $l = 12$ m.

Solution. La mise en résonance se produit quand la période des oscillations propres du wagon devient égale à celle de la force perturbatrice, représentée ici par les chocs de la roue sur les joints de rails *). La période des oscillations propres est définie par la formule (14.12):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_{st}}{g}}.$$

La période de la force perturbatrice est égale à la durée du roulement sur le rail de longueur l:

$$\tau = \frac{l}{v}.$$

De l'inégalité $T < \tau$ il découle que

$$\lambda_{st} < \frac{gl^2}{4\pi^2 v^2}.$$

Pour $v = 40$ m/s, le second membre présente sa valeur minimale égale à

$$\frac{9{,}81 \cdot 12^2}{4 \cdot 9{,}87 \cdot 40^2} = 0{,}0223 \text{ m}.$$

Pour éviter la mise en résonance, on doit assurer $\lambda_{st} < 2{,}23$ cm.

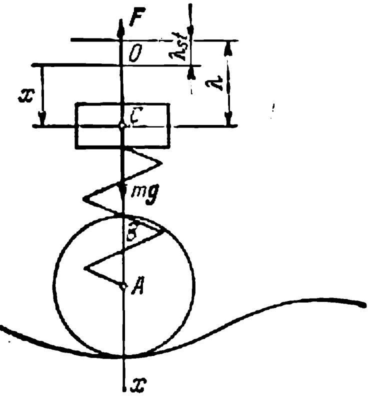


Fig. 14.12

Exemple 14.7. Représentons schématiquement une voiture (automobile) sous forme d'une masse m fixée en un point C du ressort dont l'extrémité inférieure A, fixée sur l'essieu de la roue, effectue des oscillations verticales causées par les aspérités du sol et régies par la loi

$$AB = 0{,}15 \sin 10\, t.$$

Déterminer les oscillations forcées de la voiture si sa masse $m = 500$ kg et la raideur du ressort $c = 200\,000$ N/m (fig. 14.12).

Solution. Orientons l'axe Ox verticalement vers le bas, en prenant comme origine la position d'équilibre statique de la voiture (à condition que le point A occupe la position inférieure sur la verticale, voir fig. 14.12). La voiture est sollicitée par son poids mg et la force élastique du ressort F ($F = -c\lambda$). L'équation différentielle du mouvement de la voiture s'écrit

$$m\ddot{x} = mg - c\lambda. \qquad (1)$$

*) Si le système linéaire subit une action extérieure périodique mais non harmonique, le problème peut être réduit à celui qu'on vient d'étudier, grâce au principe de la superposition décrit en théorie des oscillations.

A l'instant t l'extrémité inférieure du ressort sera venue de la position A en position B. La déformation subie par le ressort est donc

$$\lambda = \lambda_{st} + x - AB = \lambda_{st} + x - 0{,}15 \sin 10t. \qquad (2)$$

Portant (2) dans (1) et appliquant (14.11), on obtient

$$m\ddot{x} = -cx + 0{,}15c \sin 10t.$$

Après division par m, l'équation différentielle du mouvement de la voiture se ramène à la forme (14.25):

$$\ddot{x} + \omega^2 x = h \sin 10t,$$

où

$$\omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{200\,000}{500} = 400 \text{ s}^{-2}, \qquad h = \frac{0{,}15c}{m} = 0{,}15\omega^2 = 60 \text{ m/s}^2, \qquad \psi_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Voyons si la résonance est possible. On a $p = 10$ s^{-1}, $\omega = 20$ s^{-1}, si bien que $p \neq \omega$. Notons qu'on a ici $p < \omega$, aussi l'amplitude des oscillations forcées se définira-t-elle par la formule (14.28):

$$A_f = \frac{h}{\omega^2 - p^2} = \frac{60}{400 - 100} = 0{,}2 \text{ m}.$$

L'équation des oscillations forcées se présente alors sous la forme (14.28a)

$$x = 0{,}2 \sin 10t.$$

3.3. Influence de la résistance sur les oscillations forcées. Nous avons signalé dans le n° 2.1 que tout mouvement s'accompagne d'une force résistante que nous avons considérée proportionnelle à la vitesse, $R = -bv$. En présence d'une force de rappel $X = -cx$, d'une force résistante $R = -bv$ et d'une force perturbatrice $F = H \cos (pt - \psi_0)$, l'équation différentielle des oscillations s'écrit sous la forme

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = h \cos (pt - \psi_0) \quad \left(2\beta = \frac{b}{m}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{H}{m}\right) \qquad (14.31)$$

(voir (14.14) et (14.25)). C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Sa solution générale est égale à la somme de l'une de ses solutions particulières et de la solution générale de l'équation homogène associée

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Quand la résistance est faible ($\beta < \omega$), la solution générale de l'équation homogène se présente sous la forme (14.16):

$$x_1 = a_1 e^{-\beta t} \cos \left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2}\, t - \varphi_1\right).$$

La solution particulière x_2 de (14.31) peut être cherchée sous la forme

$$x_2 = E \cos (pt - \psi_0 - \varepsilon),$$

où E et ε sont deux constantes que l'on choisit de telle façon que x_2 soit solution de l'équation.

Pour déterminer E et ε, calculons les dérivées

$$\dot{x}_2 = -pE\sin(pt-\psi_0-\varepsilon), \quad \ddot{x}_2 = -p^2E\cos(pt-\psi_0-\varepsilon)$$

et portons-les dans l'équation différentielle (14.31):

$$-p^2 E\cos(pt-\psi_0-\varepsilon) - 2\beta p E\sin(pt-\psi_0-\varepsilon) + \\ + \omega^2 E\cos(pt-\psi_0-\varepsilon) = h\cos[(pt-\psi_0-\varepsilon) + \\ + \varepsilon] = h\cos\varepsilon\cos(pt-\psi_0-\varepsilon) - h\sin\varepsilon\sin(pt-\psi_0-\varepsilon).$$

Egalant dans cette identité les coefficients qui affectent $\cos(pt-\psi_0-\varepsilon)$ et $\sin(pt-\psi_0-\varepsilon)$, on obtient

$$(\omega^2-p^2)E = h\cos\varepsilon, \qquad 2\beta p E = h\sin\varepsilon.$$

Elevons au carré chacune de ces dernières équations et faisons leur somme:

$$E^2[(\omega^2-p^2)^2+4\beta^2p^2] = h^2;$$

divisant la première par la seconde, on obtient

$$\frac{\omega^2-p^2}{2\beta p} = \operatorname{cotg}\varepsilon.$$

Ainsi donc, la solution générale de l'équation différentielle (14.31) dans le cas des petites résistances se présente comme suit:

$$x = a_1 e^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\omega^2-\beta^2}\,t-\varphi_1\right) + E\cos(pt-\psi_0-\varepsilon), \quad (14.32)$$

où

$$E = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4\beta^2p^2}}, \quad \varepsilon = \operatorname{arc\,cotg}\frac{\omega^2-p^2}{2\beta p} \quad (0<\varepsilon<\pi). \quad (14.33)$$

Le premier terme de (14.32) détermine les oscillations libres amorties (voir (14.16)) dont l'amplitude a_1 et la phase initiale φ_1 ne se définissent déjà plus à partir de (14.21). On les trouve en substituant les conditions initiales dans la solution générale (14.32) et dans l'expression de sa dérivée. Ces oscillations sont toujours amorties, si bien qu'au bout d'un temps suffisant après l'application de la force extérieure, il ne reste dans le système que les oscillations forcées

$$x_2 = E\cos(pt-\psi_0-\varepsilon).$$

Leur amplitude E et le décalage de phase initiale ε sont définis par les formules (14.33).

Dans l'étude du régime permanent, on peut se borner à analyser les oscillations forcées. De même que dans le n° 3.1, leur période

est égale à

$$\tau = \frac{2\pi}{p}.$$

On voit donc que la résistance n'a aucun effet sur la période des oscillations forcées.

Par contre, en comparant les formules (14.33) et (14.28) (ou (14.29)), on remarque que la résistance a pour effet de diminuer l'amplitude des oscillations forcées. Quand $p \to \omega$, l'amplitude ne tend pas vers l'infini (comme c'est le cas en l'absence de la résistance, voir fig. 14.10) mais vers une quantité finie $h/(2\beta p)$. Les valeurs de h/ω^2 et de β/ω étant données, l'amplitude des oscillations forcées est une fonction du rapport p/ω:

$$E = E\left(\frac{p}{\omega}\right) = \frac{h/\omega^2}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4\frac{\beta^2}{\omega^2}\left(\frac{p}{\omega}\right)^2}} \qquad \left(0 \leqslant \frac{p}{\omega} < \infty\right).$$

Pour déterminer les extrémums de E, cherchons ceux du radicande, c'est-à-dire de

$$f(\xi) = (1-\xi^2)^2 + 4\frac{\beta^2}{\omega^2}\xi^2 \qquad \left(\xi = \frac{p}{\omega}\right).$$

Annulons la dérivée

$$f'(\xi) = -4\xi(1-\xi^2) + 8\frac{\beta^2}{\omega^2}\xi = 0;$$

nous obtenons des valeurs stationnaires

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \sqrt{1 - 2\frac{\beta^2}{\omega^2}}$$

(la valeur ξ_3 n'est pas considérée, car elle est négative).

La première valeur $\xi_1 = 0$ fournit la valeur minimale de l'amplitude des oscillations forcées

$$E(0) = \frac{h}{\omega^2}.$$

Pour $\xi = \xi_2$, c'est-à-dire pour $p = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2}$, l'amplitude atteint sa valeur maximale:

$$E_{max} = \frac{h/\omega^2}{2\frac{\beta}{\omega}\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2}} = \frac{h}{2\beta\sqrt{\omega^2-\beta^2}}. \qquad (14.34)$$

La courbe représentative de la fonction E (p/ω) est montrée sur la figure 14.13.

Si en l'absence de la résistance on observe la résonance avec $p = \omega$, la mise en résonance en présence d'une force résistante se

produit quand la pulsation de la force perturbatrice est

$$p_{rés} = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2} < \omega. \qquad (14.35)$$

Le phénomène de la résonance mécanique provoque une augmentation accusée de l'amplitude des oscillations forcées de la structure (fondation, plancher, pont) et risque d'entraîner même la destruction de l'ouvrage. La résonance produit donc ici un effet nuisible, si bien qu'on cherche à la supprimer. Les structures et les ouvrages sont souvent dotés de dispositifs spéciaux appelés amortisseurs, destinés à atténuer les oscillations.

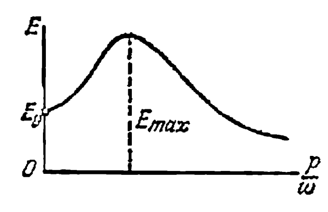


Fig. 14.13

Exemple 14.8. Un solide de masse $m = 4$ kg est suspendu à un ressort de raideur $c = 2000$ N/m et soumis à une force perturbatrice $F = 100 \cos pt$ N. On demande de savoir la pulsation p de F pour laquelle l'amplitude des oscillations forcées sera la plus grande, étant donné que la résistance au déplacement du solide est $R = -120\, v$ N (v est mesuré en m/s). Quelle est l'amplitude maximale des oscillations forcées ?

Solution. Le carré de la pulsation ω des oscillations propres est fourni par la formule (14.3):

$$\omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{2\,000}{4} = 500 \text{ s}^{-2}.$$

Le coefficient d'amortissement β est défini par la formule (14.31):

$$\beta = \frac{b}{2m} = \frac{120}{2 \cdot 4} = 15 \text{ s}^{-1}.$$

De la formule (14.35) on tire alors pour la valeur de p en cas de résonance:

$$p_{rés} = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2} = \sqrt{500 - 2 \cdot 225} = 7{,}07 \text{ s}^{-1}.$$

Pour déterminer la valeur maximale de l'amplitude des oscillations forcées d'après la formule (14.34), calculons d'abord

$$h = \frac{H}{m} = \frac{100}{4} = 25 \text{ m/s}^2,$$

puis d'après (14.34)

$$E_{max} = \frac{25}{2 \cdot 15 \sqrt{500 - 225}} = 0{,}0503 \text{ m}.$$

Exercices

Exercice 14.1. Deux masselottes identiques sont suspendues à un ressort dont une extrémité est immobile: le ressort s'allonge de 2 cm. Déterminer l'équation des oscillations, l'amplitude a et la période T de la masselotte supérieure dans le cas où la masselotte inférieure tombe.

I n d i c a t i o n. Placer l'origine des coordonnées O en position d'équilibre statique de la masselotte supérieure seule restée en place, et orienter l'axe Ox verticalement vers le bas.

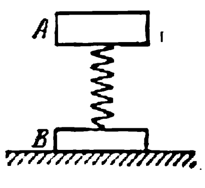


Fig. 14.14

R é p o n s e. $x = 0{,}01 \cos (10 \sqrt{g}t)$, $a = 0{,}01$ m, $T = \dfrac{0{,}2\ \pi}{\sqrt{g}} = 0{,}200$ s.

E x e r c i c e 14.2. Deux masselottes A et B, de poids respectifs P et Q, sont réunies par un ressort comme il est montré sur la figure 14.14. La masselotte A effectue des oscillations libres verticales d'amplitude a et de période T. Quelle est la pression maximale N exercée par la masselotte B sur le plan d'appui ?

R é p o n s e. $N = Q + P\left(1 + \dfrac{4a\pi^2}{gT^2}\right)$.

E x e r c i c e 14.3. Un solide de masse $m = 10$ kg est suspendu à un ressort de raideur $c = 4000$ N/m. La résistance du milieu est proportionnelle à la vitesse. Après trois oscillations, l'amplitude a diminué de 10 fois. Déterminer le décrément logarithmique Δ et la période T' des oscillations amorties.

R é p o n s e. $\Delta = 0{,}384$, $T' = 0{,}316$ s.

CHAPITRE XV

THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL EN MOUVEMENT ABSOLU

Par ce titre, nous voulons souligner que tous les trois théorèmes traités dans ce chapitre se rapportent au cas où le mouvement du point matériel est rattaché à un repère inertiel (voir ch. XIII, n° 1.2).

§ 1. Théorème de la variation de la quantité de mouvement du point matériel

1.1. Impulsion de la force. Supposons que le point matériel M de masse m se déplace avec une vitesse instantanée v sous l'action d'une force $\boldsymbol{F}$ (ici et dans le texte qui suit, on entend par $\boldsymbol{F}$ la résultante de toutes les forces appliquées au point) (voir fig. 15.1). Traçons le *vecteur quantité de mouvement* $\boldsymbol{q}$ *du point* (voir ch. XIII, n° 1.1)

$$\boldsymbol{q} = m\boldsymbol{v}.$$

L'unité SI de module de la quantité de mouvement est le kilogramme-mètre par seconde (kg·m/s). La quantité de mouvement est une des mesures du mouvement du point matériel.

On appelle *impulsion élémentaire* $d\boldsymbol{S}$ d'une force $\boldsymbol{F}$ le vecteur égal au produit du vecteur force $\boldsymbol{F}$ par un intervalle de temps infiniment petit dt (fig. 15.1):

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}\,dt.$$

Supposons que le point M passe pendant un temps $(0, t)$ de sa position initiale M_0 à la position M sous l'action d'une force $\boldsymbol{F}$ qui est en général variable tant en module qu'en direction (fig. 15.2).

On appelle *vecteur impulsion* (ou *impulsion totale*) *de la force* $\boldsymbol{F}$ pendant l'intervalle de temps $(0, t)$ l'intégrale vectorielle d'argument scalaire de la fonction vectorielle $\boldsymbol{F}(t)$:

$$\boldsymbol{S} = \int_0^t \boldsymbol{F}(t)\,dt. \qquad (15.1)$$

L'unité SI de module de l'impulsion d'une force est le newton-seconde (N·s). L'impulsion d'une force est une mesure d'action de cette dernière en fonction de ses module, direction et durée d'action.

Expliquons la signification de l'intégrale vectorielle (15.1). Divisons l'intervalle $(0, t)$ en n intervalles partiels $(0, t_1)$, (t_1, t_2), ..., (t_{n-1}, t) et notons $t_\nu - t_{\nu-1} = \Delta t_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$; $t_0 = 0$, $t_n = t$). On a alors par définition

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta t_\nu \to 0}} \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{F}(t_\nu)\,\Delta t_\nu = \int_0^t \boldsymbol{F}(t)\,dt.$$

Si

$$\boldsymbol{F}(t) = X(t)\,\boldsymbol{i} + Y(t)\,\boldsymbol{j} + Z(t)\,\boldsymbol{k},$$

il vient d'après les propriétés de l'intégrale définie:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{i}\int_0^t X(t)\,dt + \boldsymbol{j}\int_0^t Y(t)\,dt + \boldsymbol{k}\int_0^t Z(t)\,dt,$$

c'est-à-dire que la projection du vecteur impulsion de la force sur

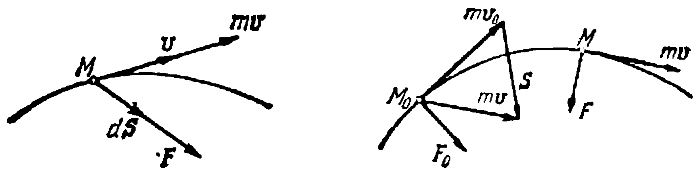


Fig. 15.1 Fig. 15.2

un axe est égale à l'impulsion de la projection de la force sur le même axe. Pour simplifier les choses, nous supposons que les fonctions $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ sont continues.

1.2. Forme vectorielle et forme scalaire du théorème. Ecrivons la deuxième loi de Newton (13.1):

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}.$$

Multipliant par dt, nous voyons que la différentielle de la quantité de mouvement du point matériel est égale à l'impulsion élémentaire de la force appliquée:

$$d(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}\,dt.$$

Intégrant sur t entre 0 et t et sur $\boldsymbol{v}$ entre $\boldsymbol{v}_0$ et $\boldsymbol{v}$, on obtient

$$m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v}_0 = \int_0^t \boldsymbol{F}\,dt. \tag{15.2}$$

Nous venons de démontrer le

Théorème de la variation de la quantité de mouvement du point (sous forme vectorielle). *L'accroissement du vecteur quantité de mouvement du point matériel pendant un intervalle de temps est égal au vecteur impulsion de la force pendant le même intervalle de temps.*

Expliquons ce théorème à l'aide de la figure 15.2. Pour voir l'accroissement du vecteur quantité de mouvement, portons le vecteur mv en M_0 et construisons le vecteur joignant l'extrémité de mv_0 à l'origine de mv. Conformément au théorème, l'accroissement du vecteur mv est équipollent au vecteur impulsion S de la force.

Projetons l'équation (15.2) sur les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz du repère inertiel. Il vient

$$\begin{aligned} mv_x - mv_x^0 &= \int_0^t X\,dt, \\ mv_y - mv_y^0 &= \int_0^t Y\,dt, \\ mv_z - mv_z^0 &= \int_0^t Z\,dt. \end{aligned} \tag{15.3}$$

Le résultat obtenu sera énoncé comme le théorème de la variation de la quantité de mouvement du point (sous forme scalaire): *l'accroissement de la projection de la quantité de mouvement* du point matériel sur un axe fixe du repère inertiel pendant un intervalle de temps *est égal à l'impulsion de la projection de la force* sur le même axe pendant le même intervalle de temps.

Ce théorème est applicable si $\boldsymbol{F}$ (qui est, rappelons-le, une résultante) ne dépend que du temps ou, en particulier, si elle est constante en module et en direction.

1.3. Corollaires. 1° Si $\boldsymbol{F} \equiv 0$, on a $mv - mv_0 \equiv 0$ et $v \equiv v_0$, c'est-à-dire que le mouvement du point se produit par inertie, conformément à la première loi de Newton (voir ch. XIII, n° 1.1).

2° Si $X \equiv 0$, on a $mv_x - mv_x^0 \equiv 0$, si bien que $v_x \equiv v_x^0$.

Si la projection de la force sur un axe reste nulle pendant toute la durée du mouvement du point, la projection de sa vitesse sur cet axe reste constante.

3° Supposons que la force appliquée reste constante en direction, par exemple parallèle à l'axe Oz, en sorte que $X = Y \equiv 0$. Il ressort du corollaire 2° que $v_x = v_x^0$, $v_y = v_y^0$, ou

$$\frac{dx}{dt} = v_x^0, \qquad \frac{dy}{dt} = v_y^0.$$

Multiplions la première identité par $v_y^0 dt$ et la seconde par $-v_x^0 dt$ et faisons leur somme. Il vient

$$v_y^0 dx - v_x^0 dy = 0,$$

et après intégration

$$v_y^0 x - v_x^0 y = v_y^0 x_0 - v_x^0 y_0.$$

Ainsi donc, le point se déplace en restant dans un plan parallèle à la force et défini par les conditions initiales du mouvement: ce cas se produit par exemple quand le point se déplace par gravité.

Les corollaires 1° à 3° représentent des intégrales premières des équations différentielles du mouvement du point matériel (13.7).

Exemple 15.1. S'approchant de la station, le train électrique a une vitesse $v_0 = 20$ m/s. Déterminer le temps de freinage si la résistance au freinage est égale à 0,12 fois le poids de la rame.

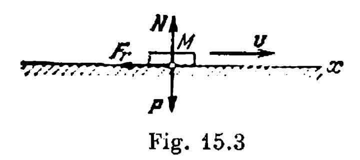


Fig. 15.3

Solution. Représentons le train sous forme d'un point matériel. Il est sollicité par trois forces: le poids du train P, la réaction normale des rails N et la résistance au mouvement F_r orientée dans le sens inverse du mouvement (suivant l'axe des x, fig. 15.3). Les deux premières forces se font équilibre, car il n'y a aucun mouvement vertical. Appliquons le théorème de la variation de la quantité de mouvement du point (sous forme scalaire). D'après la première formule (15.3)

$$\frac{P}{g} v_x - \frac{P}{g} v_x^0 = -\int_0^t 0{,}12P\,dt = -0{,}12Pt.$$

La vitesse finale du train est $v_x = 0$, si bien que

$$t = \frac{v_x^0}{0{,}12g} = \frac{20}{0{,}12 \cdot 9{,}81} = 17 \text{ s}.$$

Exemple 15.2. Une bille de masse m, lancée à une vitesse v_0, tombe sur un plan horizontal AB sous un angle α, puis rebondit sous le même angle α

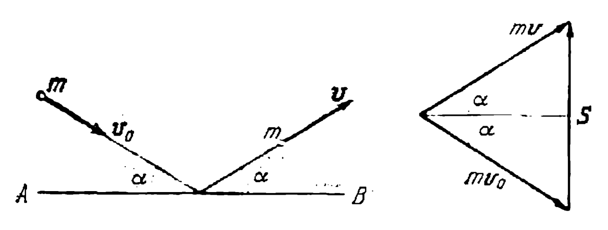


Fig. 15.4

et se meut avec la vitesse v ($v = v_0$) (fig. 15.4). Déterminer l'impulsion de la force communiquée au plan par la bille.

Solution. D'après la formule (15.2)

$$mv - mv_0 = S \qquad \left(S = \int_0^\tau F\,dt\right),$$

où S est l'impulsion de la force F communiquée à la bille par le plan AB pendant la durée du choc τ. On a dans le triangle vectoriel

$$S = 2mv_0 \sin \alpha, \tag{1}$$

et l'impulsion S est perpendiculaire au plan AB. Quant à l'impulsion communiquée au plan par la bille, elle est égale à $-S$ en vertu de la troisième loi de Newton.

De la formule (1) il ressort que de toutes les billes de masse m possédant le même module de la vitesse v_0 et tombant sous différents angles, l'impulsion la plus élevée ($S=2mv_0$) sera communiquée au plan par la bille qui arrive suivant la normale ($\alpha = 90°$).

§ 2. Théorème de la variation du moment cinétique du point matériel

2.1. Moment cinétique du point par rapport à un centre et à un axe. Supposons que le point M (fig. 15.5) se déplace suivant une trajectoire déterminée. Soit $mv = \mathbf{MB}$ sa quantité de mouvement à l'instant considéré. Choisissons un centre fixe quelconque O et abaissons une perpendiculaire de O sur le support du vecteur mv; la longueur de la perpendiculaire h est appelée *bras de levier du vecteur mv* par rapport au centre O.

On appelle *vecteur moment de la quantité de mouvement* ou *moment cinétique* du point matériel *par rapport à un centre* fixe O, et l'on note

$$\boldsymbol{K}_O = \mathbf{Mom}_O\,(mv)$$

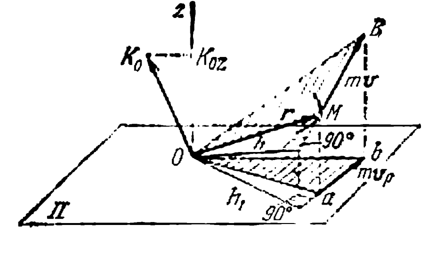


Fig. 15.5

le vecteur d'origine O, dirigé perpendiculairement au plan $\{O, mv\}$ suivant la règle de la vis à droite et dont le module est le produit du module de mv par son bras de levier. Ainsi donc, le vecteur $\boldsymbol{K}_O$ est orienté de façon que de son extrémité on voit le vecteur mv tourner dans le plan OMB autour de O dans le sens antihoraire. Par définition, le module du vecteur $\boldsymbol{K}_O$ est

$$K_O = mvh.$$

Il s'ensuit que le moment cinétique $\boldsymbol{K}_O$ est égal au produit vectoriel du rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ du point M par son vecteur quantité de mouvement mv:

$$\boldsymbol{K}_O = [\boldsymbol{r},\ mv]. \tag{15.4}$$

Menons par le point O l'axe Oz et un plan Π perpendiculaire à cet axe. Projetons le vecteur mv sur Π et considérons sa projection vectorielle mv_p (vecteur $\boldsymbol{ab}$ sur la figure 15.5). Abaissons de O la perpendiculaire h_1 sur le support du vecteur mv_p.

On appelle *moment de la quantité de mouvement* ou *moment cinétique* K_{Oz} du point matériel *par rapport à l'axe Oz* le produit du module du vecteur mv par la longueur de la perpendiculaire h_1, pris avec le signe positif ou négatif:

$$K_{Oz} = \mathrm{mom}_{Oz}(mv) = \pm mv_p h_1. \qquad (15.5)$$

Si, en regardant de l'extrémité de l'axe Oz, on voit le vecteur mv_p tourner dans le plan Π autour de O dans le sens antihoraire, le signe dans (15.5) est positif; dans le cas contraire, on prend le signe négatif.

Puisque

$$K_O = 2S_{OMB}, \qquad |K_{Oz}| = 2S_{Oab},$$

et comme on a d'après la formule connue de géométrie dans l'espace

$$S_{Oab} = S_{OMB} \cos \gamma,$$

où γ est l'angle entre les plans OMB et Π (ou l'angle entre les perpendiculaires K_O, Oz à ces plans, voir fig. 15.5), on obtient la formule

$$K_{Oz} = K_O \cos \gamma. \qquad (15.6)$$

Ainsi donc, le moment de la quantité de mouvement du point par rapport à un axe est égal à la projection sur cet axe du vecteur moment de la quantité de mouvement par rapport à un point quelconque de l'axe.

L'unité SI de module du moment cinétique est le kilogramme-mètre carré par seconde (kg·m²/s).

Tout ce qui précède a déjà été dit dans les nos 1.1 et 1.2 du chapitre V, mais à propos du moment de la force. Nous voyons que les définitions citées pour un vecteur lié (vecteur mv dans ce paragraphe) coïncident avec les définitions énoncées pour un vecteur glissant (vecteur force dans le chapitre V). En particulier, la formule (15.6) est analogue à la formule (5.4). Par analogie au n° 1.1 du ch. V, nous déduisons de la formule (15.5) que

$$\mathrm{mom}_{Oz}(mv) = 0, \quad \begin{cases} \text{si} \quad h_1 = 0, \\ \text{si} \quad v_p = 0, \end{cases} \qquad (15.7)$$

c'est-à-dire que le moment cinétique du point par rapport à un axe s'annule si et seulement si

a) le support du vecteur mv vient couper cet axe;

b) le vecteur mv est parallèle à l'axe.

Autrement dit, le moment s'annule quand le vecteur quantité de mouvement et l'axe sont coplanaires.

2.2. Théorème de la variation du moment cinétique du point matériel. *La dérivée par rapport au temps du moment cinétique* $\boldsymbol{K}_O$ *du point matériel, dans le cas où le vecteur* $\boldsymbol{K}_O$ *est considéré par rapport à un centre fixe O dans un repère inertiel, est égale au vecteur moment de*

la force $\boldsymbol{F}$ *appliquée au point par rapport au même centre* O:

$$\frac{dK_O}{dt} = \mathbf{Mom}_O \boldsymbol{F}. \qquad (15.8)$$

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que le point M de masse m (fig. 15.6) se déplace dans un repère inertiel $Oxyz$ sous l'action d'une force $\boldsymbol{F}$ (ici et partout dans ce chapitre, $\boldsymbol{F}$ est la résultante s'il y a plusieurs forces en jeu). Ecrivons la deuxième loi de Newton

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}.$$

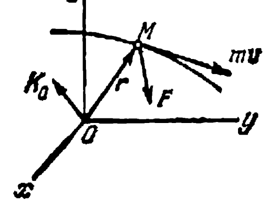


Fig. 15.6

Multiplions les deux membres de cette identité vectoriellement à gauche par le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ du point M:

$$\left[\boldsymbol{r},\ \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v})\right] = [\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{F}]. \qquad (15.9)$$

Montrons que le premier membre est identiquement égal à dK_O/dt. En effet, on a d'après les formules (15.4) et (3) de l'Introduction à la cinématique

$$\frac{dK_O}{dt} = \frac{d}{dt}[\boldsymbol{r},\ m\boldsymbol{v}] = \left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},\ m\boldsymbol{v}\right] + \left[\boldsymbol{r},\ \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v})\right].$$

Or, le premier terme du second membre s'annule, car il s'agit d'un produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires $d\boldsymbol{r}/dt = \boldsymbol{v}$ et $m\boldsymbol{v}$. Aussi l'égalité (15.9) peut-elle s'écrire

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{r},\ m\boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{F}], \qquad (15.10)$$

ce qui n'est autre qu'une écriture développée de la formule (15.8). Le théorème est démontré.

Projetant (15.8) sur les axes du repère inertiel $Oxyz$, on obtient le théorème de la variation du moment cinétique du point énoncé sous f o r m e s c a l a i r e: *la dérivée par rapport au temps du moment cinétique* du point matériel *par rapport à un axe* fixe (ou inertiel) *est égale au moment par rapport au même axe de la force* agissant sur ce point:

$$\frac{dK_{Ox}}{dt} = \mathrm{mom}_{Ox}\boldsymbol{F}, \quad \frac{dK_{Oy}}{dt} = \mathrm{mom}_{Oy}\boldsymbol{F}, \quad \frac{dK_{Oz}}{dt} = \mathrm{mom}_{Oz}\boldsymbol{F}. \quad (15.11)$$

2.3. Corollaires. 1° Si la force $\boldsymbol{F}$ appliquée au point M passe en permanence par un centre fixe (cas d'une force centrale), on a $\mathbf{Mom}_O\,\boldsymbol{F} \equiv \mathbf{0}$ et il ressort de (15.8) que

$$\frac{dK_O}{dt} \equiv \mathbf{0} \text{ et } \boldsymbol{K}_O(t) = \boldsymbol{K}_O(0),$$

autrement dit, le moment cinétique du point par rapport au centre O est constant en module et en direction.

2° Si le moment par rapport à un axe fixe (ou inertiel) de la force $\boldsymbol{F}$ exercée sur le point M est identiquement nul, le moment cinétique de K_{Oz} par rapport au même axe reste constant. Par exemple,

$$\text{si } \operatorname{mom}_{Oz}\boldsymbol{F} \equiv 0, \text{ on a } K_{Oz}(t) = K_{Oz}(0). \qquad (15.12)$$

En effet, il ressort de la dernière formule (15.11) que $dK_{Oz}/dt \equiv 0$, ce qui démontre le corollaire 2° (formule (15.12)).

Les corollaires 1° et 2° représentent, en notation développée, des intégrales premières des équations différentielles du mouvement du point matériel (13.7).

Exemple 15.3. Déterminer le rapport de la vitesse de la Terre en son périhélie A (c'est-à-dire au point de son orbite le plus rapproché du Soleil) à sa vitesse en son aphélie B (le point de son orbite le plus éloigné du Soleil) (fig. 15.7).

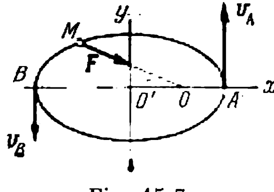


Fig. 15.7

Solution. Le mouvement de la Terre M autour du Soleil O est déterminé par une force centrale: la force d'attraction du Soleil. Aussi, en vertu du corollaire 1°, le moment cinétique de la Terre par rapport au Soleil est-il constant en direction et en module. La direction étant constante, l'orbite de la Terre est une courbe plane, car toute déviation du vecteur vitesse par rapport au plan initial $\{O, m\boldsymbol{v}_0\}$ se traduirait par une variation de la direction du vecteur $\boldsymbol{K}_O$. Appliquons la première loi de Kepler selon laquelle la Terre décrit une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers. Lorsque la Terre est en A, son moment cinétique par rapport au point O (ou, ce qui revient au même, par rapport à l'axe Oz) est égal à

$$\operatorname{mom}_O (m\boldsymbol{v}_A) = mv_A OA = mv_A (a - c),$$

où m est la masse de la Terre, $a = O'A$ le demi-grand axe de l'ellipse, $2c = 2O'O$ sa distance focale. En B on a d'une façon analogue

$$\operatorname{mom}_O (m\boldsymbol{v}_B) = mv_B OB = mv_B (a + c).$$

Le moment cinétique étant constant, égalons ces grandeurs. On obtient

$$mv_A (a - c) = mv_B (a + c),$$

c'est-à-dire

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{a+c}{a-c} = \frac{1+e}{1-e},$$

où $e = c/a$ est l'excentricité de l'ellipse. Pour l'orbite de la Terre on a $e = 0{,}01674$, et

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{1+0{,}01674}{1-0{,}01674} = 1{,}034.$$

§ 3. Théorème de la variation de l'énergie cinétique du point matériel

3.1. Travail et puissance de la force. L'effet de la force sur le point matériel peut aussi se mesurer par le travail. Le travail est une mesure d'action de la force par rapport à l'espace parcouru par le point d'application de la force.

Supposons que le point M (fig. 15.8) décrit une trajectoire curviligne sous l'action d'une force $\boldsymbol{F}$ variable en module et en direction. Désignons par $d\boldsymbol{r}$ le *vecteur déplacement élémentaire de* M pendant un intervalle de temps infiniment court. Puisque le vecteur vitesse de M est $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$, on a

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,dt = \boldsymbol{i}\,dx + \boldsymbol{j}\,dy + \boldsymbol{k}\,dz, \tag{15.13}$$

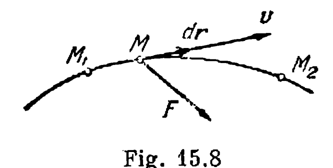


Fig. 15.8

ce qui veut dire que le déplacement élémentaire se produit dans la direction de la vitesse. Les projections dx, dy, dz du vecteur déplacement élémentaire sur les axes inertiels Ox, Oy, Oz sont les accroissements des coordonnées du point M pendant un intervalle de temps infiniment court dt. Le module du vecteur déplacement élémentaire a alors pour expression

$$|\,d\boldsymbol{r}\,| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = ds$$

(voir ch. VII, n° 2.2), où ds est la différentielle de la longueur de l'arc de trajectoire en M.

On appelle *travail élémentaire* δA *) *d'une force* $\boldsymbol{F}$ le produit scalaire du vecteur force $\boldsymbol{F}$ par le vecteur déplacement élémentaire $d\boldsymbol{r}$:

$$\delta A = (\boldsymbol{F},\ d\boldsymbol{r}). \tag{15.14}$$

Conformément à la définition du produit scalaire (voir (1.9) et (1.10)), on peut mettre le travail élémentaire d'une force sous la forme

$$\delta A = F\,ds\cos(\widehat{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{v}}) \quad (ds = |\,d\boldsymbol{r}\,|) \tag{15.15}$$

et

$$\delta A = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz. \tag{15.16}$$

La formule (15.15) représente le travail élémentaire sous forme géométrique, et la formule (15.16), sous forme analytique. Dans la dernière formule, X, Y, Z sont les projections de la force $\boldsymbol{F}$ sur les axes inertiels Ox, Oy, Oz. Il ressort de (15.15) que pour $ds \neq 0$ on a

*) Le symbole δA désigne une quantité infinitésimale qui n'est pourtant pas, à proprement parler, la différentielle du travail. Le travail élémentaire d'une force ne représente la différentielle totale d'une fonction de coordonnées que dans quelques cas particuliers.

$\delta A > 0$ quand $0 \leqslant (\widehat{F, v}) < 90°$, $\delta A < 0$ quand $90° < (\widehat{F, v}) \leqslant 180°$ et $\delta A = 0$ quand $F \perp v$.

Le *travail de la force sur un chemin fini* M_1M_2 (fig. 15.8) est l'intégrale curviligne du travail élémentaire δA prise le long de l'arc M_1M_2 de la trajectoire:

$$A = \int\limits_{\widehat{M_1M_2}} (F, dr) = \int\limits_{\widehat{M_1M_2}} F \cos (\widehat{F, v})\, ds \qquad (15.17)$$

ou

$$A = \int\limits_{\widehat{M_1M_2}} (X\, dx + Y\, dy + Z\, dz). \qquad (15.18)$$

La formule (15.17) est la forme géométrique, et la formule (15.18), la forme analytique du travail d'une force.

L'unité SI de travail (et d'énergie) est le *joule* (J): c'est le travail d'une force de 1 newton (N) sur un chemin rectiligne de 1 mètre, à condition que la force agisse dans la direction du déplacement.

On appelle *puissance de la force*, le rapport du travail élémentaire δA de la force à l'intervalle de temps dt pendant lequel ce travail est produit:

$$N = \frac{\delta A}{dt}. \qquad (15.19)$$

En vertu de la formule (15.14), la puissance N à un instant donné est égale au produit scalaire de la force F par la vitesse v du point M soumis à la force:

$$N = (F, v) = X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt}. \qquad (15.20)$$

Fig. 15.9

L'unité SI de puissance est le *watt* (W): c'est la puissance d'une force qui produit le travail de 1 joule pendant une seconde. A côté du joule, on emploie une unité de puissance traditionnelle, dite cheval-vapeur (ch) ou simplement cheval:

$$1 \text{ ch} = 736 \text{ W}.$$

Dans le cas où le point est sollicité par plusieurs forces $F_1, F_2, \ldots, F_l$ à la fois (fig. 15.9), on a le

L e m m e. *Le travail de la résultante des forces appliquées au point mobile sur un chemin M_1M_2 est égal à la somme algébrique des travaux des forces composantes sur ce chemin.*

D é m o n s t r a t i o n. D'après la formule (15.17)

$$A=\int\limits_{\widehat{M_1M_2}}(\boldsymbol{R},\ d\boldsymbol{r})=\int\limits_{\widehat{M_1M_2}}(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\ \ldots\ +\boldsymbol{F}_l,\ d\boldsymbol{r})=$$

$$=\int\limits_{\widehat{M_1M_2}}\{(\boldsymbol{F}_1,\ d\boldsymbol{r})+(\boldsymbol{F}_2,\ d\boldsymbol{r})+\ \ldots\ +(\boldsymbol{F}_l,\ d\boldsymbol{r})\}.$$

Or, l'intégrale curviligne d'une somme algébrique de fonctions est égale à la somme algébrique des intégrales curvilignes de chacune d'elles,

$$A=\int\limits_{\widehat{M_1M_2}}(\boldsymbol{F}_1,\ d\boldsymbol{r})+\int\limits_{\widehat{M_1M_2}}(\boldsymbol{F}_2,\ d\boldsymbol{r})+\ \ldots\ +\int\limits_{\widehat{M_1M_2}}(\boldsymbol{F}_l,\ d\boldsymbol{r}).$$

Le lemme est démontré.

Par *énergie cinétique* T (ou demi-force vive) *du point matériel*, on entend la quantité scalaire égale au demi-produit de la masse du point par le carré de sa vitesse:

$$T=\frac{1}{2}\,mv^2.$$

L'énergie cinétique est une seconde mesure du mouvement du point matériel. C'est une grandeur essentiellement positive, qui ne s'annule qu'au moment où la vitesse du point devient nulle, c'est-à-dire au repos.

E x e m p l e 15.4. *Travail d'une force élastique.* En mouvement rectiligne la formule (15.18) s'écrit

$$A=\int\limits_{x_1}^{x_2}X\,dx,$$

où x_1 et x_2 sont les abscisses des positions initiale et finale du point matériel. Calculons le travail que produit la force élastique d'un ressort $X=-cx$

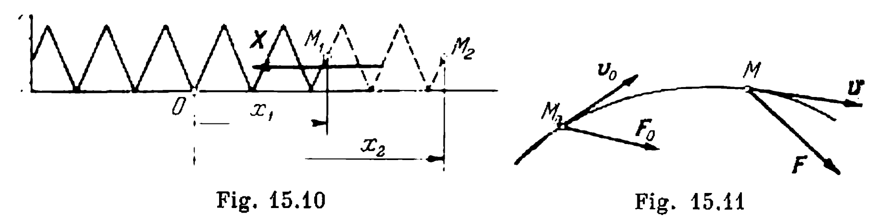


Fig. 15.10

Fig. 15.11

c étant la raideur du ressort, voir ch. XIV, n° 1.1) en passant de la position M_1 à la position M_2 (fig. 15.10). Il vient en vertu de la dernière formule

$$A=-\int\limits_{x_1}^{x_2}cx\,dx=\frac{1}{2}\,c\,(x_1^2-x_2^2).$$

3.2. Théorème de la variation de l'énergie cinétique. *L'accroissement de l'énergie cinétique du point matériel sur un chemin donné est égal au travail des forces appliquées au point sur ce chemin.*

Démonstration. Supposons que le point M de masse m (fig. 15.11), sollicité par une force $\boldsymbol{F}$, se déplace de la position M_0 (possédant la vitesse v_0) à la position M en acquérant une vitesse v. Faisons intervenir la première équation intrinsèque du mouvement du point matériel (voir (13.8)):

$$m\frac{dv_\tau}{dt}=F_\tau=F\cos(\widehat{\boldsymbol{F},\ v}).$$

Multiplions cette équation par $v_\tau dt=ds$:

$$mv_\tau\,dv_\tau=mv\,dv=F\cos(\widehat{\boldsymbol{F},\ v})\,ds,$$

ce qu'on peut écrire, en vertu de (15.15), sous la forme

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\delta A\ ; \tag{15.21}$$

autrement dit, la différentielle de l'énergie cinétique T du point mobile M est égale au travail élémentaire de la force $\boldsymbol{F}$. Intégrons l'identité différentielle (15.21) le long de l'arc M_0M. Il vient

$$T-T_0=A=\int_{\widehat{M_0M}}\delta A,$$

ou sous forme développée

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\int_{\widehat{M_0M}}(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz). \tag{15.22}$$

Le théorème est démontré.

Exemple 15.5. Pour déterminer le coefficient de frottement de l'acier sur la glace, on a poussé un toboggan sur une portion horizontale de la piste et l'on a mesuré l'espace parcouru s et le temps écoulé jusqu'à l'arrêt t. Quel est le coefficient de frottement de glissement f ?

Solution. Le poids du toboggan mg est équilibré par la réaction normale N. L'intensité de la force de frottement de glissement est égale à sa plus grande valeur $fN=fmg$ (voir ch. IV, nº 1.1). Cette force étant constante et dirigée dans le sens inverse du mouvement, on a conformément au théorème de la variation de l'énergie cinétique,

$$0-\frac{1}{2}mv_0^2=-fmgs \tag{1}$$

Cela ne nous permet pas encore de déterminer f, puisque nous ignorons la vitesse initiale v_0. Faisons intervenir le théorème de la variation de la quantité de mouvement sous forme scalaire. La première équation (15.3) nous donne

$$0-mv_0=-fmgt. \tag{2}$$

Eliminant v_0 entre (1) et (2), on obtient

$$f = \frac{2s}{gt^2}.$$

Ainsi donc, le coefficient de frottement est autant de fois inférieur à l'unité que l'espace parcouru par le toboggan sur la glace est inférieur à l'espace parcouru en chute libre pendant le même temps.

3.3. Champ de forces dérivant d'un potentiel. Fonction de forces. Supposons que la force F exercée sur le point soit uniquement fonction de la position de ce dernier:

$$X = X(x, y, z), \qquad Y = Y(x, y, z), \qquad Z = Z(x, y, z).$$

On dit alors que sur le domaine de définition des fonctions X, Y, Z est donné un *champ de forces*. Si le point évolue dans un champ de forces et que le travail des forces du champ ne dépend pas de l'espace parcouru par le point mais seulement de ses positions initiale M_1 et finale M_2 (fig. 15.12), on dit que le champ de forces *dérive d'un potentiel*. Dans un champ de forces dérivant d'un potentiel, le travail le long d'un contour fermé est nul. On montre en théorie des intégrales curvilignes (voir N. P i s k o u n o v, t. II, ch. XV, § 7) que cette condition revient à dire que le travail élémentaire de la force F est la différentielle exacte d'une fonction $U(x, y, z)$:

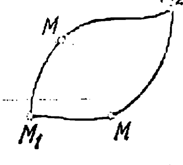


Fig. 15.12

$$\delta A = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU. \tag{15.23}$$

On dit alors que les forces dérivent d'une *fonction de forces* $U(x, y, z)$. Puisque

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz,$$

il ressort des deux dernières égalités et de la propriété d'indépendance des différentielles dx, dy, dz que

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{15.24}$$

Les conditions (15.24) sont nécessaires et suffisantes pour que le champ de forces dérive d'un potentiel.

La fonction de forces $U(x, y, z)$ peut aussi être assimilée au travail que produisent les forces du champ quand le point M se déplace de la position $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à une position arbitraire $M(x, y, z)$

$$A = \int_{\overset{\frown}{M_0M}} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int_{\overset{\frown}{M_0M}} dU = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0). \tag{15.25}$$

Considérons deux exemples de champs de forces dérivant d'un potentiel.

E x e m p l e 15.6. *Champ de la pesanteur uniforme.* Si l'axe Oz est orienté verticalement vers le haut (fig. 15.13), le poids d'un point M est $\boldsymbol{P} = -mg\boldsymbol{k}$, c'est-à-dire que

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = -mg.$$

Supposons que le point M sollicité par son poids $\boldsymbol{P}$ s'est déplacé le long d'une

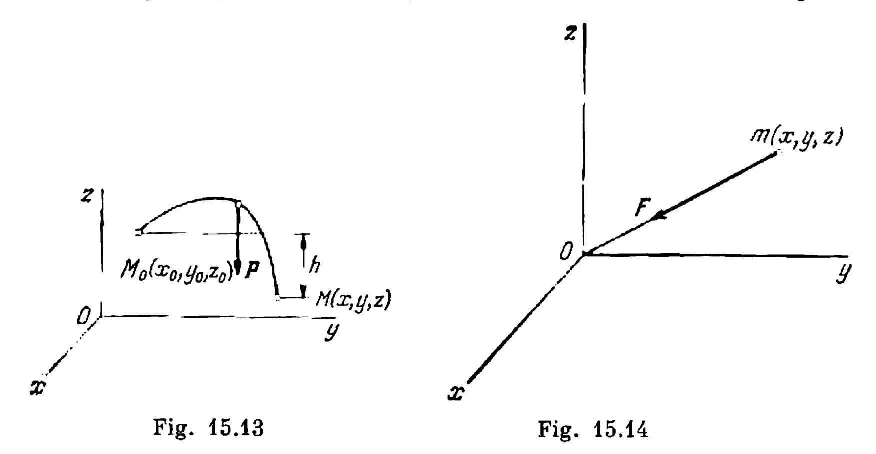


Fig. 15.13 Fig. 15.14

courbe du point M_0 (x_0, y_0, z_0) au point M (x, y, z) (fig. 15.13). En vertu de la formule (15.25), on aura pour la fonction de forces

$$U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = \int\limits_{\widehat{M_0M}} Z\,dz = -mg\int\limits_{z_0}^{z} dz = -mgz + mgz_0.$$

D'où $U = -mgz$, ce qui correspond justement aux conditions (15.24).

La dernière formule peut aussi être transcrite de façon à définir le travail dans le champ de la pesanteur:

$$A = -mgh, \tag{15.26}$$

où $h = z - z_0$ est la différence des hauteurs des points d'arrivée et de départ.

C'est donc précisément à cause du caractère potentiel du champ de la pesanteur que le travail produit par le poids ne dépend pas de la forme de la trajectoire mais se définit d'après la formule (15.26). Il est à noter que ce travail est négatif quand le point remonte sur sa trajectoire ($h > 0$) et positif quand le point descend ($h < 0$).

E x e m p l e 15.7. *Champ d'attraction.* Plaçons l'origine des coordonnées O dans le centre d'attraction (fig. 15.14). Les projections de la force d'attraction newtonienne s'écriront alors

$$X = -\frac{\mu m x}{r^3}, \quad Y = -\frac{\mu m y}{r^3}, \quad Z = -\frac{\mu m z}{r^3} \quad \left(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right),$$

où m est la masse du point attiré, μ la constante de gravitation, x, y, z les coordonnées du point et r son rayon vecteur.

D'après la formule (15.23)

$$dU = -\frac{\mu m}{r^3}(x\,dx + y\,dy + z\,dz) = -\frac{\mu m}{r^3}\,r\,dr = -\frac{\mu m}{r^2}\,dr.$$

On en déduit par intégration

$$U = \frac{\mu m}{r} + C_1.$$

C'est justement la fonction de forces d'attraction newtonienne.

3.4. Conservation de l'énergie mécanique d'un point matériel mobile dans un champ de forces dérivant d'un potentiel. Quand le point matériel se déplace dans un champ de forces dérivant d'un potentiel, le théorème de la variation de l'énergie cinétique (15.22) peut s'écrire, en vertu de (15.25), sous la forme

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0).$$

Introduisons la notion d'*énergie potentielle* $V(x, y, z)$ *du point*, où V est une fonction opposée de la fonction de forces *):

$$V(x, y, z) = -U(x, y, z).$$

La formule précédente peut s'écrire alors comme suit:

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x, y, z) = \frac{1}{2}mv_0^2 + V(x_0, y_0, z_0) = \text{const.} \qquad (15.27)$$

L'égalité (15.27) est une intégrale des équations différentielles du mouvement (13.7) du point mobile dans un champ de forces dérivant d'un potentiel, appelée *intégrale des forces vives*, ou *intégrale de l'énergie*. Elle définit la partie de l'espace dans laquelle le mouvement est possible, car

$$T + V = \text{const.}$$

Nous l'expliquerons en fin de l'exemple 16.1.

On appelle *énergie mécanique totale E du point*, ou *constante des forces vives*, la somme de ses énergies cinétique et potentielle:

$$E = T + V.$$

L'intégrale des forces vives écrite sous la forme

$$E = E_0 = \text{const} \qquad (15.28)$$

*) Ces deux fonctions se laissent définir à une constante additive près.

traduit la *loi de la conservation de l'énergie mécanique totale* du point matériel mobile *dans un champ de forces dérivant d'un potentiel*. Il s'agit d'un cas particulier de la loi générale de la conservation et de la transformation de l'énergie que l'on étudie dans le cours de physique.

Puisque tout point mobile rencontre une résistance, le mouvement dans un champ de forces dérivant d'un potentiel représente un modèle acceptable du mouvement réel quand la résistance est faible. En réalité on observe toujours une dissipation de l'énergie mécanique, ou plutôt sa transformation en énergie thermique, électrique, etc., conformément à la loi générale de la conservation et de la transformation de l'énergie.

Exemple 15.8. Un solide est lancé verticalement vers le haut à partir de la surface de la Terre. Déterminer la vitesse initiale v_0 qu'on doit imprimer au solide pour qu'il atteigne une altitude égale au rayon R de la Terre, sachant que la force d'attraction terrestre varie en raison inverse du carré de la distance au centre de la Terre (fig. 13.11).

Solution. Le solide s'éloignant de la Terre, les projections de la force d'attraction sur les axes de la figure 13.11 s'écriront

$$X=-\frac{pR^2}{x^2},\qquad Y=Z=0,$$

où p est le poids du solide à la surface de la Terre. Assimilons le solide à un point matériel et appliquons le théorème de la variation de l'énergie cinétique (15.22):

$$-\frac{1}{2}\,\frac{p}{g}\,v_0^2=-\int\limits_R^{2R}\frac{pR^2}{x^2}\,dx.$$

La vitesse finale est alors $v=0$, et l'abscisse x varie de R (à la surface) jusqu'à $2R$ pendant le mouvement du point. Calculons l'intégrale définie

$$R^2\int\limits_R^{2R}\frac{dx}{x^2}=R^2\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_R^{2R}=R^2\left[-\frac{1}{2R}+\frac{1}{R}\right]=\frac{1}{2}R;$$

il vient

$$v_0=\sqrt{gR}=\sqrt{9{,}81\cdot 6{,}37\cdot 10^6}=7910\ \text{m/s}.$$

C'est la valeur de la première vitesse cosmique (voir ch. XX, exemple 20.2).

Nous aurions pu avoir ce résultat déjà dans l'exemple 13.7, où nous avons intégré l'équation différentielle du mouvement rectiligne du point. Néanmoins, nous avons envisagé la situation encore une fois afin de montrer que les théorèmes généraux de la dynamique permettent quelquefois de ne pas intégrer les équations du mouvement du point (13.7). Il s'agit des cas où les théorèmes généraux de la dynamique fournissent des intégrales premières des équations du mouvement du point, suffisantes pour la résolution du problème. Nous attirons l'attention du lecteur sur cette conclusion.

Exercices

Exercice 15.1. Un solide pesant est poussé vers le haut sur un plan incliné avec une vitesse initiale $v_0 = 10$ m/s. Calculer le temps de mouvement et l'espace parcouru par le solide jusqu'à l'arrêt si l'inclinaison du plan est 30° et le coefficient de frottement est 0,1.

Réponse. $t = 1{,}74$ s, $s = 86{,}8$ m.

Exercice 15.2. Un point matériel de masse m effectue des oscillations harmoniques sur l'axe Ox suivant l'équation $x = a\cos(\omega t - \varphi_0)$. Déterminer la loi de la variation des énergies cinétique T, potentielle V et totale E du point mobile en fonction de sa coordonnée x en admettant que pour $x = 0$ l'énergie potentielle est $V = 0$.

Réponse. $T = \frac{1}{2} m\omega^2 (a^2 - x^2)$, $V = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$, $E = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2$.

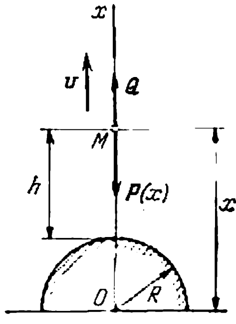


Fig. 15.15

Exercice 15.3. Initialement en repos sur la surface de la Terre, le solide de masse m remonte verticalement avec une accélération a. La force d'attraction $\boldsymbol{P}(x)$ varie en raison inverse du carré de la distance x au centre de la Terre (voir l'exemple 13.7) ; la résistance de l'air est à négliger. Calculer la poussée Q assurant l'ascension et le travail produit par Q quand le solide atteint une altitude h (fig. 15.15).

Réponse. $Q = m\left(a + \frac{R^2}{x^2} g\right)$, $A = mh\left(a + \frac{R}{R+h} g\right)$.

CHAPITRE XVI

MOUVEMENT DU POINT MATÉRIEL GÊNÉ. MOUVEMENT RELATIF DU POINT

Les lois de Newton ne s'appliquent qu'à un point et seulement à un point libre. C'est aussi le cas de tous les théorèmes généraux énoncés dans le chapitre XV. La dynamique du point matériel se divise donc naturellement en dynamique du point libre et dynamique du point non libre, ou gêné.

Si le mouvement du point est gêné par des conditions supplémentaires dont l'effet est de limiter sa liberté de déplacement, on dit que le point est *gêné*. Les limitations ou contraintes imposées aux éléments cinématiques de mouvement du point s'appellent *liaisons*, et les forces réalisant ces contraintes, *forces* ou *réactions de liaison*. Il existe un principe selon lequel le mouvement d'un point matériel gêné peut être considéré comme le mouvement d'un point libre:

Axiome des liaisons pour un point matériel. *Un point matériel gêné peut être assimilé à un point matériel libre, à condition d'ajouter aux forces connues, actives, les forces passives des liaisons, ou les réactions de liaison.*

Grâce à cet axiome, on peut appliquer au mouvement du point gêné toutes les lois de mouvement du point libre établies dans les chapitres précédents: il suffit d'ajouter aux forces actives exercées sur le point les forces passives qui traduisent l'action des liaisons sur ce point.

Une particularité importante des réactions de liaison réside dans le fait qu'elles ne sont pas connues à priori mais doivent être déterminées, au même titre que le mouvement, pendant la résolution du problème dynamique. Les liaisons étudiées en dynamique sont donc appelées *liaisons dynamiques*, en vue de les différencier des liaisons étudiées en statique (voir ch. I, n[os] 2.8 et 2.9).

§ 1. Mouvement du point matériel gêné

1.1. Mouvement du point sur une surface. Supposons que le point M (fig. 16.1) se déplace sous l'action d'une force active $\boldsymbol{F}$ tout en restant sur une surface fixe par rapport au repère inertiel $Oxyz$

(voir ch. XIII, n° 1.2). L'équation de la surface

$$f(x, y, z) = 0 \tag{16.1}$$

est une équation de liaison, car les coordonnées x, y, z de M doivent par définition vérifier à chaque instant l'équation (16.1).

Plaçons-nous dans le cas où la surface est parfaite (polie), c'est-à-dire telle que la réaction N est à tout instant dirigée suivant la normale à la surface:

$$N \parallel \mathbf{v}. \tag{16.2}$$

Les projections du vecteur unité $\mathbf{v}$ de la normale sur les axes Ox, Oy, Oz sont proportionnelles aux dérivées partielles correspondantes $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$. Les conditions (16.2) s'écriront donc sous la forme

$$\frac{N_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{N_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{N_z}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \lambda, \tag{16.3}$$

où λ est un facteur de proportionnalité. Les équations différentielle du mouvement (13.6) s'écriront ainsi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + N_x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N_y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N_z, \tag{16.4}$$

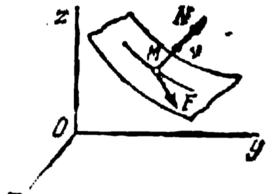


Fig. 16.1

où X, Y, Z et N_x, N_y, N_z sont les projections de l'action (force active) F et de la réaction (force passive) N sur les axes Ox, Oy, Oz. Définissant N_x, N_y, N_z à partir des conditions (16.3) et ajoutant l'équation de liaison (16.1), mettons les équations (16.4) sous la forme

$$\begin{aligned} &m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \\ &m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}, \quad f(x, y, z) = 0. \end{aligned} \tag{16.5}$$

Ce sont les *équations différentielles du mouvement d'un point sur une surface fixe, écrites sous forme lagrangienne avec un facteur*. On a donc quatre équations pour quatre inconnues: x, y, z, λ.

La différentielle totale de la fonction $f(x, y, z)$ est égale, en vertu de (16.1), à

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0.$$

Faisant intervenir (16.3), mettons cette dernière égalité sous la forme

$$(N, dr) = N_x dx + N_y dy + N_z dz = 0. \tag{16.6}$$

La condition (16.6) veut dire que la réaction N est perpendiculaire au déplacement élémentaire dr. Aussi, le travail de la force de réaction en cas de liaison parfaite est-il nul sur tout déplacement réel. Nous retrouvons donc le théorème de la variation de l'énergie cinétique avec ses corollaires (ch. XV, § 3) dans les mêmes énoncés que pour le point matériel libre.

Exemple 16.1. Considérons le mouvement d'un point pesant sur une sphère fixe de rayon R (pendule sphérique). Plaçons l'origine des coordonnées O dans le centre de la sphère et orientons l'axe Oz verticalement vers le haut (fig. 16.2). L'équation de liaison étant

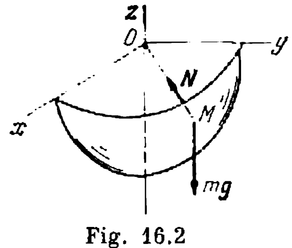


Fig. 16.2

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

il vient

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z.$$

Les projections de l'unique force active — le poids du point — sur les axes Ox, Oy, Oz sont

$$X = Y = 0, \qquad Z = -mg.$$

Les équations de Lagrange avec un facteur (16.5) s'écriront sous la forme

$$m\ddot{x} = 2\lambda x, \quad m\ddot{y} = 2\lambda y, \quad m\ddot{z} = -mg + 2\lambda z, \quad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Ce sont les équations différentielles du mouvement du pendule sphérique. Comme le point évolue dans un champ dérivant d'un potentiel, à savoir le champ de la pesanteur pour lequel l'énergie potentielle s'écri

$$V = -U = mgz$$

(voir l'exemple 15.6), on peut mettre l'intégrale des forces vives (intégrale de l'énergie, voir (15.27)) sous la forme

$$\frac{1}{2} mv^2 + mgz = \frac{1}{2} mv_0^2 + mgz_0.$$

Le carré de la vitesse du pendule sphérique est donc à tout moment égal à

$$v^2 = v_0^2 - 2g(z - z_0).$$

Puisque $v^2 \geqslant 0$, on a pendant toute la durée du mouvement du pendule sphérique,

$$z \leqslant \frac{v_0^2}{2g} + z_0.$$

Lorsque le point mobile est assujetti à rester sur une surface fixe, on peut appliquer les équations du mouvement intrinsèques (13.8). Puisque la tangente en tout point de la trajectoire située sur une surface est perpendiculaire à la normale à la surface en ce point, on a $N_\tau = 0$, et les équations (13.8) s'écriront

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = F_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n + N_n, \quad 0 = F_b + N_b. \qquad (16.7)$$

Rappelons que F_τ, F_n, F_b et 0, N_n, N_b figurant dans (16.7) sont les projections de l'action et de la réaction sur les axes intrinsèques, c'est-à-dire sur la tangente τ, la normale principale n et la binormale b à la trajectoire.

Plaçons-nous dans le cas où $\boldsymbol{F} = 0$ (cas de mouvement par inertie d'un point sur une surface polie fixe). La première équation (16.7) nous donne $v = v_0$, et la troisième $N_b = 0$; la réaction est donc dirigée suivant la normale principale à la trajectoire. Si en chaque point de la courbe d'une surface donnée la normale principale se confond avec la normale à la surface, on dit que cette courbe est une *géodésique de la surface*. Nous constatons donc que le point se déplaçant par inertie sur une surface polie fixe parcourt toujours une géodésique de la surface avec une vitesse constante en module.

Exemple 16.2. Un point matériel pesant M de masse m se déplace sur la surface polie d'une demi-sphère de rayon R. Le frottement est inexistant. En quel point de la surface le point M quittera-t-il la demi-sphère si à l'instant initial il se trouvait sur son sommet A et possédait une vitesse horizontale v_0? Déterminer aussi la valeur de v_0 pour laquelle le point M pourrait quitter la demi-sphère dès l'instant initial (fig. 16.3).

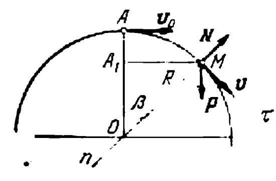


Fig. 16.3

Solution. Considérons l'état de mouvement du point M à l'instant où le rayon OM fait un angle β avec la verticale. Le point M est sollicité par son poids $\boldsymbol{P}$ orienté verticalement vers le bas, et par la réaction de la sphère $\boldsymbol{N}$ dirigée perpendiculairement à la surface de la sphère (car la sphère est polie et le frottement est inexistant). Les équations (16.7) s'écriront comme suit:

$$m\frac{dv}{dt}=mg\sin\beta,\qquad m\frac{v^2}{R}=mg\cos\beta-N. \tag{16.8}$$

Le travail de la force $\boldsymbol{N}$ pendant le déplacement du point M sur la sphère est nul, tandis que le travail produit par le poids est en vertu de (15.26)

$$mgAA_1 = mg\,(R - OA_1) = mgR\,(1 - \cos\beta).$$

On a en vertu du théorème de la variation de l'énergie cinétique (voir (15.22))

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=mgR\,(1-\cos\beta),$$

d'où

$$v^2 = v_0^2 + 2gR\,(1 - \cos\beta).$$

Utilisant la seconde équation (16.8), définissons l'intensité de la réaction en fonction de l'angle β:

$$N=mg\cos\beta-\frac{mv^2}{R}=3mg\cos\beta-\frac{mv_0^2}{R}-2mg. \tag{16.9}$$

Le point M sera assujetti à rester sur la demi-sphère tant que $N > 0$. Il quittera la demi-sphère à l'instant où la réaction N s'annulera. Posons $N = 0$ et calculons l'angle β à partir de (16.9):

$$\cos\beta=\frac{2}{3}+\frac{v_0^2}{3gR}.$$

Dans le cas particulier où v_0 est négligeable, on a

$$\beta = \arccos\frac{2}{3} = 48°11'.$$

Pour déterminer la réaction de la sphère N_0 à l'instant initial de mouvement du point (position A), posons dans (16.9) $\beta = 0$:

$$N_0 = mg\left(1 - \frac{v_0^2}{gR}\right).$$

Pour que le point M quitte la surface dès l'instant initial, il faut qu'il y ait $N_0 \leqslant 0$, ou

$$v_0 \geqslant \sqrt{gR}.$$

Si le point se trouve sur la surface de la Terre, cette condition devient

$$\sqrt{gR} = \sqrt{9{,}81 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6} = 7910 \text{ m/s}.$$

Cette valeur limite est égale à la première vitesse cosmique.

1.2. Mouvement du point sur une courbe. Supposons qu'un point matériel M (fig. 16.4) se déplace sous l'action d'une force active $\boldsymbol{F}$ tout en restant sur une courbe fixe donnée. Admettant que la courbe en question soit définie par l'intersection de deux surfaces, on peut écrire les équations de la courbe dans le repère inertiel comme suit:

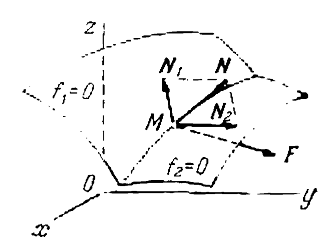


Fig. 16.4

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z) = 0. \tag{16.10}$$

Ce sont des équations de liaison, car les coordonnées du point mobile doivent par définition vérifier à chaque instant les équations de la courbe. Nous admettons que la courbe soit polie, ce qui revient à adopter des liaisons parfaites (sans frottement) comme dans le nº 1.1. Cela signifie que la réaction de liaison $\boldsymbol{N}$ (force passive) est égale à

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 = \lambda_1 \,\mathbf{grad}\, f_1 + \lambda_2 \,\mathbf{grad}\, f_2, \tag{16.11}$$

où λ_1, λ_2 sont des facteurs scalaires et **grad** f_1, **grad** f_2 des vecteurs:

$$\mathbf{grad}\, f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

$$\mathbf{grad}\, f_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Ces vecteurs, appelés *gradients*, sont dirigés suivant les normales en M aux surfaces $f_1(x, y, z) = 0$ et $f_2(x, y, z) = 0$. Il ressort de (16.11) que les projections de la réaction $\boldsymbol{N}$ sur les axes Ox, Oy, Oz sont res-

pectivement

$$N_x = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x},$$
$$N_y = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \qquad (16.12)$$
$$N_z = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}.$$

Les équations différentielles du mouvement (13.6) se mettront sous la forme

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + N_x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N_y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N_z, \qquad (16.13)$$

où X, Y, Z sont les projections de l'action $\boldsymbol{F}$ sur les axes Ox, Oy, Oz. En y substituant les expressions de N_x, N_y, N_z tirées de (16.12) et en ajoutant les équations de liaison (16.10), nous obtenons

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x},$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \qquad (16.14)$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z},$$
$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z) = 0.$$

Ce sont les équations différentielles du mouvement du point assujetti à rester sur la courbe fixe donnée, écrites sous forme lagrangienne avec plusieurs facteurs. On a donc cinq équations pour cinq inconnues: $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$.

Le travail des forces de réaction en cas de liaisons parfaites est nul sur tout déplacement réel. Dans le cas considéré cette proposition pourrait être démontrée par analogie au cas du n° 1.1 ; nous dirons cependant, en anticipant légèrement les choses, que cette proposition sera adoptée comme définition des liaisons parfaites sous le titre « axiome des liaisons parfaites » (ch. XVII, n° 1.2). Ainsi donc, le point matériel mobile assujetti à rester sur une courbe polie fixe vérifie le théorème de la variation de l'énergie cinétique et ses corollaires (ch. XV, § 3), au même titre qu'un point matériel libre.

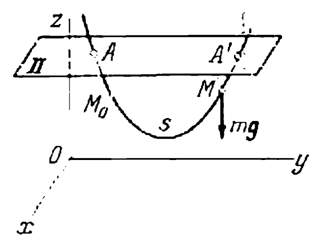


Fig. 16.5

Il est possible que la position du point sur la courbe fixe soit déterminée par un seul paramètre, tel que la longueur d'un arc. Dans ce cas, l'intégrale des forces vives (quand elle existe) s'avère suffisante pour déterminer la position du point. Considérons un point matériel pesant mobile sur une courbe donnée (fig. 16.5). L'énergie

potentielle $V = mgz$ (voir l'exemple 15.6) et l'intégrale des forces vives (15.27) s'écriront comme suit :

$$\frac{1}{2} mv^2 + mgz = \frac{1}{2} mv_0^2 + mgz_0 \equiv mga \qquad \left(a = z_0 + \frac{v_0^2}{2g} = \text{const}\right).$$

D'où

$$v^2 = 2g\,(a - z). \tag{16.15}$$

Pour donner un sens à la constante a, considérons un plan Π d'équation $z = a$. Aux points A, A' où le plan $z = a$ rencontre la courbe donnée (fig. 16.5), on a en vertu de la formule (16.15)

$$v_A = v_{A'} = 0.$$

Introduisons la notation $\zeta = a - z$; la formule (16.15) devient

$$v^2 = 2g\zeta,$$

ce qui signifie que le point M possède la même vitesse que s'il tombait en chute libre du plan Π sans vitesse initiale. Désignons par s la longueur de l'arc M_0M ; on a alors $v = ds/dt$, et (16.15) s'écrit sous la forme

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g}\,\sqrt{a - z}\ .$$

Pour les points de la courbe donnée la fonction $z = z\,(s)$ est connue. On obtient donc en séparant les variables dans la dernière équation différentielle et en faisant l'intégration :

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{a - z\,(s)}} = t. \tag{16.16}$$

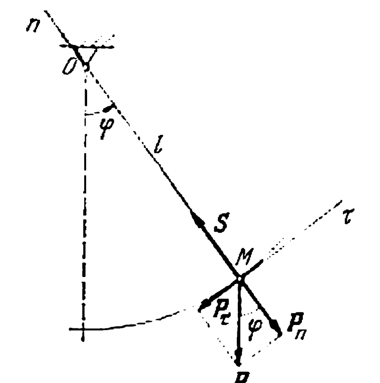


Fig. 16.6

Le problème se réduit donc à une quadrature qui permet de calculer la fonction $t = t\,(s)$ dont la réciproque définit l'équation horaire du mouvement $s = s\,(t)$. Or, même dans le cas très élémentaire du pendule circulaire simple, la solution exacte indiquée conduit à des intégrales elliptiques qui ne s'expriment pas à l'aide de fonctions élémentaires. Proposons-nous donc de chercher une solution approchée du problème du pendule circulaire simple.

1.3. Pendule circulaire simple. Un fil inextensible de poids nul et de longueur l est fixé par son extrémité à une articulation fixe O et porte à sa seconde extrémité un point matériel pesant de masse m. Déterminons le mouvement du pendule simple dans le plan Oxy perpendiculaire à l'axe d'articulation (fig. 16.6).

Le point M, mobile le long d'un arc de circonférence de rayon l, est sollicité par une force active (le poids $\boldsymbol{P}$) et une force passive (tension S du fil). Soit φ l'angle d'écart par rapport à la verticale. Appliquons les équations du mouvement intrinsèques (13.8):

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = -mg\sin\varphi, \quad m\frac{v^2}{l} = -mg\cos\varphi + S. \tag{16.17}$$

Puisque la vitesse algébrique d'un point mobile suivant une circonférence est égale à $v_\tau = l\,d\varphi/dt$, nous pouvons mettre la première équation (16.17) sous la forme

$$l\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\sin\varphi = 0.$$

Pour de faibles oscillations du pendule, posons $\sin\varphi \approx \varphi$ et divisons par l: nous obtenons ainsi l'équation différentielle des petites oscillations du pendule circulaire simple

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0 \quad \left(k^2 = \frac{g}{l}\right). \tag{16.18}$$

Nous retrouvons l'équation différentielle des oscillations harmoniques (voir ch. XIV, n° 1.1) dont la solution générale est fournie par la formule (14.4):

$$\varphi = \alpha\cos(kt - \beta), \tag{16.19}$$

où l'amplitude angulaire α et la phase initiale β des oscillations sont déterminées d'après les formules (14.8) à partir des conditions initiales. En particulier, si les conditions initiales

$$\varphi(0) = \varphi_0, \qquad \dot{\varphi}(0) = 0,$$

l'équation des oscillations sera, en vertu de la formule (14.9),

$$\varphi = \varphi_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

La période d'oscillation T, calculée d'après la formule (14.5),

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{16.20}$$

est indépendante des conditions initiales quand les oscillations restent petites. On dit que les petites oscillations du pendule circulaire simple sont *isochrones*.

De la seconde équation (16.17) on déduit la tension dynamique du fil S. Puisque $v = l\dot{\varphi}$, il vient

$$S = mg\cos\varphi + ml\dot{\varphi}^2,$$

où $\dot{\varphi}$ peut être déterminé par dérivation de l'équation des oscillations (16.19). La valeur de $\dot{\varphi}$ devient maximale quand $\varphi = 0$, soit

$$\dot{\varphi}_{\max} = \alpha k,$$

si bien qu'on a

$$S_{\max} = mg + ml\alpha^2k^2 = S_{\text{st}}(1 + \alpha^2),$$

où α est l'amplitude angulaire (envergure) des oscillations en radians.

§ 2. Mouvement relatif du point matériel

Dans ce paragraphe qui termine l'exposé de la dynamique du point, nous examinerons le mouvement d'un point matériel M de masse m dans un système de coordonnées $O'x'y'z'$ qui se déplace luimême, d'une façon déterminée, par rapport à un repère inertiel $Oxyz$ (fig. 16.7). La force $\boldsymbol{F}$ qui exerce sur le point un effet accélérateur (on entend par $\boldsymbol{F}$ la résultante de toutes les forces, tant actives que passives) est déterminée par rapport au repère inertiel $Oxyz$ que nous assimilons conventionnellement à un repère fixe, ou absolu. Quant au mouvement du point, notre but est précisément de le définir dans le repère mobile $O'x'y'z'$: tel est le problème posé.

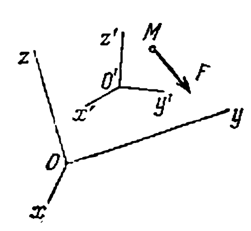


Fig. 16.7

2.1. Equations différentielles du mouvement relatif du point. Ecrivons la deuxième loi de Newton (13.1) pour le point M sous la forme

$$m\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{F}, \tag{16.21}$$

de façon à souligner que dans le premier membre intervient le vecteur accélération absolue du point. En vertu du théorème de Coriolis (formule (11.11)), le vecteur accélération d'un point en mouvement absolu est égal à la somme des vecteurs accélération d'entraînement $\boldsymbol{w}_e$, accélération relative $\boldsymbol{w}_r$ et accélération complémentaire $\boldsymbol{w}_c$:

$$\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{w}_e + \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{w}_c.$$

On a en vertu de (16.21)

$$m\boldsymbol{w}_e + m\boldsymbol{w}_r + m\boldsymbol{w}_c = \boldsymbol{F}.$$

Puisque nous nous attachons à analyser le mouvement relatif, explicitons le produit de la masse du point par son vecteur accélération relative:

$$m\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{F} + (-m\boldsymbol{w}_e) + (-m\boldsymbol{w}_c). \tag{16.22}$$

Le second membre de (16.22) représente la force accélératrice, mesurée dans le repère mobile $O'x'y'z'$. Les deux termes $(-m\boldsymbol{w}_e)$ et $(-m\boldsymbol{w}_c)$

s'appellent *forces de Coriolis*: $(-mw_e)$ s'appelle *force d'entraînement de Coriolis*, et $(-mw_c)$, *force complémentaire de Coriolis* *).

Le vecteur accélération complémentaire *de Coriolis* est égal, en vertu de (11.13), à

$$w_c = 2\,[\omega_e,\ v_r] = 2\begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ p & q & \tilde{r} \\ \frac{dx'}{dt} & \frac{dy'}{dt} & \frac{dz'}{dt} \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(q\frac{dz'}{dt} - \tilde{r}\frac{dy'}{dt}\right) i' + 2\left(\tilde{r}\frac{dx'}{dt} - p\frac{dz'}{dt}\right) j' + 2\left(p\frac{dy'}{dt} - q\frac{dx'}{dt}\right) k'.$$

Ici i', j', k' sont les vecteurs unités du système mobile $O'x'y'z'$; p, q, $\tilde{r}$ sont les projections sur les axes $O'x'$, $O'y'$ et $O'z'$ du vecteur vitesse angulaire instantanée ω_e du repère mobile par rapport au repère fixe; dx'/dt, dy'/dt, dz'/dt sont les projections du vecteur vitesse relative v_r sur les mêmes axes.

Projetons l'équation vectorielle (16.22) sur les axes du système mobile $O'x'y'z'$:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x'}{dt^2} &= F_{x'} - mw^e_{x'} - 2m\left(q\frac{dz'}{dt} - \tilde{r}\frac{dy'}{dt}\right), \\ m\frac{d^2y'}{dt^2} &= F_{y'} - mw^e_{y'} - 2m\left(\tilde{r}\frac{dx'}{dt} - p\frac{dz'}{dt}\right), \\ m\frac{d^2z'}{dt^2} &= F_{z'} - mw^e_{z'} - 2m\left(p\frac{dy'}{dt} - q\frac{dx'}{dt}\right). \end{aligned} \qquad (16.23)$$

Ce sont les équations différentielles du mouvement relatif du point matériel.

E x e m p l e 16.3. Chercher la force complémentaire de Coriolis qui s'exerce sur un train roulant du Nord vers le Sud à la latitude de Léningrad ($\varphi = 60°$).

S o l u t i o n. Nous avons calculé dans l'exemple 11.4 le module du vecteur accélération complémentaire $w_c = 0{,}00252$ m/s² pour $v = 20$ m/s. L'intensité de la force complémentaire de Coriolis pour un wagon de masse 60 000 kg (et de longueur à peu près égale à celle du rail) roulant à 20 m/s sera égale à

$$mw_c = 60\,000 \cdot 0{,}00252 = 151 \text{ N}.$$

Nous avons vu également dans l'exemple 11.4 que le vecteur accélération complémentaire w_c est dirigé alors vers la gauche en regardant dans le sens du mouvement. Quant à la force complémentaire de Coriolis $(-mw_c)$, elle est dirigée vers la droite et applique le rebord de la jante de la roue sur la face interne du rail de droite (en regardant dans le sens du mouvement).

Examinons de plus près le côté physique du problème. Pour un observateur « fixe » le mouvement du train n'est pas rectiligne, car, en plus de son déplace-

*) Dans le sillage de N. T c h é t a ï e v, nous avons évité de donner l'appellation *forces d'inertie* aux forces intervenant dans le mouvement relatif du point matériel.

ment méridien, le train est dévié vers l'Est à cause de la rotation de la Terre. Donc, du point de vue de l'observateur fixe, le train qui roule du Nord vers le Sud éprouve une accélération dirigée vers la gauche (vers l'Est). Il y a donc une force qui agit dans cette direction: c'est la force de réaction du rail de droite déformé.

Ces conclusions sont corroborées par la pratique. Dans l'hémisphère boréal, les chemins de fer à double voie présentent une forte usure sur la face interne du rail de droite. Un effet analogue est observé pour les fleuves qui coulent en direction méridienne: dans l'hémisphère boréal leur rive droite est plus raide, car elle est érodée par l'eau qui coule. Dans l'hémisphère boréal les vents du nord sont déviés vers la droite (vers l'Est), ce qui explique la provenance des alizés qui soufflent du nord-est vers le sud-ouest dans l'hémisphère boréal.

2.2. Cas particuliers. Considérons des cas particuliers du mouvement relatif d'un point.

1. Supposons que le repère $O'x'y'z'$ se déplace e n t r a n s l a t i o n (avec $\omega_e \equiv 0$). L'accélération complémentaire w_c est alors identiquement nulle, et les équations (16.23) deviennent

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = F_{x'} - mw^e_{x'}, \quad m\frac{d^2y'}{dt^2} = F_{y'} - mw^e_{y'}, \quad m\frac{d^2z'}{dt^2} = F_{z'} - mw^e_{z'}.$$

L'accélération d'entraînement w_e du point M étant égale dans ce cas à l'accélération $w_{O'}$ de l'origine du repère mobile, les équations différentielles du mouvement relatif se mettent définitivement sous la forme

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = F_{x'} - mw^{O'}_{x'}, \qquad m\frac{d^2y'}{dt^2} = F_{y'} - mw^{O'}_{y'},$$
$$m\frac{d^2z'}{dt^2} = F_{z'} - mw^{O'}_{z'}. \quad (16.24)$$

Ici $w^{O'}_{x'}$, $w^{O'}_{y'}$, $w^{O'}_{z'}$ sont les projections du vecteur accélération absolue du point O' sur les axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$; ce sont des fonctions du temps connues, car le mouvement du repère $O'x'y'z'$ est bien déterminé.

2. Supposons que le repère $O'x'y'z'$ se déplace e n t r a n s l a t i o n a v e c u n e v i t e s s e a b s o l u e $v_{O'}$ c o n s t a n t e en module et en direction. On a alors $w_{O'} \equiv 0$, et les équations différentielles du mouvement relatif s'écriront

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = F_{x'}, \quad m\frac{d^2y'}{dt^2} = F_{y'}, \quad m\frac{d^2z'}{dt^2} = F_{z'},$$

c'est-à-dire sous la même forme qu'en mouvement absolu. Il en découle l'*équivalence de tous les repères inertiels*; autrement dit, les lois de la mécanique s'énoncent de la même façon dans tous les repères animés de translation uniforme et rectiligne les uns par rapport aux autres. Tel est le *principe de la relativité de la dynamique classique* (principe de la relativité de Galilée-Newton, voir ch. XIII, n° 1.3).

3. Supposons enfin que le point se trouve *en état de repos relatif*, c'est-à-dire en repos par rapport au système mobile $O'x'y'z'$. On a alors $v_r = w_r \equiv 0$ et donc $w_c \equiv 0$. La relation (16.22) s'écrira dans ce cas:

$$F + (-mw_e) = 0, \tag{16.25}$$

ce qui veut dire que la résultante de toutes les forces actives et passives exercées sur le point en repos relatif et la force d'entraînement de Coriolis se font équilibre.

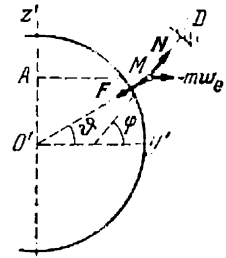


Fig. 16.8

Exemple 16.4. Considérons un point matériel M qui se trouve en repos relatif sur la surface de la Terre (fig. 16.8). Plaçons l'origine du système de coordonnées mobile au centre de la Terre O', orientons l'axe $O'z'$ vers le pôle Nord, et l'axe $O'y'$, vers le point où le méridien rencontre l'équateur. L'angle ϑ est appelé *latitude géocentrique*. La densité de la Terre étant supposée égale dans chaque couche sphérique, la force d'attraction $F = ma$ est dirigée vers le centre de la Terre. Dans son mouvement d'entraînement, le point M décrit une circonférence de rayon $AM = R \cos \vartheta$, où R est le rayon de la Terre, avec une vitesse angulaire constante Ω. Le vecteur accélération d'entraînement w_e est dirigé vers A et son module est égal à $AM\Omega^2$. L'intensité de la force d'entraînement de Coriolis $(-mw_e)$ est $mR\Omega^2 \cos \vartheta$. L'équation du repos relatif (16.25) s'écrira

$$ma + N + (-mw_e) = 0,$$

où N est la force de réaction. Projetons cette équation vectorielle sur les axes $O'y'$ et $O'z'$; il vient

$$-ma \cos \vartheta + N_{y'} + mR\Omega^2 \cos \vartheta = 0, \qquad -ma \sin \vartheta + N_{z'} = 0. \tag{16.26}$$

La direction du vecteur N définit ce qu'on appelle la *verticale vraie* du lieu donné de la Terre, ainsi que l'angle φ appelé *latitude astronomique* du lieu. Explicitant $N_{y'}$ et $N_{z'}$ à partir des équations (16.26), on peut écrire

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{N_{z'}}{N_{y'}} = \frac{ma \sin \vartheta}{ma \cos \vartheta - mR\Omega^2 \cos \vartheta} = \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{1-\mu}, \tag{16.27}$$

où

$$\mu = \frac{R\Omega^2}{a} = \frac{1}{289}.$$

La formule (16.27) établit la relation entre la latitude astronomique et la latitude géocentrique.

Le poids du point est directement opposé à la réaction N, en sorte qu'on a $N = -mg$. On a donc $N_{y'} = -mg \cos \varphi$, $N_{z'} = -mg \sin \varphi$, et les équations (16.26) s'écriront après division par m:

$$g \cos \varphi = a (1 - \mu) \cos \vartheta, \qquad g \sin \varphi = a \sin \vartheta.$$

Elevons-les au carré et faisons leur somme:

$$g^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = a^2 (\cos^2 \vartheta - 2\mu \cos^2 \vartheta + \mu^2 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta).$$

Le module du vecteur accélération de la pesanteur sera égal à

$$g = a \sqrt{1 - 2\mu \cos^2 \vartheta + \mu^2 \cos^2 \vartheta} \approx a (1 - \mu \cos^2 \vartheta). \tag{16.28}$$

On voit que l'accélération de la pesanteur présente son maximum aux pôles ($\vartheta = \pi/2$) et son minimum à l'équateur ($\vartheta = 0$).

Nous pouvons maintenant donner des définitions exhaustives de la pesanteur et du poids. La *pesanteur* exerce sur chaque point matériel une action égale au produit de sa masse par l'accélération de la pesanteur. Le *poids* du corps est la valeur numérique (le module) de la résultante des actions de la pesanteur sur toutes les particules du corps.

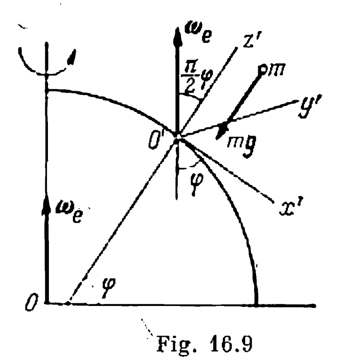


Fig. 16.9

Exemple 16.5. *Déviation des corps tombant vers l'Est.*

Solution. Choisissons un système de coordonnées local et dirigeons son axe $O'z'$ suivant la verticale vraie du lieu (voir l'exemple précédent), son axe $O'x'$ dans le plan méridien vers le Sud, perpendiculairement à $O'z'$, et son axe $O'y'$ vers l'Est : on obtient un repère orthogonal direct (fig. 16.9). Supposons qu'un point matériel de masse m tombe dans le vide (ce qui revient à annuler la résistance de l'air) et écrivons les équations différentielles de son mouvement (16.23). C'est la résultante de la force active $\boldsymbol{F}$ et de la force d'entraînement de Coriolis ($-m\boldsymbol{w}_e$) due à la rotation de la Terre qui constitue le poids du point matériel dans un lieu donné de la Terre,

$$\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{w}_e = m\boldsymbol{g} = -mg\boldsymbol{k}',$$

et donc

$$F_{x'} - mw^e_{x'} = F_{y'} - mw^e_{y'} = 0, \qquad F_{z'} - mw^e_{z'} = -mg.$$

Les projections p, q, $\tilde{r}$ du vecteur vitesse angulaire de rotation de la Terre ω_e sur les axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ sont

$$p = -\omega_e \cos\varphi, \qquad q = 0, \qquad \tilde{r} = \omega_e \sin\varphi,$$

où l'angle φ est la latitude astronomique du lieu. Ainsi donc, le mouvement relatif d'un point pesant dans le vide à proximité de la Terre se définit par les équations différentielles

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = 2\omega_e \sin\varphi \frac{dy'}{dt},$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = -2\omega_e \left(\sin\varphi \frac{dx'}{dt} + \cos\varphi \frac{dz'}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = -g + 2\omega_e \cos\varphi \frac{dy'}{dt}.$$

Cherchons par approximations successives la solution particulière de ce système qui correspond aux conditions initiales nulles

$$x'(0) = y'(0) = z'(0) = \dot{x}'(0) = \dot{y}'(0) = \dot{z}'(0) = 0.$$

Portant les conditions initiales dans les seconds membres, on obtient en première approximation pour x'_1, y'_1, z'_1

$$\frac{d^2x'_1}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y'_1}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2z'_1}{dt^2} = -g,$$

d'où l'on déduit pour les conditions initiales données

$$x_1' = 0, \quad y_1' = 0, \quad z_1' = -\frac{1}{2} gt^2.$$

On voit donc que la loi connue de la chute libre des corps n'est valable qu'en première approximation. Substituant x_1', y_1', z_1' dans les seconds membres du système initial d'équations différentielles, on obtient en seconde approximation pour x_2', y_2', z_2':

$$\frac{d^2x_2'}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y_2'}{dt^2} = 2\omega_e \cos\varphi \cdot gt, \quad \frac{d^2z_2'}{dt^2} = -g.$$

D'où l'on déduit pour les conditions initiales données

$$x_2' = 0, \quad y_2' = \frac{1}{3}\omega_e g \cos\varphi \cdot t^3, \quad z_2' = -\frac{1}{2} gt^2.$$

L'axe $O'y'$ étant dirigé vers l'Est, la seconde approximation exprime précisément la déviation des corps tombant vers l'Est, due à la force complémentaire de Coriolis. Par exemple, à la latitude de Léningrad ($\varphi = 60°$), la déviation vers l'Est au bout de 10 secondes en chute libre est égale à

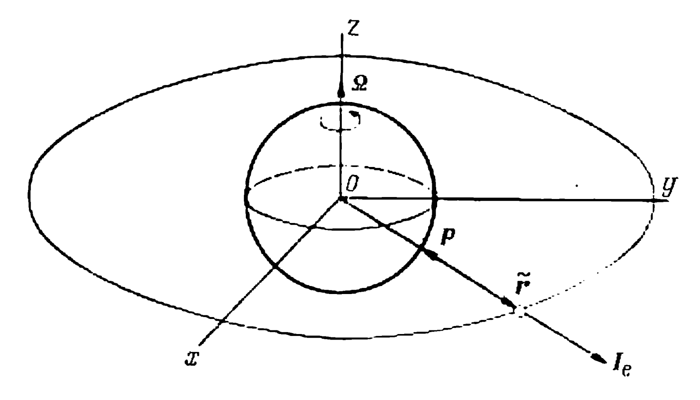


Fig. 16.10

$$y_2'(10) = \frac{2\pi}{3 \cdot 86\,400} \cdot 9{,}81 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^3 = 0{,}119 \text{ m}.$$

Exemple 16.6. *Détermination du rayon de l'orbite d'un satellite géostationnaire* (satellite artificiel équatorial mis sur orbite circulaire avec une période de révolution de 24 heures). Cet exemple est un cas d'application des conditions du repos relatif (16.25).

Soit un système de coordonnées rectangulaires $Oxyz$ invariablement lié à la Terre; l'axe Oz est dirigé suivant l'axe de rotation de la Terre. Rapporté à ce système, le satellite du type décrit doit être immobile et se trouver dans le plan Oxy à une distance constante $\tilde{r}$ du centre de la Terre (fig. 16.10). Conformément à la condition du repos relatif (16.25), un tel satellite demeure immobile par rapport au système référentiel choisi qui tourne avec la Terre avec la vitesse angulaire Ω. Faisons l'inventaire des forces appliquées au satellite. Ce sont la force d'attraction newtonienne $\boldsymbol{P}$ définie par la formule (13.32) et la force d'entraînement de Coriolis $\boldsymbol{I}_e = -m\boldsymbol{w}_e$, où m est la masse du satel-

lite et w_e son accélération d'entraînement, égale à l'accélération normale dans son mouvement suivant la circonférence de rayon $\tilde{r}$, soit:

$$w_e = -\Omega^2\tilde{r}. \tag{1}$$

Compte tenu de (13.32), on peut mettre P sous la forme

$$P = -\frac{mgR^2}{\tilde{r}^3}\tilde{r}. \tag{2}$$

Portant (1) et (2) dans (16.25), on obtient

$$m\left(-\frac{gR^2}{\tilde{r}^3}+\Omega^2\right)\tilde{r}=0.$$

Alors, puisque $\tilde{r}\neq 0$, on en déduit

$$\tilde{r}=\sqrt[3]{\frac{gR^2}{\Omega^2}}=\sqrt[3]{9{,}81\left(\frac{6{,}37\cdot 10^6\cdot 24\cdot 3600}{2\cdot 3{,}14}\right)^2}=4{,}22\cdot 10^7\ \text{m} = 42\,200\ \text{km}.$$

2.3. Apesanteur et accélération. Le lancement des satellites artificiels et des vaisseaux spatiaux a fourni à l'homme la possibilité d'examiner un phénomène remarquable appelé *apesanteur*. Avant de procéder à son analyse, voyons d'abord d'où provient la sensation de poids.

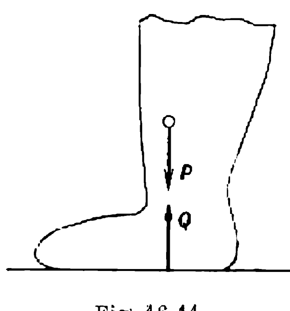


Fig. 16.11

Chaque partie du corps humain en équilibre dans le champ de la pesanteur se trouve exposée à l'action de deux forces: la résultante P de toutes les actions de la pesanteur et la réaction de l'appui *) Q (fig. 16.11). L'existence de ces deux forces fait naître des contraintes et des déformations qui sont perçues comme le poids. Dès que l'appui disparaît (par exemple en chute libre), la réaction Q disparaît également en supprimant les contraintes. En effet, chaque élément du corps, quelque petit qu'il soit, reste exposé à la seule action de la pesanteur, si bien que tous ces éléments se mettent en mouvement avec la même vitesse et la même accélération (en supposant que le corps se déplace en translation). Les contraintes disparaissent quelle que soit la trajectoire suivie par le corps: chute libre, mouvement ascendant, mouvement suivant une parabole... Chacun peut donc éprouver un état d'apesanteur de courte durée, par exemple en faisant un saut ordinaire.

Appelons *forces massiques* les forces appliquées à chaque élément du corps, analogues aux actions de la pesanteur. Appliquées seules

*) L'appui peut aussi être constitué par les autres parties du corps.

au corps mobile en translation, elles ne peuvent pas faire naître des contraintes qui produisent la sensation de poids. Considérons maintenant les forces, dites *surfaciques*, qui ne s'exercent qu'aux éléments du corps situés à sa surface. Parmi celles-ci, on peut citer tout d'abord la réaction d'appui, ainsi que la poussée d'un propulseur en fonctionnement, la force de résistance de l'atmosphère, la force de frottement, etc. Ce sont les forces surfaciques qui produisent la sensation de poids en faisant naître des contraintes dans le corps.

Remarquons que la sensation de poids peut se manifester en l'absence de la pesanteur, aussi paradoxal que cela puisse paraître. Imaginons par exemple un corps de masse m animé d'un mouvement

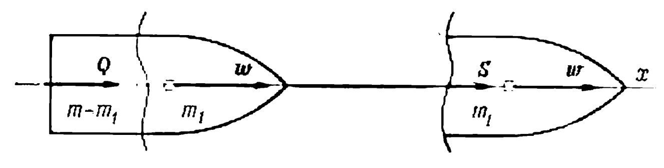


Fig. 16.12

de translation horizontal sous l'action d'une force horizontale surfacique Q ; cette force fait naître dans chaque section verticale ab du corps des contraintes horizontales dont la résultante S est de module

$$S = \frac{m_1}{m} Q$$

(fig. 16.12). On le vérifie aisément en comparant deux équations

$$m_1 w_x = S, \quad m w_x = Q.$$

La sensation de poids revêt ici un caractère non gravitationnel, bien que d'après les contraintes qu'elle fait naître dans le corps elle ne se distingue en rien de la pesanteur qui se manifeste quand on arrête le corps indiqué, le met en sa position verticale et lorsqu'on remplace l'action de la force Q par la réaction d'appui dont l'intensité est égale au poids du corps.

Si le module de la force Q est supérieur au poids P du corps, il se produit un phénomène de « surpesanteur » qu'on désigne sous le terme traditionnel d'*accélération*. Son effet est caractérisé par le *facteur d'accélération*

$$n = \frac{Q}{P}.$$

Quand le corps pesant se trouve en repos, on a de toute évidence $n = 1$. Très souvent le facteur d'accélération désigne le rapport de l'accélération $a = \frac{Q}{P} g$, créée par la force Q, à l'accélération de la

pesanteur g:

$$n=\frac{a}{g}.$$

L'homme se voit très souvent exposé à des accélérations qui atteignent des valeurs considérables: le sportif qui fait un plongeon éprouve une accélération égale à 16 g due à la force de résistance surfacique de l'eau, tandis que le pilote d'avion subit au moment de catapultage une accélération de 18 g. Des accélérations très élevées (et surtout nettement prolongées) sont imposées au cosmonaute pendant le lancement du vaisseau spatial, surtout pendant sa mise en vitesse par le propulseur à réaction dont la poussée est plusieurs fois supérieure au poids du vaisseau, ainsi que pendant le freinage du vaisseau à sa rentrée dans les couches denses de l'atmosphère.

Pendant toutes les autres phases de vol où le propulseur est à l'arrêt, c'est l'état d'apesanteur qui règne à bord: toute force surfacique extérieure est absente (à moins de prendre en considération la résistance absolument négligeable qu'offrent les couches raréfiées de l'atmosphère à haute altitude), si bien que tous les éléments du vaisseau se déplacent avec la même vitesse et avec la même accélération égale à celle de la pesanteur:

$$w_x = P(x)/m,$$

où $P(x)$ est défini par la formule *) (13.32).

Rappelons que tous ces raisonnements ne s'appliquent qu'à un vaisseau qui se déplace en translation. Une image nous aidera à saisir la portée de ce phénomène: si tous les liens entre les parties du vaisseau disparaissaient tout à coup, le vaisseau, bien que réduit à un amas de pièces isolées, conserverait sa forme intacte: aucune partie ne volerait plus vite qu'une autre, car son mouvement serait rigoureusement identique à celui de l'autre. En réalité, à bord du vaisseau qui représente un système de corps solides, la pression d'une partie du vaisseau sur une autre disparaît complètement: la tête d'homme cesse de peser sur ses épaules, les pieds ne « foulent » plus le plancher, un objet tenu à la main perd tout poids, le siège du cosmonaute n'appuie plus sur son socle, et ainsi de suite.

L'état d'apesanteur persiste non seulement quand le vaisseau se déplace uniformément suivant une orbite circulaire, mais aussi pendant son mouvement suivant n'importe quelle autre conique le long de laquelle la vitesse du vaisseau peut varier considérablement.

*) On peut admettre sans erreur appréciable que tous les éléments du vaisseau se trouvent à la même distance du centre de la Terre.

Exercices

Exercice 16.1. Un petit anneau pesant de masse m est enfilé sur un cercle vertical lisse en fil de fer de rayon R. Se trouvant à l'instant initial au point le plus bas du cercle, l'anneau se voit imprimer une vitesse initiale v_0. Chercher la condition pour que l'anneau fasse le tour complet du cercle; déterminer la pression N exercée par l'anneau sur le cercle au point le plus haut de ce dernier.

Réponse. $v_0 \geqslant \sqrt{2gR}$, $N = 3mg - \frac{mv_0^2}{R}$.

Exercice 16.2. Un point matériel pesant est suspendu par deux fils identiques à deux appuis se trouvant à la même hauteur; chaque fil fait

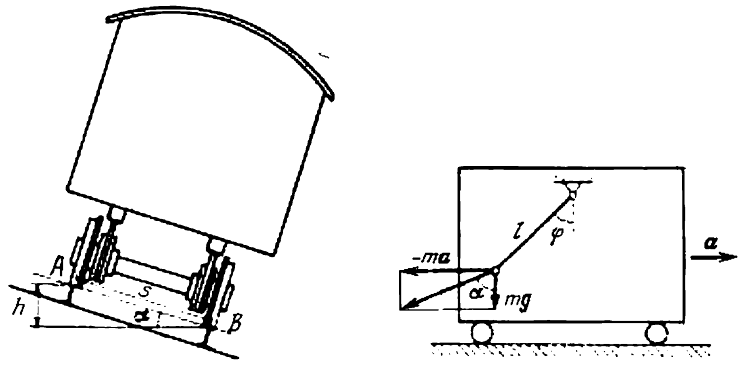


Fig. 16.13 Fig. 16.14

un angle α avec la verticale. On coupe brusquement un des fils. Chercher le rapport de la nouvelle tension T du fil restant à sa tension initiale T_0.

Réponse. $T : T_0 = 2\cos^2\alpha$.

Exercice 16.3. Déterminer le surélèvement h du rail extérieur en courbe (fig. 16.13). Le rayon de la voie en courbe est R, la largeur de la voie s, la vitesse du train v.

Indication. La résultante du poids mg du wagon et de la force d'entraînement de Coriolis (« force centrifuge ») $(-mw_e)$, appliquée, elle aussi, au centre de gravité du wagon, doit être perpendiculaire à la droite AB joignant les champignons des rails; cette condition permet de déterminer tg α (fig. 16.13).

Réponse. $h = s\sin\alpha = \frac{v^2}{\sqrt{v_4 + R^2g^2}}s$.

Exercice 16.4. Un pendule simple est placé à l'intérieur du wagon qui roule sur une voie rectiligne avec une accélération constante a (fig. 16.14). On demande de savoir la période d'oscillation T du pendule si la longueur du fil inextensible du pendule est égale à l.

Réponse. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$.

CHAPITRE XVII

STATIQUE ANALYTIQUE

§ 1. Principe des travaux virtuels

1.1. Définitions fondamentales. Ce chapitre est consacré à l'étude de l'équilibre du *système de points matériels*. Il s'agit d'un ensemble de points matériels dont le mouvement est gêné, d'une part, par les actions mutuelles des points à l'intérieur du système, et, d'autre part, par les liaisons imposées au système. On dit que le système de points matériels est *libre* si les liaisons sont inexistantes et *non libre* ou *gêné* dans le cas contraire. Un exemple de système de points libre est fourni par le système solaire.

En mécanique on appelle *liaisons* les contraintes ou limitations imposées aux positions ou aux mouvements des points du système. On suppose que les liaisons sont connues à priori et ne dépendent ni des forces agissantes, ni des conditions initiales du mouvement. Les liaisons sont matérialisées par des surfaces, des tringles, des fils, etc.

Nous envisagerons *seulement des liaisons géométriques* (holonomes) et *indépendantes du temps* (*stationnaires*, ou scléronomes). Autrement dit, les équations définissant ces liaisons ne contiennent aucune dérivée des coordonnées et le temps t n'y intervient jamais explicitement. Nous supposerons en outre que les points matériels ne peuvent se séparer des liaisons: on dit que les liaisons sont *bilatérales*. Un bon exemple de liaison géométrique stationnaire bilatérale imposée aux points est la distance invariable qui sépare deux points quelconques d'un corps solide.

Les liaisons imposées aux points du système sont incompatibles avec certains déplacements du système.

On appelle *déplacements virtuels* (possibles) *du système* tous déplacements infiniment petits des points du système, compatibles avec les liaisons imposées et se produisant au même instant. En d'autres termes, un déplacement virtuel du système est un des déplacements élémentaires de ses points (lorsque les points se déplacent de leurs positions qu'ils occupaient à l'instant donné en des positions infiniment proches), qui respectent les liaisons imposées. Soient x_ν, y_ν, z_ν les coordonnées d'un ν-ième point M_ν du système. Le dé-

placement virtuel du ν-ième point est exprimé par le vecteur

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \delta x_\nu \boldsymbol{i} + \delta y_\nu \boldsymbol{j} + \delta z_\nu \boldsymbol{k}.$$

Ici $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sont les vecteurs unités des axes du repère orthonormé inertiel $Oxyz$; δx_ν, δy_ν, δz_ν sont les projections du déplacement virtuel sur ces axes, appelées *variations des coordonnées*.

Tout déplacement réel des points du système qui se produit en un temps infiniment court dans leur mouvement réel sous l'action des forces appliquées est (pour des liaisons stationnaires) un déplacement virtuel. Au contraire, tout déplacement virtuel des points du système n'est pas un déplacement réel. Le déplacement réel d'un ν-ième point est exprimé par le vecteur

$$d\boldsymbol{r}_\nu = dx_\nu \boldsymbol{i} + dy_\nu \boldsymbol{j} + dz_\nu \boldsymbol{k}.$$

Ici comme précédemment $\boldsymbol{r}_\nu$ est le rayon vecteur du ν-ième point ; dx_ν, dy_ν, dz_ν sont les différentielles des coordonnées.

1.2. Définition des liaisons parfaites. Il est possible de remplacer l'action des liaisons par les réactions : nous connaissons cet axiome depuis la statique élémentaire (ch. I, n° 2.8) et l'analyse du mouvement du point matériel gêné (ch. XVI, Introduction).

A x i o m e d e s l i a i s o n s p o u r l e s y s t è m e d e p o i n t s m a t é r i e l s. *A condition d'ajouter aux actions* (forces actives) *données les réactions de liaison* (forces passives), *on peut supprimer toutes les liaisons imposées au système et provoquant les réactions en question.*

Il ressort de cet axiome que nous pouvons supprimer les liaisons soit totalement (le système de points matériels devenant libre), soit en partie (le système restant incomplètement libre, ou partiellement gêné).

Soit un système $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ composé de n points matériels. Soient $R_x^{(\nu)}$, $R_y^{(\nu)}$, $R_z^{(\nu)}$ les projections sur les axes Ox, Oy, Oz de la résultante $\boldsymbol{R}_\nu$ des réactions des liaisons imposées à un point M_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$). Nous nous bornons à considérer des liaisons *parfaites*.

D é f i n i t i o n. *On dit que les liaisons sont parfaites si la somme des travaux élémentaires* (voir ch. XV, n° 3.1) *des réactions de ces liaisons est nulle pour tout déplacement virtuel des points du système*,

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{R}_\nu, \delta \boldsymbol{r}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} (R_x^{(\nu)} \delta x_\nu + R_y^{(\nu)} \delta y_\nu + R_z^{(\nu)} \delta z_\nu) = 0. \quad (17.1)$$

Donnons quelques exemples de liaisons parfaites (on dit aussi liaisons polies, ou liaisons sans frottement).

a) Point matériel M assujetti à rester sur une surface fixe polie T (fig. 17.1, a) ou sur une courbe fixe polie L (fig. 17.1, b). La réac-

tion de liaison N est dirigée suivant la normale n à la surface ou suivant une des normales n' à la courbe. Les déplacements virtuels $\delta\boldsymbol{r}$ du point M peuvent s'effectuer dans le plan tangent à la surface T ou suivant la tangente τ à la courbe en M. On a dans les deux cas $\boldsymbol{N} \perp \delta\boldsymbol{r}$, d'où

$$(\boldsymbol{N},\ \delta\boldsymbol{r}) = N_x\delta x + N_y\delta y + N_z\delta z = 0.$$

b) Solide à deux points fixes (voir fig. 5.16). Le travail des forces de réaction $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ est nul, car les points d'application des réactions de liaison restent fixes pour n'importe quel déplacement virtuel (rotation d'un angle infiniment petit $\delta\varphi$) du solide.

c) Liaisons imposées aux points du solide parfait. La condition de liaison se traduit ici par le fait que la distance entre deux points

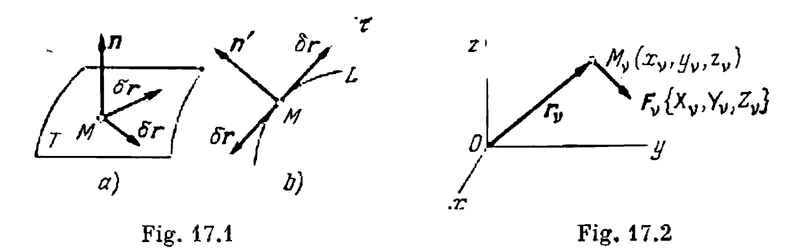


Fig. 17.1 Fig. 17.2

quelconques du solide est invariable. La somme des travaux des forces d'interaction des points du solide est donc nulle pour tout déplacement virtuel de ce solide.

Supposons que les points M_1, M_2, . . ., M_n du système soient sollicités par des forces actives $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, . . ., $\boldsymbol{F}_n$ respectivement (fig. 17.2). Si un point M_ν est sollicité par plusieurs forces à la fois, $\boldsymbol{F}_\nu$ est la force résultante. Les projections de la force $\boldsymbol{F}_\nu$ sur les axes Ox, Oy, Oz seront désignées par X_ν, Y_ν, Z_ν, si bien que

$$\boldsymbol{F}_\nu = X_\nu\boldsymbol{i} + Y_\nu\boldsymbol{j} + Z_\nu\boldsymbol{k} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

1.3. Principe des travaux virtuels (Jean Bernoulli, 1667-1748). *Le système de points matériels soumis à des liaisons géométriques, stationnaires, bilatérales, parfaites est en équilibre si et seulement si la somme des travaux élémentaires des forces actives est nulle pour tout déplacement virtuel du système à partir de la position d'équilibre considérée,*

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{n} \delta A_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{F}_\nu,\ \delta\boldsymbol{r}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu\delta x_\nu + Y_\nu\delta y_\nu + Z_\nu\delta z_\nu) = 0, \tag{17.2}$$

à condition que le système soit fixe à l'instant initial.

D é m o n s t r a t i o n. La condition est n é c e s s a i r e. On sait que le système de points matériels est en équilibre; on veut montrer que la condition (17.2) est vérifiée. Supprimons les liaisons imposées au système en ajoutant aux actions $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ les réactions de liaison $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$. Puisque chaque point du système est en équilibre, on a

$$\boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{17.3}$$

ou en termes de projections

$$X_\nu + R_x^{(\nu)} = 0, \quad Y_\nu + R_y^{(\nu)} = 0, \quad Z_\nu + R_z^{(\nu)} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{17.4}$$

Multiplions scalairement l'égalité vectorielle (17.3) par le vecteur déplacement virtuel $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ du point M_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) et faisons la somme des produits scalaires obtenus:

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{F}_\nu, \delta\boldsymbol{r}_\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{R}_\nu, \delta\boldsymbol{r}_\nu) = 0,$$

ou en termes de projections

$$\sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu) + \\ + \sum_{\nu=1}^{n} (R_x^{(\nu)} \delta x_\nu + R_y^{(\nu)} \delta y_\nu + R_z^{(\nu)} \delta z_\nu) = 0.$$

Or, la seconde somme est égale à zéro en vertu de la définition des liaisons parfaites (17.1), si bien qu'on retrouve (17.2). La condition est bien nécessaire.

La condition est s u f f i s a n t e. Supposons que la condition (17.2) soit vérifiée; on veut montrer que le système de points matériels est en équilibre. Ajoutons aux actions données $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ les réactions $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$. Le système peut alors être considéré comme libre. Désignons par $\tilde{\delta}\boldsymbol{r}_\nu$,

$$\tilde{\delta}\boldsymbol{r}_\nu = \tilde{\delta}x_\nu \boldsymbol{i} + \tilde{\delta}y_\nu \boldsymbol{j} + \tilde{\delta}z_\nu \boldsymbol{k} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

les déplacements virtuels des points l i b r e s. Pour un tel système le principe des travaux virtuels s'écrira sous la forme

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu, \tilde{\delta}\boldsymbol{r}_\nu) = 0,$$

avec $\tilde{\delta}\boldsymbol{r}_\nu$ un vecteur déplacement quelconque de module aussi petit que l'on veut. Posons dans la dernière égalité

$$\tilde{\delta}\boldsymbol{r}_\nu = \alpha (\boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

où $\alpha > 0$ est une quantité infiniment petite. Il vient

$$\alpha \sum_{\nu=1}^{n} (F_\nu + R_\nu)^2 = \alpha \sum_{\nu=1}^{n} [(X_\nu + R_x^{(\nu)})^2 + (Y_\nu + R_y^{(\nu)})^2 + $$
$$+ (Z_\nu + R_z^{(\nu)})^2] = 0.$$

Puisque la somme des carrés est égale à zéro, on a

$$X_\nu + R_x^{(\nu)} = 0, \quad Y_\nu + R_y^{(\nu)} = 0, \quad Z_\nu + R_z^{(\nu)} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n);$$

on retrouve donc les conditions (17.4). Si, par ailleurs, les vitesses initiales de tous les points du système sont nulles (le système étant supposé fixe à l'instant initial):

$$\dot{x}_\nu(0) = \dot{y}_\nu(0) = \dot{z}_\nu(0) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

le système considéré est en équilibre, ce qui achève la démonstration du théorème.

1.4. Quelques applications élémentaires du principe des travaux virtuels. Le premier principe de la statique analytique fut le principe de Torricelli *). Soit un système de n points matériels de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ gêné par des liaisons géométriques, stationnaires, bilatérales, parfaites. Supposons que la seule force appliquée au système soit le poids,

$$X_\nu = Y_\nu = 0, \qquad Z_\nu = -m_\nu g \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

(voir fig. 17.2). L'égalité (17.2) s'écrira alors sous la forme

$$\delta A = -g \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \delta z_\nu = 0, \quad \text{ou} \quad \delta \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu = 0.$$

Or, la dernière somme est égale, en vertu de (6.9), à Mz_C, où $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ est la masse totale du système et z_C la cote de son centre de gravité. On a donc en position d'équilibre

$$\delta z_C = 0. \qquad (17.5)$$

P r i n c i p e d e T o r r i c e l l i. *Quand le système de corps matériels pesants gênés par des liaisons géométriques, stationnaires, bilatérales, parfaites se trouve en équilibre, la cote de son centre de gravité a une valeur extrémale.*

Illustrons ce qui vient d'être dit par un exemple (fig. 17.3).

Examinons maintenant l'application du principe des travaux virtuels aux machines simples. Supposons qu'une force $\boldsymbol{P}$ soit appliquée au point A de la machine, alors que son point B est le

---

*) E v a n g e l i s t a T o r r i c e l l i, physicien italien (1608-1647).

point d'application de la force résistante Q (fig. 17.4). Ces deux forces, de même que les déplacements virtuels $\delta \boldsymbol{r}_A$ et $\delta \boldsymbol{r}_B$, sont dirigées suivant les tangentes aux trajectoires de A et de B. A titre d'exemple, on peut prendre un levier du premier ou du deuxième

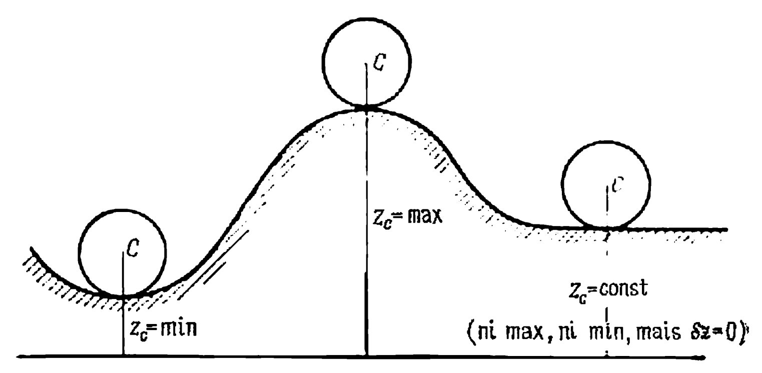


Fig. 17.3

genre. En vertu du principe des travaux virtuels (17.2), on a en position d'équilibre de la machine

$$(\boldsymbol{P},\ \delta \boldsymbol{r}_A) + (\boldsymbol{Q},\ \delta \boldsymbol{r}_B) = P \mid \delta \boldsymbol{r}_A \mid - Q \mid \delta \boldsymbol{r}_B \mid = 0. \quad (17.5)$$

Désignons $\delta p = \mid \delta \boldsymbol{r}_A \mid$, $\delta q = \mid \delta \boldsymbol{r}_B \mid$ et supposons que les déplacements réels des points A et B, qui sont aussi des déplacements virtuels

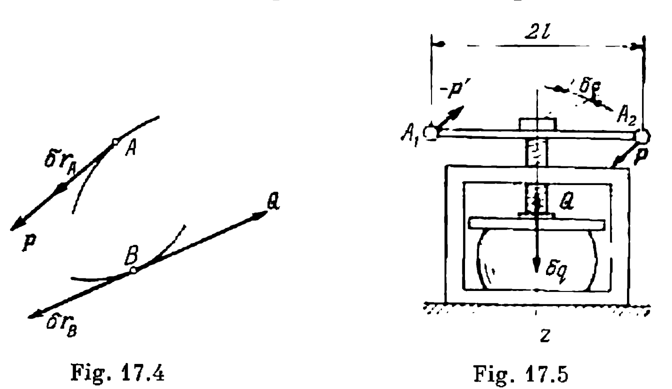


Fig. 17.4 Fig. 17.5

(car les liaisons sont stationnaires), se produisent pendant un temps δt. Divisons l'égalité (17.5) par δt ; il vient

$$Pu - Qv = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q} = \frac{v}{u}, \quad (17.6)$$

où $u = \delta p/\delta t$, $v = \delta q/\delta t$ sont les vitesses virtuelles des points A et B (notons que Jean Bernoulli a formulé son principe pour les

vitesses virtuelles). Nous venons de démontrer la fameuse « règle d'or de la mécanique », qui traduit la loi fondamentale des machines simples:

Ce qu'on gagne en force, on le perd en chemin parcouru ou en vitesse.

La règle d'or permet d'établir immédiatement les conditions d'équilibre, donc aussi le rapport entre la force motrice P et la résistance Q, pour de nombreux mécanismes et machines, tels que: le plan incliné, le coin, la vis, les engrenages, etc.

Exemple 17.1. On exerce sur la manivelle de la presse à vis (fig. 17.5) un moment de rotation (moment moteur) $M_z = 2Pl$, tandis que le plateau de presse subit la réaction Q du corps comprimé, faisant office de force résistante. On demande de déterminer les conditions d'équilibre de la machine (admettant que la machine est parfaite).

Solution. Donnons au système un déplacement virtuel: supposons que la vis a tourné d'un angle $\delta\varphi > 0$, ce qui correspond à un déplacement $\delta q > 0$ du plateau de presse. Les déplacements des points A_1 et A_2 dirigés suivant les tangentes à la circonférence sont égaux en module à

$$\delta p = l\,\delta\varphi.$$

D'après la formule (17.5)

$$2Pl\,\delta\varphi - Q\,\delta q = 0, \quad \text{ou} \quad M_z\,\delta\varphi - Q\,\delta q = 0.$$

Cherchons la relation entre $\delta\varphi$ et δq. Soit h le pas de la vis, c'est-à-dire la valeur du déplacement de la vis vers le haut ou vers le bas qui correspond à un tour. On a la proportion

$$\frac{\delta\varphi}{2\pi} = \frac{\delta q}{h}, \quad \text{d'où} \quad \delta q = \frac{h}{2\pi}\,\delta\varphi.$$

Portons δq dans la condition d'équilibre:

$$M_z\delta\varphi - Q\frac{h}{2\pi}\,\delta\varphi = 0$$

et simplifions par $\delta\varphi$. Il vient

$$M_z = \frac{Qh}{2\pi}.$$

Soulignons que les réactions de liaison n'interviennent pas dans le principe des travaux virtuels, ce qui permet de résoudre les problèmes de la statique sans chercher les réactions.

Exemple 17.2. L'articulation A du quadrilatère articulé $OABC$, dont le côté OC est fixe, est soumise à une force P agissant sous 90° par rapport à OA (fig. 17.6). On demande de savoir la force Q appliquée à l'articulation B sous 60° par rapport à CB si $\widehat{OAB} = 150°$ et $\widehat{ABC} = 90°$.

Solution. Donnons au système un déplacement virtuel: la rotation de OA autour de O d'un angle $\delta\varphi$ dans le sens antihoraire. Le point A aura alors un déplacement δr_A perpendiculaire à OA, et le point B un déplacement δr_B perpendiculaire à CB et qui se confondra en direction avec BA. Ecrivons

l'équation des travaux (17.2):

$$(P,\ \delta r_A) + (Q,\ \delta r_B) = -P\,|\,\delta r_A\,| + Q\,|\,\delta r_B\,|\cos 30^\circ = 0.$$

En vertu du théorème d'égalité des projections des vecteurs vitesse des extrémités d'un segment sur la direction du segment (formule (10.7)), on a

$$\mathrm{proj}_{BA}\,\delta r_B = \mathrm{proj}_{BA}\delta r_A,$$

ou

$$|\,\delta r_B\,| = |\,\delta r_A\,|\cos 60^\circ = \frac{1}{2}\,|\,\delta r_A\,|.$$

Portant ces expressions dans l'équation des travaux, on obtient

$$-P\,|\,\delta r_A\,| + \frac{1}{2}Q\,|\,\delta r_A\,|\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

d'où

$$Q = \frac{4}{\sqrt{3}}P = 2{,}31P.$$

Grâce au principe des travaux virtuels, on peut calculer aussi les réactions. A cet effet, on supprime toutes ou une partie des liai-

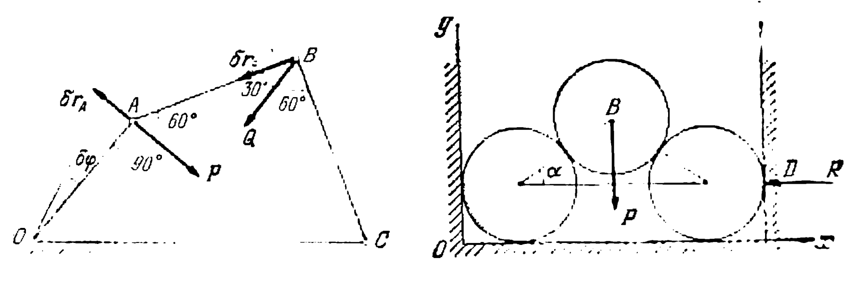


Fig. 17.6 Fig. 17.7

sons, selon qu'on cherche toutes ou une partie des réactions. Nous allons le montrer à l'aide d'un exemple.

E x e m p l e 17.3. Trois tubes identiques, de poids P chacun, sont disposés de la façon montrée sur la figure 17.7. Déterminer la pression qu'ils exercent sur les parois polies.

S o l u t i o n. Supprimons une liaison, par exemple la paroi droite en lui substituant la réaction R. Appliquons-nous à chercher la force active horizontale R qu'on doit appliquer au tube inférieur de droite pour maintenir les tubes en équilibre. Si l'on donne au tube inférieur de droite un déplacement virtuel le long de l'axe Ox, seules les forces P et R produiront du travail. En position d'équilibre, conformément au principe des travaux virtuels (17.2), on a

$$\delta A = -P\,\delta y_B - R\,\delta x_D = 0. \qquad (1)$$

Soit r le rayon du tube. En regardant le dessin, on s'assure que

$$y_B = r + 2r\sin\alpha, \qquad x_D = 2r + 4r\cos\alpha.$$

On en déduit les variations des coordonnées:

$$\delta y_B - \frac{dy_B}{d\alpha}\delta\alpha = 2r\cos\alpha\,\delta\alpha, \qquad \delta x_D = \frac{dx_D}{d\alpha}\delta\alpha = -4r\sin\alpha\,\delta\alpha.$$

Portons-les dans (1), il vient

$$-P\cdot 2r\cos\alpha\,\delta\alpha + R\cdot 4r\sin\alpha\,\delta\alpha = 0.$$

On en tire pour $\delta\alpha \neq 0$

$$R=\frac{1}{2}P\operatorname{cotg}\alpha.$$

Dans le cas particulier où les tubes inférieurs sont en contact, on a $\alpha = 60°$ et

$$R=\frac{1}{2}P\operatorname{cotg}60°=\frac{\sqrt{3}}{6}P=0{,}289P.$$

§ 2. Conditions d'équilibre du système de points matériels en coordonnées généralisées

2.1. Nombre de degrés de liberté. Considérons un système constitué de n points matériels $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Les résultantes des forces actives appliquées aux points du système seront désignées respectivement par $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$, et leurs projections, par exemple celles de $\boldsymbol{F}_\nu$, sur les axes du repère inertiel $Oxyz$ par

$$X_\nu,\ Y_\nu,\ Z_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Supposons que le système soit gêné par des liaisons géométriques, stationnaires, bilatérales, parfaites (voir nº 1.2), qui sont au nombre de m. Puisque nous nous bornons à considérer les liaisons de l'espèce indiquée, nous sommes en droit de dire que le système est soumis à $m < 3n$ liaisons définies par les équations

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0,\\ &f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &f_m(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0. \end{aligned} \tag{17.7}$$

Ici x_ν, y_ν, z_ν sont les coordonnées d'un point M_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$). Nous admettons que les équations (17.7) sont indépendantes. Alors $3n$ coordonnées cartésiennes vérifient m équations (17.7), et le nombre k de coordonnées indépendantes est

$$k = 3n - m. \tag{17.8}$$

Le *nombre k de degrés de liberté* d'un système de points matériels est le nombre des coordonnées indépendantes qui définissent la position du système. Les liaisons étant de la nature indiquée, le nombre de coordonnées indépendantes est égal au nombre des déplacements virtuels indépendants du système considéré.

Exemples. a) Un système constitué de deux points matériels reliés par une barre a cinq degrés de liberté. En effet, la position de deux points se laisse définir par six coordonnées (x_1, y_1, z_1),

(x_2, y_2, z_2) qui vérifient ensemble la relation

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2$$

selon laquelle le carré de la distance entre les points est une quantité constante. On a donc $n = 2$, $m = 1$ et d'après la formule (17.8) $k = 3 \cdot 2 - 1 = 5$.

b) Pour un point matériel mobile sur une surface, on a $k = 2$; pour un point matériel mobile assujetti à rester sur une courbe, on a $k = 1$ (un seul degré de liberté). En effet, la position d'une courbe dans l'espace se définit par deux équations, si bien que $m = 2$ et $k = 3 \cdot 1 - 2 = 1$.

c) Un solide libre possède six degrés de liberté. En effet, il admet trois translations virtuelles indépendantes suivant trois axes deux à deux perpendiculaires et trois rotations virtuelles indépendantes autour de ces axes.

d) Un solide à un point fixe présente trois degrés de liberté. Un solide à deux points fixes n'admet qu'un seul déplacement virtuel: la rotation autour de la droite joignant ces points, donc un seul degré de liberté.

Les coordonnées cartésiennes des points du système gêné par m liaisons imposées se laissent exprimer par k paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_k$, appelés *coordonnées généralisées* (ou déterminantes) :

$$x_\nu = x_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_k), \qquad y_\nu = y_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_k),$$
$$z_\nu = z_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_k) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{17.9}$$

Les projections δx_ν, δy_ν, δz_ν du déplacement virtuel $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ d'un point M_ν, ou, ce qui revient au même, les variations des coordonnées cartésiennes des points du système se définissent par des formules analogues à celles de la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables (voir Piskounov, t. I. ch. XIII, § 7):

$$\delta x_\nu = \frac{\partial x_\nu}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x_\nu}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial x_\nu}{\partial q_k}\delta q_k,$$
$$\delta y_\nu = \frac{\partial y_\nu}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y_\nu}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial y_\nu}{\partial q_k}\delta q_k,$$
$$\delta z_\nu = \frac{\partial z_\nu}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z_\nu}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial z_\nu}{\partial q_k}\delta q_k,$$

ou

$$\delta x_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa}\delta q_\varkappa, \qquad \delta y_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial y_\nu}{\partial q_\varkappa}\delta q_\varkappa, \qquad \delta z_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial z_\nu}{\partial q_\varkappa}\delta q_\varkappa$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{17.10}$$

où $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ sont les variations des coordonnées généralisées.

2.2. Forces généralisées. Cherchons l'expression du travail virtuel δA en coordonnées généralisées. A cet effet, portons dans le premier membre de la formule (17.2) les expressions des variations des coordonnées tirées de (17.10) et transformons l'expression obtenue:

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \left[X_\nu \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa} \delta q_\varkappa + Y_\nu \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial y_\nu}{\partial q_\varkappa} \delta q_\varkappa + Z_\nu \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial z_\nu}{\partial q_\varkappa} \delta q_\varkappa \right] =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{k} \left(X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_\varkappa} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_\varkappa} \right) \delta q_\varkappa =$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{k} \left[\sum_{\nu=1}^{n} \left(X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_\varkappa} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_\varkappa} \right) \right] \delta q_\varkappa .$$

La quantité

$$Q_\varkappa = \sum_{\nu=1}^{n} \left(X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_\varkappa} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_\varkappa} \right) \qquad (17.11)$$

est appelée *force généralisée* correspondant à la coordonnée généralisée $q_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$.

Ainsi donc, les forces généralisées $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ correspondant aux coordonnées généralisées $q_1, q_2, \ldots, q_k$ se laissent exprimer, conformément aux équations (17.9), en fonction des projections des forces actives d'après les formules (17.11). L'expression du travail virtuel prend alors la forme

$$\delta A = \sum_{\varkappa=1}^{k} Q_\varkappa \delta q_\varkappa = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_k \delta q_k . \qquad (17.12)$$

Elle permet de formuler une deuxième règle (après (17.11)) pour le calcul de la force généralisée. Considérons un déplacement virtuel tel que

$$\delta q_1 = 0, \ \ldots, \ \delta q_{i-1} = 0, \qquad \delta q_i \neq 0, \qquad \delta q_{i+1} = 0, \ \ldots, \ \delta q_k = 0.$$

On a alors

$$\delta_i A = Q_i \delta q_i ,$$

ce qui permet de déterminer

$$Q_i = \frac{\delta_i A}{\delta q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \qquad (17.13)$$

R è g l e. Pour déterminer la force généralisée Q_i (correspondant à la coordonnée généralisée q_i), il suffit de donner au système un

déplacement virtuel qui ne fasse changer que la coordonnée q_i et de calculer la somme $\delta_i A$ des travaux élémentaires de toutes les forces actives appliquées au système: la quantité Q_i s'obtient alors en faisant intervenir la formule (17.13).

2.3. Conditions d'équilibre du système de points matériels en coordonnées généralisées. En vertu de (17.12), l'expression mathématique (17.2) du principe des travaux virtuels prend la forme

$$\delta A = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_k\delta q_k = 0. \qquad (17.14)$$

L'égalité (17.14) (équivalente à (17.2)) est la condition nécessaire et suffisante pour que le système de points matériels considéré, soumis aux liaisons indiquées plus haut, se trouve en équilibre. Or, puisque les variations $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ sont indépendantes, au même titre que les coordonnées généralisées $q_1, q_2, \ldots, q_k$, il ressort de la condition (17.14) que

$$Q_1 = 0, \qquad Q_2 = 0, \ldots, Q_k = 0. \qquad (17.15)$$

En effet, donnons au système un déplacement virtuel, par exemple tel que

$$\delta q_1 \neq 0, \qquad \delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_k = 0.$$

On a alors en position d'équilibre

$$\delta_1 A = Q_1\delta q_1 = 0;$$

l'égalité $Q_1 = 0$ est donc nécessaire. Par un raisonnement analogue, on s'assure que toutes les autres égalités (17.15) sont également nécessaires pour que le système soit en équilibre.

Pour montrer que les égalités (17.15) sont des conditions suffisantes de l'équilibre du système, il suffit de les porter dans la formule (17.14): on obtient $\delta A = 0$, ce qui représente, en vertu du principe des travaux virtuels, la condition suffisante de l'équilibre du système.

Ainsi donc, *pour que le système de points matériels gêné par des liaisons soit en équilibre il faut et il suffit* *) *que toutes les forces généralisées soient nulles.* Les égalités (17.15) sont appelées *conditions d'équilibre du système en coordonnées généralisées* (indépendantes).

Exemple 17.4. L'articulation A du mécanisme bielle-manivelle (fig. 17.8) est sollicitée par une force F_1 perpendiculaire à la manivelle OA, et le coulisseau B, par une force horizontale F_2. Abstraction faite du poids et du frottement, chercher la valeur de l'angle φ qui garantit l'équilibre du mécanisme.

Solution. Le système de deux ($n = 2$) points matériels A, B est gêné par cinq liaisons ($m = 5$). Deux liaisons sont triviales: en effet, le mouvement est plan, si bien que les cotes des points A et B sont nulles:

$$z_1 = 0, \qquad z_2 = 0.$$

*) La condition est suffisante si le système est fixe à l'instant initial.

En outre, le coulisseau B est guidé par des glissières horizontales, si bien que

$$y_2 = 0.$$

Enfin, les longueurs de la manivelle OA et de la bielle AB sont constantes, et l'on a

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2, \qquad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2.$$

Conformément à (17.8), on a $k = 3\cdot 2 - 5 = 1$; cela revient à dire que le mécanisme bielle-manivelle n'admet qu'un seul degré de liberté, donc une seule coordonnée indépendante. Comme coordonnée généralisée, on peut retenir

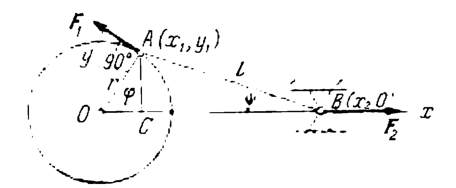


Fig. 17.8

l'angle de rotation φ de la manivelle. En effet, exprimons les coordonnée cartésiennes des points A, B en fonction de φ:

$$x_2 = OB = OC + CB = r\cos\varphi + l\cos\psi.$$

On a dans le triangle OAB d'après le théorème des sinus

$$\frac{\sin\psi}{r} = \frac{\sin\varphi}{l}, \quad \text{d'où} \quad \sin\psi = \frac{r}{l}\sin\varphi.$$

Désignons le rapport r/l par λ et calculons

$$\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} &x_1 = r\cos\varphi, \quad y_1 = r\sin\varphi; \\ &x_2 = r\cos\varphi + l\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}, \quad y_2 = 0. \end{aligned} \tag{17.16}$$

Ces équations sont équivalentes à (17.9) pour le cas considéré.

L'unique force généralisée Q_φ se laisse déduire de la formule (17.11) où l'on remplace les dérivées partielles par les dérivées ordinaires, car les fonctions x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 dépendent uniquement de φ:

$$Q_\varphi = X_1\frac{dx_1}{d\varphi} + Y_1\frac{dy_1}{d\varphi} + Z_1\frac{dz_1}{d\varphi} + X_2\frac{dx_2}{d\varphi} + Y_2\frac{dy_2}{d\varphi} + Z_2\frac{dz_2}{d\varphi}. \tag{17.17}$$

En regardant le dessin, on voit que

$$X_1 = -F_1\sin\varphi, \quad Y_1 = F_1\cos\varphi, \quad X_2 = F_2, \quad Y_2 = 0, \quad Z_1 = Z_2 = 0.$$

Par dérivation des égalités (17.16), on trouve

$$\frac{dx_1}{d\varphi} = -r\sin\varphi, \quad \frac{dy_1}{d\varphi} = r\cos\varphi, \quad \frac{dx_2}{d\varphi} = -r\sin\varphi - l\,\frac{\lambda^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}.$$

Il découle alors de (17.17) que

$$Q_\varphi = -F_1 \sin\varphi\,(-r\sin\varphi) + F_1\cos\varphi\,(r\cos\varphi) + \\ + F_2\left[-r\sin\varphi - l\lambda\,\frac{\lambda\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}\right] = \\ = r\left[F_1 - F_2\sin\varphi\left(1+\frac{\lambda\cos\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}\right)\right].$$

S'il y a équilibre, toutes les forces généralisées doivent s'annuler. Dans notre exemple, les conditions (17.15) fournissent l'unique condition d'équilibre

$$Q_\varphi = 0, \quad \text{ou} \quad F_1 = \sin\varphi\left(1+\frac{\lambda\cos\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}\right)F_2$$

qui, pour des forces F_1, F_2 données, peut être regardée comme l'équation définissant l'angle φ_0 en position d'équilibre. Etant donné que le coefficient affectant

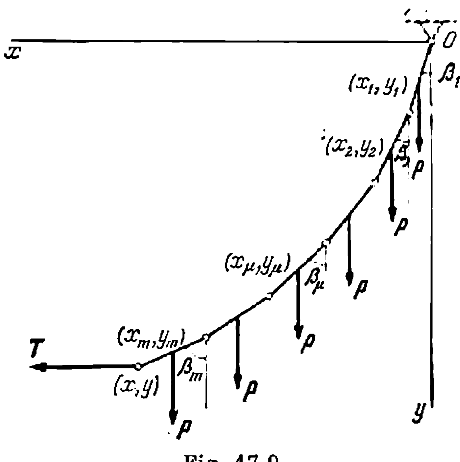


Fig. 17.9

F_2 n'est jamais supérieur à l'unité, il faut que $F_1 \leqslant F_2$ pour qu'il y ait équilibre. Dans le cas particulier où $F_1 = F_2$, on a $\sin\varphi_0 = 1$, c'est-à-dire que $\varphi_0 = \pi/2$.

Soulignons que si ce problème devait se résoudre par les méthodes de la statique élémentaire, on serait obligé de faire intervenir les réactions de l'articulation d'appui O et du plan de guidage du coulisseau B. Grâce aux méthodes de la statique analytique, on arrive à résoudre les problèmes d'équilibre sans calculer les réactions des liaisons parfaites, à moins que cela ne soit spécialement demandé.

E x e m p l e 17.5. Déterminer la position d'équilibre de m barres pesantes identiques réunies par des articulations sans frottement et sollicitées par une force de tension horizontale T. La longueur totale des m barres est l, le poids d'une unité de longueur est γ, les coordonnées du centre d'une μ-ième barre sont (x_μ, y_μ), les coordonnées du point d'application de la force T sont (x, y), l'angle formé par une μ-ième barre avec l'axe Oy est β_μ (fig. 17.9).

S o l u t i o n. Appliquons le principe des travaux virtuels (17.2):

$$\sum F_\nu \delta r_\nu = p\,\delta y_1 + p\,\delta y_2 + \ldots + p\,\delta y_m + T\,\delta x = 0. \qquad (1)$$

Ici $p = l\gamma/m$ est le poids d'une barre; $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les ordonnées des centres des barres; x l'abscisse du point d'application de la force T. Calculons x et y_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{2}\frac{l}{m}\cos\beta_1, \quad y_2 = \frac{l}{m}\cos\beta_1 + \frac{1}{2}\frac{l}{m}\cos\beta_2, \ldots, \\
y_\mu &= \frac{l}{m}\left(\cos\beta_1 + \ldots + \cos\beta_{\mu-1} + \frac{1}{2}\cos\beta_\mu\right), \ldots, \\
y_m &= \frac{l}{m}\left(\cos\beta_1 + \ldots + \cos\beta_{m-1} + \frac{1}{2}\cos\beta_m\right), \\
x &= \frac{l}{m}\sin\beta_1 + \ldots + \frac{l}{m}\sin\beta_m.
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

On en déduit les variations des coordonnées indiquées:

$$
\begin{aligned}
\delta y_1 &= \frac{dy_1}{d\beta_1}\delta\beta_1 = -\frac{1}{2}\frac{l}{m}\sin\beta_1\delta\beta_1, \\
\delta y_2 &= \frac{\partial y_1}{\partial\beta_1}\delta\beta_1 + \frac{\partial y_2}{\partial\beta_2}\delta\beta_2 = -\frac{l}{m}\sin\beta_1\delta\beta_1 - \frac{1}{2}\frac{l}{m}\sin\beta_2\delta\beta_2, \ldots, \\
\delta y_\mu &= -\frac{l}{m}\left(\sin\beta_1\delta\beta_1 + \ldots + \sin\beta_{\mu-1}\delta\beta_{\mu-1} + \frac{1}{2}\sin\beta_\mu\delta\beta_\mu\right), \ldots, \\
\delta y_m &= -\frac{l}{m}\left(\sin\beta_1\delta\beta_1 + \ldots + \sin\beta_{m-1}\delta\beta_{m-1} + \frac{1}{2}\sin\beta_m\delta\beta_m\right), \\
\delta x &= \frac{l}{m}(\cos\beta_1\delta\beta_1 + \ldots + \cos\beta_m\delta\beta_m).
\end{aligned}
$$

Portons-les dans (1), divisons par $-\frac{1}{2}\,l/m$ et réunissons les termes en $\delta\beta_1, \delta\beta_2, \ldots, \delta\beta_m$:

$$
\begin{aligned}
&\{p[1 + 2(m-1)]\sin\beta_1 - 2T\cos\beta_1\}\delta\beta_1 + \{p[1 + 2(m-2)]\sin\beta_2 - \\
&-2T\cos\beta_2\}\delta\beta_2 + \ldots + \{p[1 + 2(m-\mu)]\sin\beta_\mu - 2T\cos\beta_\mu\}\delta\beta_\mu + \ldots \\
&\ldots + \{p\sin\beta_m - 2T\cos\beta_m\}\delta\beta_m = 0.
\end{aligned}
$$

En vertu de (2), les angles $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ sont des coordonnées généralisées (voir (17.9)). En confrontant la dernière égalité avec (17.14), on s'assure que chaque expression entre accolades est une force généralisée correspondant à une coordonnée généralisée. Pour qu'il y ait quilibre, il faut et il suffit que soient vérifiées les égalités (17.15),

$$Q_\mu \equiv p[1 + 2(m-\mu)]\sin\beta_\mu - 2T\cos\beta_\mu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

d'où l'on déduit

$$\operatorname{tg}\beta_\mu = \frac{2T}{[1+2(m-\mu)]\,p} = \frac{2mT}{[2m-(2\mu-1)]\,l\gamma} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \qquad (3)$$

Ces formules permettent de calculer les angles $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ en position d'équilibre, qui déterminent précisément la figure d'équilibre de la ligne polygonale de barres tendue par la force T.

Exemple 17.6. *Figure d'équilibre d'un fil parfait homogène.*

Il s'agit d'un fil inextensible et parfaitement flexible. Nous examinerons son modèle représenté par un système de $2m$ barres homogènes identiques de longueur totale $2l$ réunies par des articulations sans frottement, suspendu par ses extrémités et placé dans le champ de la pesanteur. Il est admis que les points

de suspension du système A, B se trouvent à la même hauteur (fig. 17.10). Les notations seront celles de l'exemple 17.5.

Soit s_k la longueur de la ligne polygonale entre le point A et le centre (x_k, y_k) d'une k-ième barre. On a alors

$$s_k = \frac{l}{m}(k-1) + \frac{1}{2}\frac{l}{m} = \frac{l}{2m}(2k-1).$$

La figure d'équilibre du fil parfait homogène sera définie comme position limite de la figure d'équilibre de la ligne polygonale dans le cas où le nombre des barres croît indéfiniment, tandis que la longueur de chaque barre tend vers

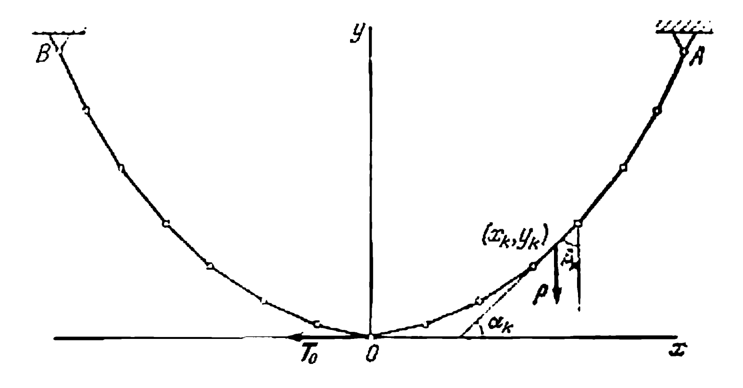


Fig. 17.10

zéro. Supprimons la partie gauche de la ligne polygonale en remplaçant son action par la tension T_0 (fig. 17.10). La tangente de l'angle d'inclinaison α_k d'une k-ième barre se définira d'après la formule (3) de l'exemple 17.5:

$$\operatorname{tg} \alpha_k = \operatorname{cotg} \beta_k = \frac{l\gamma}{2mT_0}[2m-(2k-1)].$$

Soit $y = y(x)$ l'équation de la courbe qui définit la figure d'équilibre du fil parfait homogène. Alors

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{k\to\infty} \operatorname{tg} \alpha_k = \frac{\gamma}{T_0} \lim_{k\to\infty} \left[l - \frac{l}{2m}(2k-1) \right] = \frac{\gamma}{T_0} \left[l - \lim_{k\to\infty} s_k \right]. \quad (4)$$

La quantité entre crochets dans le dernier membre est la longueur s du fil comptée entre l'origine des coordonnées et le point (x, y). Elle se définit par la formule

$$s = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

(voir Piskounov, t. I, ch. XII, § 3). Portons cette expression de s dans (4):

$$y' = \frac{\gamma}{T_0} \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

En dérivant cette identité, nous obtiendrons l'équation différentielle de la figure d'équilibre du fil :

$$\frac{dy'}{dx}=k\sqrt{1+y'^2}\qquad \left(k=\frac{\gamma}{T_0}\right). \tag{5}$$

Séparons les variables et intégrons

$$\int_0^{y'}\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}}=k\int_0^x dx.$$

Ayant trouvé l'intégrale du premier membre dans les tables, nous obtenons

$$\ln\left(y'+\sqrt{1+y'^2}\right)=kx.$$

La fonction réciproque est

$$y'+\sqrt{1+y'^2}=e^{kx}.$$

Laissons la racine seule dans le premier membre et élevons au carré les deux membres de l'égalité :

$$\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^2=(e^{kx}-y')^2.$$

Après quelques transformations bien simples, nous obtiendrons

$$y'=\frac{1}{2}\,\frac{e^{2kx}-1}{e^{kx}},\quad \text{ou}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{kx}-e^{-kx}\right).$$

Séparons de nouveau les variables et intégrons

$$\int_0^y dy=\frac{1}{2}\int_0^x\left(e^{kx}-e^{-kx}\right)dx;$$

il vient

$$y=\frac{1}{2k}\left(e^{kx}+e^{-kx}\right)\Big|_0^x=\frac{1}{k}\left(\frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2}-1\right).$$

Transportons l'origine des coordonnées suivant l'axe Oy de manière à avoir dans le nouveau système de coordonnées $y(0)=1/k$ (fig. 17.11). Il vient définitivement

$$y=\frac{1}{k}\left(\frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2}\right)=\frac{1}{k}\operatorname{ch}kx. \tag{6}$$

La fonction entre parenthèses s'appelle *cosinus hyperbolique* ($\operatorname{ch}kx$) ; la figure d'équilibre du fil parfait homogène est appelée *chaînette*.

Nous avions désigné par T_0 la tension au point le plus bas de la chaînette,

$$T_0=\frac{\gamma}{k}=\gamma y(0).$$

Or, dans chaque problème concret, la tension T_0 et, par conséquent, k restent inconnus tant que la chaînette n'a pas été construite. En plus du poids γ d'une unité de longueur du fil, nous connaissons deux autres paramètres : la longueur du fil $2l$ et la distance $2d$ entre les points de suspension (fig. 17.11). La demi-longueur du fil est égale à

$$l=\int_0^d\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^d\sqrt{1+\operatorname{sh}^2kx}\,dx=\int_0^d\operatorname{ch}(kx)\,dx=\frac{1}{k}\operatorname{sh}kd.$$

Dans cette expression figure une fonction appelée *sinus hyperbolique*:

$$\operatorname{sh} kx = \frac{1}{2}(e^{kx} - e^{-kx}).$$

On a donc

$$l = \frac{1}{2k}(e^{kd} - e^{-kd}). \qquad (7)$$

Explicitons e^{kd}:

$$e^{kd} = kl + \sqrt{1 + k^2 l^2}.$$

Portant dans cette équation transcendante les valeurs données des paramètres l et d, on détermine k, ce qui permet de construire la chaînette en se servant de la formule (6).

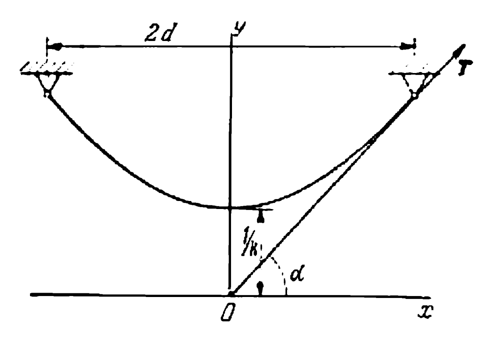


Fig. 17.11

Exemple 17.7. *Calcul de la tension du fil sur ordinateur* (conditions aux limites du premier type). Introduisons des paramètres sans dimension

$$\varkappa = kl, \qquad \delta = \frac{d}{l} \qquad (0 < \delta < 1) \qquad (8)$$

et, multipliant par k les deux membres de l'équation transcendante (7), mettons-la sous la forme

$$\varkappa = \operatorname{sh} \delta\varkappa. \qquad (9)$$

L'équation transcendante (9) a été résolue sur ordinateur ES-1033 par itérations *), à l'aide d'un programme rédigé en Fortran OS.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de $\varkappa$ pour $0{,}01 \leqslant \delta \leqslant 0{,}99$, les valeurs de δ étant échelonnées de 0,01 en 0,01.

Conformément aux notations introduites (8)

$$k = \frac{\varkappa}{l}. \qquad (10)$$

Pour déterminer la tension T du fil, remarquons que sa projection T_x sur l'axe Ox est constante pour tout point du fil (voir page 334),

$$T_x = T_0 = \frac{\gamma}{k} = \text{const.}$$

En particulier, on a pour les points extrêmes (fig. 17.11)

$$T_x = T\cos\alpha = \frac{\alpha}{k}, \ \text{d'où} \ T = \frac{\gamma}{k\cos\alpha}. \qquad (11)$$

*) Itération : exécution répétée d'une opération mathématique. Ici : méthode des approximations successives.

Tableau

Valeurs de $\varkappa$

δ	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0		728,4	323,6	199,7	141,1	107,4	85,74	70,75	59,80	51,50
0,1	45,00	39,79	35,53	31,99	29,01	26,46	24,27	22,36	20,68	19,21
0,2	17,89	16,72	15,66	14,71	13,84	13,06	12,34	11,68	11,07	10,51
0,3	9,991	9,511	9,065	8,648	8,259	7,895	7,554	7,234	6,933	6,649
0,4	6,382	6,129	5,889	5,661	5,446	5,242	5,046	4,861	4,685	4,516
0,5	4,354	4,200	4,054	3,911	3,775	3,645	3,521	3,399	3,283	3,172
0,6	3,064	2,961	2,860	2,763	2,670	2,578	2,490	2,405	2,322	2,242
0,7	2,163	2,087	2,014	1,941	1,871	1,802	1,735	1,668	1,604	1,541
0,8	1,479	1,417	1,357	1,298	1,239	1,180	1,122	1,066	1,008	0,951
0,9	0,893	0,835	0,775	0,714	0,652	0,587	0,518	0,442	0,355	0,247

De la formule (6) il découle, en vertu de (8) et (9), que

$$y'(x) = \frac{1}{2}(e^{kx} - e^{-kx}) = \operatorname{sh} kx, \qquad y'(d) = \operatorname{sh} kd = \varkappa;$$

on a donc

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(d) = \varkappa, \qquad \sec \alpha = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{1+\varkappa^2}.$$

et en vertu de (11) et (10)

$$T = \frac{\gamma}{k}\sqrt{1+\varkappa^2} = \frac{\gamma l}{\varkappa}\sqrt{1+\varkappa^2}. \tag{12}$$

O r d r e d e s c a l c u l s:

1. Pour $2d$ et $2l$ donnés, calculer (voir (8))

$$\delta = \frac{d}{l}.$$

2. Chercher $\varkappa$ dans le tableau.

3. D'après la formule (12), dans laquelle γ est le poids de l'unité de la longueur du fil, déterminer la tension du fil en ses points extrêmes.

R e m a r q u e. Les conditions aux limites du second type sont considérées dans l'exemple 25.4, page 460.

Exercices

E x e r c i c e 17.1. Le palan (appareil de levage constitué par deux poulies montées dans une chape commune mais mises sur des axes séparés, voir fig. 17.12) est doté d'un fil dont une extrémité est attachée à un point fixe du palan et l'autre, libre, est soumise à une force de tension F. Un fardeau de poids Q est suspendu à la poulie inférieure. Déterminer le rapport entre F et Q en position d'équilibre du système.

I n d i c a t i o n. Chercher le rapport entre δq et δp.

R é p o n s e. $Q = 4F$.

E x e r c i c e 17.2. La presse à genouillère OAB est constituée de deux barres $OA = a$ et $AB = b$ contenues dans le plan vertical (fig. 17.13). Une force horizontale F est appliquée à l'articulation A dans le plan OAB. Quelle est la force résistance Q offerte par le corps comprimé qui fait équilibre à F ?

I n d i c a t i o n. Donner au système un déplacement virtuel: la rotation de la barre OA d'un angle $\delta\alpha$. Exprimer les coordonnées des points A, B en fonction des longueurs des barres et des angles α, β, puis calculer les variations des coordonnées. La relation entre $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ est fournie par le théorème des sinus.

R é p o n s e. $Q = \dfrac{F}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$.

E x e r c i c e 17.3. Une barre homogène OA de poids p_1 est libre en rotation dans le plan vertical autour d'une articulation fixe O (fig. 17.14).

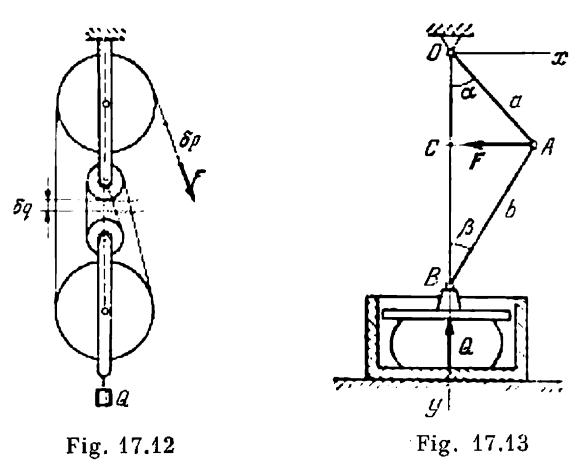


Fig. 17.12 Fig. 17.13

L'extrémité A de la barre est articulée avec une deuxième barre homogène AB de poids p_2. Une force horizontale T est exercée sur l'extrémité libre de la seconde barre. Chercher les angles α et β en position d'équilibre du système.

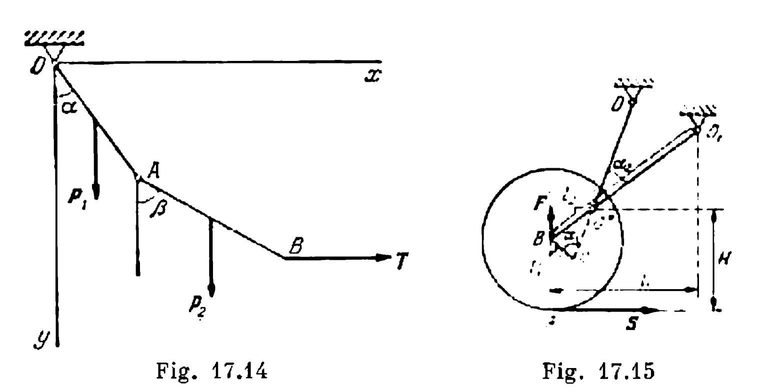


Fig. 17.14 Fig. 17.15

I n d i c a t i o n. Posé d'une façon plus générale, ce problème a déjà été discuté plus haut (voir l'exemple 17.5).

R é p o n s e. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2T}{p_1 + 2p_2}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{2T}{p_2}$.

E x e r c i c e 17.4. L'articulation B du quadrilatère articulé $OCBO_1$ (fig. 17.15) subit l'action d'une force verticale F; l'élément BC du quadrilatère

est solidaire d'un disque dont le centre se trouve en B. Une force horizontale S est appliquée suivant la tangente au disque en son point A. Les cotes en position d'équilibre du système sont indiquées sur la figure. Abstraction faite du poids des barres et du disque, ainsi que du frottement dans les articulations, déterminer le rapport entre F et S en position d'équilibre.

Indication. Les deux forces en jeu sont exercées sur un même solide, à savoir sur le disque. Le mouvement instantané du disque se réduit à la seule rotation autour du centre de rotation instantané O^*. Si le déplacement virtuel du système (assimilé à un solide) se réduit à sa rotation autour d'un axe fixe dans l'espace, la force généralisée correspondant à un tel déplacement est la somme des moments de toutes les forces actives par rapport à cet axe.

Réponse. $F = \frac{l_2 \sin \alpha_2}{l_1 \sin \alpha_1} \frac{H}{L} S$.

CHAPITRE XVIII

ÉQUATION GÉNÉRALE DE LA DYNAMIQUE. ÉQUATIONS DE LAGRANGE

§ 1. Equation générale de la dynamique

1.1. Position du problème. Soit un système de points matériels mobile par rapport à un repère cartésien rectangulaire inertiel (voir ch. XIII, nº 1.2) $Oxyz$. Soient $M_1, M_2, \ldots, M_n$ les points du système doués de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Les coordonnées des points du système à l'instant donné seront désignées par (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$, et les projections sur les axes Ox, Oy, Oz des forces $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ par $\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\{X_2, Y_2, Z_2\}, \ldots$ $\ldots, \{X_n, Y_n, Z_n\}$, où $\boldsymbol{F}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, est la résultante des forces actives appliquées au point M_ν du système (voir la figure 18.1 qui représente l'un des points M_ν du système ($\nu = 1, 2, \ldots, n$)).

Fig. 18.1

Le système de points matériels est supposé non libre, c'est-à-dire que le mouvement du système et les déplacements virtuels de ses points sont gênés par des liaisons (voir ch. XVII, nº 1.1). Quant aux liaisons, on admet, comme on l'a signalé plus haut, qu'elles sont

a) g é o m é t r i q u e s (holonomes), c'est-à-dire indépendantes des vitesses et des accélérations des points;

b) b i l a t é r a l e s, c'est-à-dire que les points ne peuvent pas quitter les liaisons. Chaque fois que les conditions a) et b) sont respectées, les liaisons vérifient les équations (17.7);

c) p a r f a i t e s (ou polies), ce qui veut dire que la somme des travaux élémentaires de leurs réactions est nulle dans chaque déplacement virtuel (voir (17.1)), que le système se trouve en repos ou en mouvement *).

Notre but est de donner aux équations du mouvement du système la forme d'une équation des travaux, analogue au principe des travaux virtuels de la statique analytique (voir (17.2)). De toute évi-

*) La condition fort importante en statique, selon laquelle les liaisons doivent être stationnaires (scléronomes, ou indépendantes du temps), peut être supprimée ici.

dence, le travail des réactions des liaisons parfaites n'interviendra pas dans une telle équation.

1.2. Déduction de l'équation générale de la dynamique (principe de d'Alembert-Lagrange). L'axiome des liaisons (ch. XVII, n° 1.2) permet de considérer le système gêné de points matériels comme un système libre, à condition d'ajouter aux actions connues les réactions de liaison inconnues. Les équations du mouvement de chacun des points du système s'écrivent en termes de projections sur les axes Ox, Oy, Oz en vertu de la deuxième loi de Newton:

$$\begin{gathered} m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2} = X_\nu + R_x^{(\nu)}, \quad m_\nu \frac{d^2y_\nu}{dt^2} = Y_\nu + R_y^{(\nu)}, \\ m_\nu \frac{d^2z_\nu}{dt^2} = Z_\nu + R_z^{(\nu)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \end{gathered} \tag{18.1}$$

où $R_x^{(\nu)}$, $R_y^{(\nu)}$, $R_z^{(\nu)}$ sont les projections de la résultante $\boldsymbol{R}_\nu$ des réactions de liaison appliquées en M_ν. Mettons ces dernières équations sous la forme

$$\begin{gathered} -R_x^{(\nu)} = X_\nu - m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2}, \quad -R_y^{(\nu)} = Y_\nu - m_\nu \frac{d^2y_\nu}{dt^2}, \\ -R_z^{(\nu)} = Z_\nu - m_\nu \frac{d^2z_\nu}{dt^2} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{gathered}$$

et portons les expressions obtenues de $R_x^{(\nu)}$, $R_y^{(\nu)}$, $R_z^{(\nu)}$ dans (17.1). Il vient

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left[\left(X_\nu - m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2} \right) \delta x_\nu + \left(Y_\nu - m_\nu \frac{d^2y_\nu}{dt^2} \right) \delta y_\nu - \right. \\ \left. - \left(Z_\nu - m_\nu \frac{d^2z_\nu}{dt^2} \right) \delta z_\nu \right] = 0. \tag{18.2}$$

C'est l'*équation générale de la dynamique*; on l'appelle aussi *principe de d'Alembert-Lagrange.* Les quantités

$$-m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2}, \quad -m_\nu \frac{d^2y_\nu}{dt^2}, \quad -m_\nu \frac{d^2z_\nu}{dt^2}$$

ont la dimension d'une force. Reprenant l'expression de *d'*Alembert, nous dirons que les grandeurs vectorielles

$$\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

sont les *forces « perdues »* appliquées aux points du système.

L'équation (18.2) admet l'écriture

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu, \quad \delta \boldsymbol{r}_\nu) = 0,$$

où $\boldsymbol{w}_\nu$ est le vecteur accélération du point M_ν:

$$\boldsymbol{w}_\nu = \frac{d^2x_\nu}{dt^2} \boldsymbol{i} + \frac{d^2y_\nu}{dt^2} \boldsymbol{j} + \frac{d^2z_\nu}{dt^2} \boldsymbol{k},$$

et $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ le vecteur déplacement virtuel de ce point :

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \delta x_\nu \boldsymbol{i} + \delta y_\nu \boldsymbol{j} + \delta z_\nu \boldsymbol{k} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Principe de d'Alembert-Lagrange (équation générale de la dynamique). *La somme des travaux de toutes les forces « perdues » est nulle pour tout déplacement virtuel du système soumis à des liaisons géométriques, bilatérales, parfaites.*

Nous venons de montrer que l'équation générale de la dynamique est nécessaire.

Montrons qu'elle est aussi suffisante. Supposons que (18.2) soit vérifié ; on veut montrer que le mouvement de chaque point du système obéit à la deuxième loi de Newton. Ajoutons aux actions connues $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ les réactions $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$: on peut alors, en vertu de l'axiome des liaisons (ch. XVII, n° 1.2), considérer que le système de points matériels est libre et soumis aux forces $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n + \boldsymbol{R}_n$. Les déplacements virtuels des points du système libre seront désignés par

$$\tilde{\delta} \boldsymbol{r}_\nu = \tilde{\delta} x_\nu \boldsymbol{i} + \tilde{\delta} y_\nu \boldsymbol{j} + \tilde{\delta} z_\nu \boldsymbol{k} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

En vertu du principe (18.2) (qui reste applicable aussi pour un système de points libre), on a

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left[\left(X_\nu + R_x^{(\nu)} - m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} \right) \tilde{\delta} x_\nu + \right.$$

$$\left. + \left(Y_\nu + R_y^{(\nu)} - m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} \right) \tilde{\delta} y_\nu + \left(Z_\nu + R_z^{(\nu)} - m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} \right) \tilde{\delta} z_\nu \right] = 0. \quad (18.3)$$

Le système étant libre, $\tilde{\delta} x_\nu$, $\tilde{\delta} y_\nu$, $\tilde{\delta} z_\nu$ peuvent admettre des valeurs quelconques, aussi petites que l'on veut. On peut ainsi poser dans la dernière égalité

$$\tilde{\delta} x_\nu = \alpha \left(X_\nu + R_x^{(\nu)} - m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} \right), \quad \tilde{\delta} y_\nu = \alpha \left(Y_\nu + R_y^{(\nu)} - m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} \right),$$

$$\tilde{\delta} z_\nu = \alpha \left(Z_\nu + R_z^{(\nu)} - m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} \right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

(α infiniment petit). Il vient

$$\alpha \sum_{\nu=1}^{n} \left[\left(X_\nu + R_x^{(\nu)} - m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} \right)^2 + \left(Y_\nu + R_y^{(\nu)} - m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(Z_\nu + R_z^{(\nu)} - m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} \right)^2 \right] = 0.$$

La somme des carrés étant nulle, on est en droit d'écrire les égalités

$$X_\nu + R_x^{(\nu)} - m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2} = 0, \quad Y_\nu + R_y^{(\nu)} - m_\nu \frac{d^2y_\nu}{dt^2} = 0,$$

$$Z_\nu + R_z^{(\nu)} - m_\nu \frac{d^2z_\nu}{dt^2} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n);$$

nous retrouvons les équations du mouvement (18.1) des points du système. Ainsi donc, le principe de d'Alembert-Lagrange (l'équation générale de la dynamique) est bien suffisant.

Grâce à l'équation générale de la dynamique, on a la possibilité de résoudre les problèmes sans chercher les réactions de liaison. S'il est demandé, dans le problème, de trouver certaines réactions, on supprime une partie de liaisons en ajoutant aux forces connues les réactions demandées. Un système partiellement libre vérifie, lui aussi, l'équation générale de la dynamique. Soulignons que les déplacements virtuels sont différents pour tous les trois cas:

1° pour un système de points gêné par des liaisons (équation (18.2));

2° pour un système libre, ou pour un système gêné dont on a supprimé par la pensée toutes les liaisons (équation (18.3));

3° pour un système à liaisons partiellement supprimées.

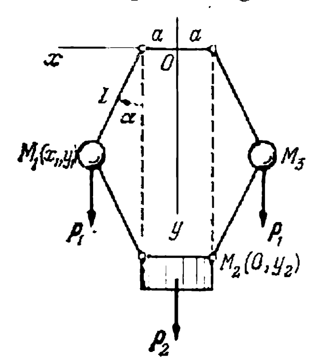


Fig. 18.2

Exemple 18.1. Le régulateur centrifuge tourne autour de son axe vertical avec une vitesse angulaire constante ω. Le poids de chaque boule-masselotte est p_1, le poids du manchon est p_2, toutes les barres sont de longueur l et de poids nul; les articulations de suspension des barres sont à une distance a de l'axe du régulateur. Déterminer le rapport entre la vitesse angulaire ω du régulateur et l'angle d'écart α des barres en régime permanent (fig. 18.2).

Solution. Plaçons l'origine des coordonnées au point fixe O, orientons l'axe Oy vers le bas et l'axe Ox vers la gauche dans le plan du régulateur à un instant donné t. Puisque $\omega =$ const, la boule M_1 ne présente qu'une accélération normale (dirigée en sens contraire de l'axe Ox)

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -(a + l \sin\alpha)\,\omega^2, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2} = 0.$$

La symétrie du mécanisme nous permet de considérer une seule boule, par exemple M_1. Les projections des forces actives appliquées à la boule M_1 et au manchon M_2, c'est-à-dire les projections des poids, sont

$$X_1 = 0, \qquad Y_1 = p_1; \qquad X_2 = 0, \qquad Y_2 = p_2.$$

L'équation (18.2) s'écrira comme suit:

$$2\left(-\frac{p_1}{g}\frac{d^2x_1}{dt^2}\,\delta x_1 + p_1\delta y_1\right) + p_2\delta y_2 = 0, \tag{1}$$

où le coefficient 2 affectant le premier terme s'explique par la présence de deux boules-masselottes identiques.

Calculons les variations des coordonnées. Les coordonnées des points M_1 et M_2 sont

$$x_1 = a + l \sin \alpha, \quad y_1 = l \cos \alpha ; \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 2l \cos \alpha.$$

Leurs variations (définies par les mêmes formules que les différentielles) s'écriront donc

$$\delta x_1 = \frac{dx_1}{d\alpha} \delta\alpha = l \cos \alpha \ \delta\alpha, \quad \delta y_1 = \frac{dy_1}{d\alpha} \delta\alpha = -l \sin \alpha \, \delta\alpha,$$

$$\delta y_2 = \frac{dy_2}{d\alpha} \delta\alpha = -2l \sin \alpha \, \delta\alpha.$$

En les portant dans (1),

$$2 \left[\frac{p_1}{g} (a + l \sin \alpha) \, \omega^2 l \cos \alpha - p_1 l \sin \alpha \right] \delta\alpha - 2p_2 l \sin \alpha \, \delta\alpha = 0,$$

on obtient

$$\omega^2 = \frac{(p_1 + p_2) \, g \operatorname{tg} \alpha}{p_1 (a + l \sin \alpha)} .$$

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que les déplacements virtuels sont analysés pour un t fixe, comme si les liaisons étaient figées, si bien que les points M_1 et M_3 restent dans le plan du dessin. Les déplacements réels, au contraire, se déroulent pendant un certain laps de temps, même très petit. Il convient de prendre en considération aussi la rotation du plan du régulateur avec la vitesse angulaire ω. On voit donc qu'avec des liaisons dépendantes du temps (rhéonomes), les déplacements réels ne figurent pas parmi les déplacements virtuels.

§ 2. Equations différentielles du mouvement du système en coordonnées généralisées (équations de Lagrange)

2.1. Position du problème. Le problème se pose de la même façon que dans le paragraphe précédent. Nous envisageons le mouvement d'un système de n points matériels et désignons la résultante des forces actives appliquées à un ν-ième point par

$$\boldsymbol{F}_\nu = X_\nu \boldsymbol{i} + Y \ \boldsymbol{j} + Z_\nu \boldsymbol{k} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

où X_ν, Y_ν, Z_ν sont les projections sur les axes du repère inertiel $Oxyz$. Supposons que le système soit soumis à m liaisons géométriques, bilatérales, parfaites. Le nombre de degrés de liberté k se définit alors par la formule (17.8):

$$k = 3n - m.$$

Les coordonnées cartésiennes des points du système se laissent exprimer (voir (17.9)) à l'aide de k coordonnées généralisées

$$x_\nu = x_\nu (t, q_1, q_2, \ldots, q_k), \qquad y_\nu = y_\nu (t, q_1, q_2, \ldots, q_k),$$
$$z_\nu = z_\nu (t, q_1, q_2, \ldots, q_k) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{18.4}$$

Les liaisons elles-mêmes n'étant pas forcément stationnaires, il se peut que les équations de liaison (voir (17.7)) renferment le temps sous forme explicite. C'est pourquoi, à la différence de (17.9), les seconds membres de (18.4) contiennent généralement le temps t.

Les coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_k$ sont

1° *réelles*, c'est-à-dire incapables de prendre des valeurs complexes;

2° *indépendantes*;

3° *douées d'une signification géométrique individuelle.*

Cette dernière propriété veut dire que les valeurs numériques de ces variables définissent la position du système, c'est-à-dire les valeurs des coordonnées cartésiennes de ses points, avant l'écriture (et à fortiori avant l'intégration) des équations du mouvement. S. A. Tchaplyguine appelait ces coordonnées *déterminantes*; le terme usuel dans la littérature étrangère est *coordonnées holonomes*. Nous proposons d'appeler ces coordonnées, *coordonnées généralisées.*

2.2. Déduction des équations de Lagrange. Les variations des coordonnées cartésiennes des points du système se définissent par les formules (17.10):

$$\delta x_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa} \delta q_\varkappa, \quad \delta y_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial y_\nu}{\partial q_\varkappa} \delta q_\varkappa, \quad \delta z_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial z_\nu}{\partial q_\varkappa} \delta q_\varkappa$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

où $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ sont les variations des coordonnées généralisées.

Les déplacements réels du système vérifient l'équation générale de la dynamique (18.2) que nous mettrons sous la forme

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left[\left(m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} - X_\nu \right) \delta x_\nu + \left(m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} - Y_\nu \right) \delta y_\nu + \right.$$
$$\left. + \left(m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} - Z_\nu \right) \delta z_\nu \right] = 0.$$

Portons-y les expressions de δx_ν, δy_ν, δz_ν tirées de (17.10):

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left[\frac{d\dot{x}_\nu}{dt} \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa} \delta q_\varkappa + \frac{d\dot{y}_\nu}{dt} \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial y_\nu}{\partial q_\varkappa} \delta q_\varkappa + \frac{d\dot{z}_\nu}{dt} \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial z_\nu}{\partial q_\varkappa} \delta q_\varkappa \right] -$$
$$- \sum_{\nu=1}^{n} \left(X_\nu \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa} \delta q_\varkappa + Y_\nu \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial y_\nu}{\partial q_\varkappa} \delta q_\varkappa + Z_\nu \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial z_\nu}{\partial q_\varkappa} \delta q_\varkappa \right) = 0.$$

Changeant l'ordre de la sommation, on obtient

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \delta q_\varkappa \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left(\frac{d\dot{x}_\nu}{dt} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa} + \frac{d\dot{y}_\nu}{dt} \frac{\partial y_\nu}{\partial q_\varkappa} + \frac{d\dot{z}_\nu}{dt} \frac{\partial z_\nu}{\partial q_\varkappa} \right) - \\ - \sum_{\varkappa=1}^{k} \delta q_\varkappa \sum_{\nu=1}^{n} \left(X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_\varkappa} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_\varkappa} \right) = 0. \quad (18.5)$$

Transformons le premier terme. A cet effet, calculons en partant de la première formule (18.4)

$$\dot{x}_\nu = \frac{dx_\nu}{dt} = \frac{\partial x_\nu}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \qquad (18.6)$$

et, en prenant les dérivées partielles par rapport à $\dot{q}_\varkappa$, trouvons

$$\frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial \dot{q}_\varkappa} = \frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n; \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, k). \quad (18.7)$$

D'autre part, en prenant les dérivées partielles par rapport à $q_\varkappa$ des deux membres de l'identité (18.6), nous aurons

$$\frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial q_\varkappa} = \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial t\, \partial q_\varkappa} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial q_i\, \partial q_\varkappa} \dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa} \right) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa} \right)}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

et par conséquent

$$\frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial q_\varkappa} = \frac{d \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa} \right)}{dt} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n; \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, k). \quad (18.8)$$

Ainsi donc, le premier terme de (18.5) est égal à

$$\frac{d\dot{x}_\nu}{dt} \frac{\partial x_\varkappa}{\partial q_\varkappa} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa} \right) - \dot{x}_\nu \frac{d \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa} \right)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_\nu \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial \dot{q}_\varkappa} \right) - \dot{x}_\nu \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial q_\varkappa};$$

en passant à la dernière égalité, nous avons appliqué les formules (18.7) et (18.8). Ecrivons définitivement

$$\frac{d\dot{x}_\nu}{dt} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \dot{x}_\nu^2 \right)}{\partial \dot{q}_\varkappa} \right] - \frac{\partial}{\partial q_\varkappa} \left(\frac{1}{2} \dot{x}_\nu^2 \right)$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n; \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

et portons cette expression dans (18.5), avec les expressions analogues pour le deuxième et le troisième terme de la somme dans les premiè-

res parenthèses de (18.5):

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \delta q_\varkappa \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\varkappa} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2} m_\nu (\dot{x}_\nu^2 + \dot{y}_\nu^2 + \dot{z}_\nu^2) \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial q_\varkappa} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2} m_\nu (\dot{x}_\nu^2 + \dot{y}_\nu^2 + \dot{z}_\nu^2) - \sum_{\nu=1}^{n} \left(X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_\varkappa} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_\varkappa} \right) \right\} = 0.$$

La dernière somme s'appelle *force généralisée* correspondant à la coordonnée généralisée $q_\varkappa$ (voir (17.11)):

$$Q_\varkappa = \sum_{\nu=1}^{n} \left(X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_\varkappa} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_\varkappa} \right) \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k).$$

La quantité

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (\dot{x}_\nu^2 + \dot{y}_\nu^2 + \dot{z}_\nu^2) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2} m_\nu v_\nu^2 \tag{18.9}$$

qui représente la somme des énergies cinétiques de tous les points du système, est appelée *énergie cinétique* (*demi-force vive*) *du système de points matériels* en mouvement absolu.

Ainsi donc, à la suite des transformations entreprises, l'équation générale de la dynamique pour le système considéré s'écrira sous la forme

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varkappa} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} - Q_\varkappa \right] \delta q_\varkappa = 0. \tag{18.10}$$

Déduite par des transformations identiques à partir de l'équation générale de la dynamique (18.2), l'équation (18.10) est nécessaire et suffisante pour le déplacement réel du système à tout instant t. Or, puisque les variations $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ sont indépendantes (en vertu de l'indépendance des coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_k$), il ressort de la condition (18.10) que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varkappa} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} = Q_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k). \tag{18.11}$$

En effet, donnons au système un déplacement virtuel

$$\delta q_1 \neq 0, \qquad \delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_k = 0.$$

Le déplacement réel se définira alors à l'instant donné, d'après (18.10), par l'équation

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} - Q_1 \right] \delta q_1 = 0,$$

d'où il découle que l'égalité

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1$$

est nécessaire. On démontre d'une façon analogue que les autres égalités (18.11) sont aussi nécessaires pour le déplacement réel du système à un instant t quelconque. Pour voir que les égalités (18.11) sont suffisantes pour le déplacement réel du système à tout instant, il suffit de porter les égalités (18.11) dans la condition (18.10).

Nous avons terminé la déduction des équations différentielles du mouvement du système de points matériels en coordonnées généralisées, dites *équations de Lagrange*.

2.3. Equations de Lagrange dans un champ de forces dérivant d'un potentiel. Dans les applications, on a souvent affaire à des forces qui dérivent d'une fonction de forces (voir ch. XV, n° 3.3). Voyons ce que deviennent alors les équations de Lagrange.

La fonction dérivable

$$U = U(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_n, y_n, z_n)$$

est appelée *fonction de forces* si les projections des forces actives appliquées aux points du système se laissent représenter sous la forme

$$X_\nu = \frac{\partial U}{\partial x_\nu}, \quad Y_\nu = \frac{\partial U}{\partial y_\nu}, \quad Z_\nu = \frac{\partial U}{\partial z_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

On dit alors que le *champ de forces dérive d'un potentiel.*

Supposons que la fonction de forces existe; on a alors pour la force généralisée (17.11), compte tenu de (18.4):

$$Q_\varkappa = \sum_{\nu=1}^{n}\left(X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_\varkappa} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_\varkappa}\right) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_\varkappa} + \frac{\partial U}{\partial y_\nu}\frac{\partial y_\nu}{\partial q_\varkappa} + \frac{\partial U}{\partial z_\nu}\frac{\partial z_\nu}{\partial q_\varkappa}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k). \tag{18.12}$$

Les équations de Lagrange (18.11) s'écriront alors sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varkappa}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} = \frac{\partial U}{\partial q_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k). \tag{18.11a}$$

On appelle *fonction de Lagrange* (*potentiel cinétique*) L la somme de l'énergie cinétique et de la fonction de forces du système, écrite en termes de coordonnées généralisées et de vitesses:

$$L = T + U.$$

Ici $T = T(q_1, q_2, \ldots, q_k; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k)$ et $U = U(q_1, q_2, \ldots, q_k)$ en vertu de (18.4).

Si l'on introduit la fonction de Lagrange, les équations de Lagrange dans le champ de forces dérivant d'un potentiel deviendront

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\varkappa}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k), \qquad (18.11\text{b})$$

car on a de toute évidence $\partial U/\partial \dot{q}_\varkappa \equiv 0$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$.

2.4. Conclusion. Le système d'équations différentielles (18.1) définissant le mouvement du système de points matériels par celui de chacun de ses points est d'ordre $6n$ et contient des réactions de liaison inconnues. Au contraire, les équations de Lagrange représentent un système d'équations différentielles ordinaires (et non aux dérivées partielles !) d'ordre $2k = 6n - 2m$ et ne contiennent aucune réaction de liaison. Les équations de Lagrange sont similaires pour tous les systèmes de points matériels étudiés; elles existent pour toutes les coordonnées généralisées qui expriment les coordonnées cartésiennes des points du système.

Pour établir les équations de Lagrange (18.11), on doit connaître l'expression (18.9) de l'énergie cinétique T du système exprimée en termes de coordonnées généralisées et de vitesses, ainsi que les expressions (17.11) des forces généralisées $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$. Or, le calcul des forces généralisées peut se faire non seulement d'après les formules (17.11) comme on l'a fait dans l'exemple 17.4, mais aussi en appliquant les formules (17.13) suivant les règles décrites dans ce même exemple.

Les équations de Lagrange restent applicables même quand les liaisons ne vérifient pas les conditions b) et c) du n° 1.1 : dans ce cas on supprime les liaisons indésirables en ajoutant les réactions introduites aux actions extérieures.

Les équations de Lagrange peuvent s'appliquer aussi à un système libre de n points matériels: dans ce cas les coordonnées $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_n, y_n, z_n$ des points du système sont des coordonnées généralisées, tandis que les projections $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; \ldots; X_n, Y_n, Z_n$ des forces actives appliquées à chaque point sont des forces généralisées. L'énergie cinétique du système s'écrit

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (\dot{x}_\nu^2 + \dot{y}_\nu^2 + \dot{z}_\nu^2).$$

Cherchons

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\nu} = m_\nu \dot{x}_\nu, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_\nu} = m_\nu \dot{y}_\nu, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_\nu} = m_\nu \dot{z}_\nu,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_\nu} = \frac{\partial T}{\partial y_\nu} = \frac{\partial T}{\partial z_\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Portons ces valeurs dans (18.11)

$$\frac{d}{dt}(m_\nu \dot{x}_\nu) = X_\nu, \quad \frac{d}{dt}(m_\nu \dot{y}_\nu) = Y_\nu, \quad \frac{d}{dt}(m_\nu \dot{z}_\nu) = Z_\nu$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

et, en faisant la dérivation, trouvons

$$m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2} = X_\nu, \quad m_\nu \frac{d^2y_\nu}{dt^2} = Y_\nu, \quad m_\nu \frac{d^2z_\nu}{dt^2} = Z_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous voyons que les équations de Lagrange pour un système libre se réduisent à $3n$ équations différentielles simultanées qui expriment la deuxième loi de Newton pour chacun des points du système.

Exemple 18.2. Appliquant les équations de Lagrange, mettre en équations en coordonnées polaires le mouvement plan d'un point matériel libre de masse m soumis à une force F (fig. 18.3).

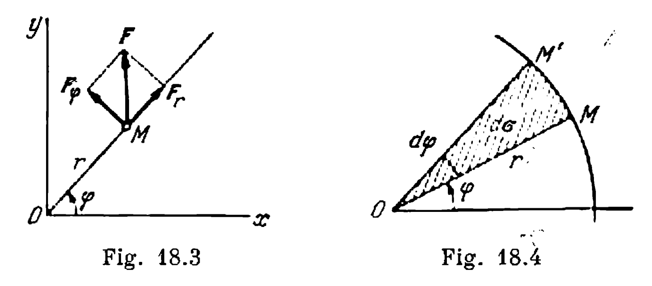


Fig. 18.3 Fig. 18.4

Solution. Comme coordonnées indépendantes du point M, nous adopterons ses coordonnées polaires: le rayon polaire $r = OM$ et l'angle polaire φ. On a donc

$$q_1 = r, \qquad q_2 = \varphi.$$

L'expression du carré de la vitesse d'un point en coordonnées polaires a été citée dans le ch. XI, nº 1.3:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2.$$

L'énergie cinétique T du point M est égale à

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

Pour calculer les forces généralisées $Q_1 = Q_r$ et $Q_2 = Q_\varphi$, nous utiliserons les formules (18.4) qui représentent en l'occurrence les formules bien connues de passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

D'après (17.11)

$$Q_r = X\frac{\partial x}{\partial r} + Y\frac{\partial y}{\partial r} = X\cos\varphi + Y\sin\varphi = F_r,$$

$$Q_\varphi = X\frac{\partial x}{\partial \varphi} + Y\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -Xr\sin\varphi + Yr\cos\varphi = rF_\varphi.$$

Ici F_r, F_φ sont les projections de la force F sur la direction du rayon vecteur r et sur la direction perpendiculaire à celle-ci (le sens positif est celui des valeurs croissantes de l'angle polaire). Les équations de Lagrange correspondant aux coordonnées polaires r et φ se présenteront sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial T}{\partial r}=Q_r, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_\varphi.$$

On a

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}, \quad \frac{\partial T}{\partial r}=mr\dot{\varphi}^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi}=0.$$

Les équations de Lagrange s'écriront donc comme suit:

$$m\frac{d^2r}{dt^2}-mr\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=F_r, \quad m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)=rF_\varphi. \tag{18.13}$$

Dans le cas particulier où F est la force d'attraction newtonienne

$$F=-\frac{\mu m}{r^3}r,$$

on a

$$F_r=-\frac{\mu m}{r^2}, \quad F_\varphi=0,$$

et la deuxième équation (18.13) devient

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)=0.$$

Cela nous donne une intégrale première dite *cyclique*:

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=\text{const.} \tag{18.14}$$

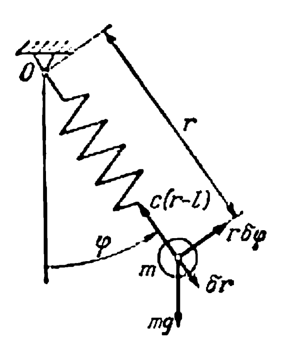


Fig. 18.5

Le premier membre de cette identité est égal à $2d\sigma/dt$, où $d\sigma$ est l'aire balayée par le rayon polaire $r = OM$ pendant le temps dt (fig. 18.4). L'intégrale première (18.14) peut donc s'écrire ainsi:

$$2\frac{d\sigma}{dt}=\text{const.}$$

La dérivée $d\sigma/dt$ s'appelle *vitesse aréolaire*, et l'intégrale première (18.14), *constante des aires*.

La formule (18.14) appliquée au mouvement des planètes autour du Soleil (voir l'exemple 15.3) représente la deuxième loi de Kepler: le rayon vecteur de la planète balaie des aires égales en des temps égaux.

E x e m p l e 18.3. Mettre en équations le mouvement d'un pendule de masse m fixé sur un ressort de poids nul qui se caractérise par une longueur l à l'état non tendu et une raideur c (fig. 18.5).

S o l u t i o n. Le mouvement du pendule est contenu dans le plan perpendiculaire à l'axe de l'articulation O. La masse m, qui est affectée à un point animé de mouvement plan, possède deux degrés de liberté; comme coordonnées indépendantes q_1, q_2 du point m, nous adopterons ses coordonnées polaires: le rayon polaire $r = Om$ et l'angle polaire φ. L'énergie cinétique T du point m (voir l'exemple précédent) est

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2).$$

Les forces exercées sur le pendule sont le poids mg dirigé verticalement vers le bas et la force élastique du ressort $c(r-l)$ qui est dirigée le long du ressort vers le point O si $r > l$ et à partir du point O si $r < l$. Nous calculerons les forces généralisées $Q_1 = Q_r$ et $Q_2 = Q_\varphi$ à l'aide de la formule (17.13) en donnant au pendule un déplacement virtuel δr le long du ressort (fig. 18.5) et en calculant le travail élémentaire $\delta_1 A$ de toutes les forces actives en jeu:

$$\delta_1 A = Q_r \delta r = -c(r-l)\,\delta r + mg\,\delta r \cos\varphi.$$

Cela nous permet de trouver

$$Q_r = \frac{\delta_1 A}{\delta r} = -c(r-l) + mg\cos\varphi.$$

Nous donnerons ensuite au pendule un déplacement virtuel $r\,\delta\varphi$ perpendiculaire au ressort (fig. 18.5) et nous calculerons le travail $\delta_2 A$:

$$\delta_2 A = Q_\varphi \delta\varphi = mgr\,\delta\varphi\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) + c(r-l)\,r\,\delta\varphi\cos\frac{\pi}{2} = -mgr\sin\varphi\,\delta\varphi.$$

Nous trouvons ainsi

$$Q_\varphi = \frac{\delta_2 A}{\delta\varphi} = -mgr\sin\varphi.$$

Les équations de Lagrange (18.11) s'écriront alors

$$\frac{d}{dt}(m\dot r) - mr\dot\varphi^2 = -c(r-l) + mg\cos\varphi,$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot\varphi) = -mgr\sin\varphi.$$

Ayant dérivé $\frac{d}{dt}(m\dot r)$ et $\frac{d}{dt}(mr^2\dot\varphi)$ et divisé la première équation par m et la seconde par $mr \neq 0$, on met les équations sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 &= -\frac{c}{m}(r-l) + g\cos\varphi, \\ r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} &= -g\sin\varphi. \end{aligned} \tag{18.15}$$

Remarquons qu'en remplaçant le ressort par une barre absolument rigide sans poids ($r \equiv l = \text{const}$), on obtient un pendule simple à un degré de liberté. Il ne reste donc, pour le pendule simple, qu'une équation unique, la dernière équation de (18.15)

$$l\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g\sin\varphi$$

qui s'écrit pour les petites oscillations ($\sin\varphi \approx \varphi$) sous la forme (16.18):

$$\ddot\varphi + k^2\varphi = 0 \qquad \left(k^2 = \frac{g}{l}\right).$$

Revenons au système de deux équations différentielles non linéaires du quatrième ordre (18.15). Sa solution générale ne s'exprime pas à l'aide de fonctions élémentaires ni de leurs quadratures. Or, le système admet une solution particulière (oscillations verticales de la masse suspendue à un ressort):

$$\varphi \equiv 0, \qquad \ddot r + \frac{c}{m} = \frac{c}{m}\,l + g.$$

Cette dernière équation est une équation linéaire du deuxième ordre à coefficients constants. Elle admet une solution particulière

$$r^* = l + \lambda_{st} \quad \left(\lambda_{st} = \frac{mg}{c}\right),$$

ce qui permet de trouver la solution générale:

$$r = a\cos(\omega t + \alpha) + l + \lambda_{st} \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}\right).$$

Cette solution définit les oscillations verticales de la masse autour de la position d'équilibre inférieure du pendule suspendu au ressort ($\varphi = 0$, $r = r^*$), d'amplitude a et de phase initiale α définies par les conditions initiales, et de période τ égale à

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Exercices

Exercice 18.1. Un levier coudé AOB est fixé en O dans une articulation qui lui permet de tourner dans le plan vertical autour de l'axe vertical Oy (fig. 18.6). L'angle $AOB = 90°$, les longueurs des branches sont $OA = a$,

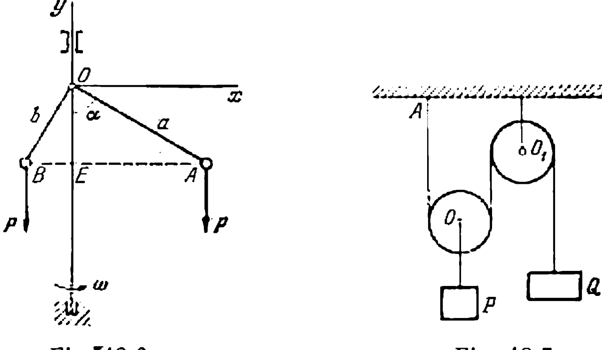


Fig. 18.6 Fig. 18.7

$OB = b$. Les points A et B des branches sont affectés de masselottes de poids égal P. Abstraction faite du poids du levier et du frottement dans l'articulation O, trouver la vitesse angulaire de rotation ω pour laquelle la droite AB joignant les centres des masselottes sera horizontale.

Réponse. $\omega^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}g$.

Exercice 18.2. Deux fardeaux P, Q, tels que $2Q > P$, sont suspendus à un système de deux poulies: mobile O et fixe O_1 (fig. 18.7). Déterminer l'accélération w du fardeau Q sans tenir compte des masses des poulies.

Indication. Le rapport des modules des accélérations des fardeaux Q et P est égal à 2.

Réponse. $w = 2\frac{2Q-P}{4Q+P}g$.

CHAPITRE XIX

THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA DYNAMIQUE DU SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS *)

Dans un problème de mécanique, la possibilité de ne pas chercher les réactions de liaison ou au moins de ne chercher que quelques réactions particulières revêt une importance considérable. Il n'est pas moins important de pouvoir éviter l'intégration des équations du mouvement sous quelque forme que ce soit, ainsi que de ne pas avoir à résoudre l'équation générale de la dynamique. Certaines conclusions générales des équations du mouvement font l'objet des théorèmes généraux de la dynamique du système. Ces théorèmes, ainsi que les intégrales premières qu'on arrive à en déduire dans certains cas particuliers, facilitent grandement la résolution des problèmes en comparaison avec la méthode d'intégration directe des équations du mouvement.

Quelles sont les méthodes de recherche des intégrales premières et de leur mise en œuvre pour la résolution des problèmes? Les classiques de la mécanique (Euler, Lagrange et autres) et les mécaniciens russes éminents (Joukovski, Tchaplyguine, Tchétaïev et autres) ont opté pour l'analyse des déplacements virtuels du système et des intégrales premières dégagées en cours de cette analyse.

N. Joukovski a pris pour base les trois théorèmes généraux de la dynamique du système de points, dont le premier est le théorème du mouvement du centre de masse du système (théorème de la variation de la quantité de mouvement du système).

Soulignons que les *liaisons* imposées au système de points matériels sont censées *vérifier les conditions* a), b) et c) énoncées dans le ch. XVIII, n° 1.1.

Les théorèmes des paragraphes 1 à 3 ci-après se rapportent au mouvement absolu du système, c'est-à-dire à son mouvement par rapport aux axes inertiels; les théorèmes du § 4 se rapportent au mouvement relatif.

---

*) Le lecteur trouvera dans l'Annexe une démonstration simplifiée de ces théorèmes.

23—01146

§ 1. Théorème de la variation de la quantité de mouvement totale du système. Théorème du mouvement du centre de masse du système

1.1. Quantité de mouvement totale du système. Son expression en fonction de la masse du système et de la vitesse du centre de masse. Par *masse d'un système* de n points matériels doués de masses m_1, m_2, . . ., m_n, on entend la quantité M égale à la somme des masses des points:

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n.$$

Le *centre de masse du système de points matériels* en coordonnées cartésiennes est un point C dont le rayon vecteur $\boldsymbol{r}_C$ se définit par la formule

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{r}_\nu \qquad (19.1)$$

où $\boldsymbol{r}_\nu$ est le rayon vecteur d'un ν-ième point du système, de coordonnées x_ν, y_ν, z_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$).

Les coordonnées x_C, y_C, z_C du centre de masse du système s'écriront donc

$$x_C = \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu, \quad y_C = \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu, \quad z_C = \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu \qquad (19.2)$$

Si l'accélération de la pesanteur g est la même pour tous les points du système, on a

$$M = \frac{P}{g}, \quad m_\nu = \frac{1}{g} p_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

si bien que le centre de masse du système se confond avec son centre de gravité (voir les formules (6.9) et (6.10)).

On appelle *résultante cinétique* ou *quantité de mouvement totale du système* de points matériels un vecteur libre Q égal à la somme géométrique des quantités de mouvement de tous les points du système (fig. 19.1):

$$Q = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + m_n\boldsymbol{v}_n = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu. \qquad (19.3)$$

Son expression géométrique est le côté fermant le polygone des quantités de mouvements de tous les points du système (fig. 19.1).

L e m m e. *La quantité de mouvement totale du système est égale à la quantité de mouvement du centre de masse du système, en supposant toute la masse du système concentrée en ce point:*

$$Q = M\boldsymbol{v}_C. \qquad (19.4)$$

D é m o n s t r a t i o n. Transformons la formule (19.3) en faisant intervenir la formule (19.1):

$$Q = \sum m_\nu v_\nu = \sum m_\nu \frac{dr_\nu}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_\nu r_\nu = \frac{d}{dt}(Mr_C) = Mv_C.$$

Le lemme est démontré.

1.2. Théorème de la variation de la projection de la quantité de mouvement totale du système. Désignons comme précédemment par F_ν la résultante de toutes les forces actives connues appliquées à un ν-ième point du système; ses projections sur les axes inertiels Ox, Oy, Oz s'écriront

$$X_\nu, Y_\nu, Z_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

T h é o r è m e (s o u s f o r m e d i f f é r e n t i e l l e). *S'il existe parmi les déplacements virtuels du système une translation* *),

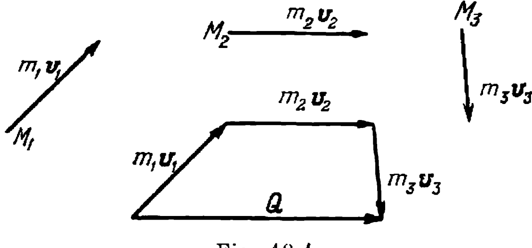


Fig. 19.1

la dérivée par rapport au temps de la projection de la quantité de mouvement totale sur la direction de la translation est égale à la somme des projections de toutes les forces a c t i v e s *sur cette direction.*

Supposons que la translation a lieu suivant l'axe Ox; la proposition énoncée s'écrit alors

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu. \tag{19.5}$$

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que les liaisons imposées au système permettent une translation virtuelle, par exemple suivant l'axe Ox:

$$\delta x_\nu = \delta a \neq 0, \qquad \delta y_\nu = \delta z_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

La nature exacte du mouvement du système sera définie par l'équation générale de la dynamique (18.2), qui se présente en l'occurrence

*) Un mouvement dans lequel le système se déplace comme un solide, c'est-à-dire en conservant la distance fixe entre ses deux points quelconques.

comme suit :

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(X_\nu - m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2}\right)\delta a = 0.$$

Divisons ses deux membres par δa,

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu,$$

et appliquons la formule (19.3) : nous retrouvons la formule (19.5),

$$\frac{dQ_x}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu v_x^\nu = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu.$$

Le théorème est démontré.

R e m a r q u e. Classons les f o r c e s a c t i v e s connues appliquées à chaque point du système en f o r c e s e x t é r i e u r e s et f o r c e s i n t é r i e u r e s (voir ch. XIII, n° 1.1). Nous faisons abstraction de la nature des forces intérieures, considérant chacune d'elles comme une fonction de la distance, dirigée suivant la ligne joignant les points et obéissant à la troisième loi de Newton. Alors

$$\boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{F}_\nu^{(i)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

où $\boldsymbol{F}_\nu^{(e)}$ et $\boldsymbol{F}_\nu^{(i)}$ sont respectivement les résultantes des forces actives extérieures et intérieures sollicitant un ν-ième point. Or, la somme géométrique des forces actives intérieures opérant au sein d'un système de points matériels est nulle en vertu de la troisième loi de Newton (ch. XIII, n° 1.1) :

$$\sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{F}_\nu^{(i)} = \boldsymbol{0}.$$

Aussi la résultante générale $\boldsymbol{R}$ des forces actives appliquées au système est-elle égale à la résultante générale $\boldsymbol{R}^{(e)}$ des forces a c t i v e s e x t é r i e u r e s :

$$\boldsymbol{R} = \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{F}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{F}_\nu^{(e)} = \boldsymbol{R}^{(e)}. \qquad (19.6)$$

Sa projection sur un axe quelconque, par exemple sur Ox, s'écrira donc comme suit :

$$\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^{(e)} = R_x^{(e)}. \qquad (19.7)$$

C o r o l l a i r e. Le théorème de la variation de la **projection** de la quantité de mouvement totale (19.5) peut s'écrire ainsi :

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x^{(e)}. \tag{19.5a}$$

Multipliant par dt et prenant l'intégrale entre 0 et t, on trouve

$$Q_x(t) - Q_x(0) = \int_0^t R_x^{(e)}\, dt. \tag{19.8}$$

L'intégrale du second membre s'appelle *impulsion* (voir ch. XV, n° 1.1).

Nous venons de démontrer le

T h é o r è m e d e l a v a r i a t i o n d e l a p r o j e c t i o n d e l a q u a n t i t é d e m o u v e m e n t t o t a l e (s o u s f o r m e i n t é g r a l e). *Si le système peut se déplacer en translation suivant un axe quelconque, l'accroissement de la projection de la quantité de mouvement totale du système sur cet axe est égal à l'impulsion de la projection de la résultante générale des forces a c t i v e s e x t é r i e u r e s sur le même axe pendant l'intervalle de temps donné.*

1.3. Théorème du mouvement du centre de masse du système. *S'il y a parmi les déplacements virtuels du système une translation parallèle à l'axe Ox, le centre de masse se déplace dans cette direction comme un point de masse* $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ *sollicité par une force égale à la somme des composantes des f o r c e s a c t i v e s e x t é r i e u r e s dans la direction donnée*:

$$M\frac{dv_x^C}{dt} = R_x^{(e)}. \tag{19.9}$$

D é m o n s t r a t i o n. On a en vertu de la formule (19.4)

$$Q_x = Mv_x^C,$$

où $v_x^C = dx_C/dt$ est la projection du centre de masse sur l'axe Ox. On déduit alors de (19.5) en tenant compte de (19.7) :

$$\frac{d}{dt}(Mv_x^C) = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^{(e)}, \text{ si bien que } M\frac{dv_x^C}{dt} = R_x^{(e)}.$$

Le théorème est démontré.

Soulignons qu'on ne voit figurer dans aucun des trois théorèmes précédents (qui se réduisent d'ailleurs tous au premier théorème) ni les forces intérieures ni les r é a c t i o n s d e s l i a i s o n s p a r f a i t e s (c'est le point le plus important). Du dernier théorème, il ressort que les forces intérieures ne peuvent pas affecter le mouvement du centre de masse du système.

1.4. Intégrales premières. Par *intégrale première* du mouvement (d'un point ou d'un système de points matériels), on entend une égalité qui établit la relation entre le temps, les coordonnées des points, les projections de leurs vitesses et quelques constantes arbitraires et qui devient identité chaque fois que les valeurs des coordonnées et des projections vérifient les équations différentielles du mouvement pour toutes valeurs des constantes arbitraires. Ainsi donc, les théorèmes généraux de la dynamique nous fournissent des intégrales premières du mouvement toutes les fois qu'on arrive à calculer l'intégrale figurant dans le second membre de l'équation du théorème.

Dans le cas particulier où le second membre en question est identiquement nul, nous avons ce qu'on appelle une *loi de conservation*. La condition à laquelle le second membre s'annule est appelée *condition de conservation*. La première loi de conservation est la loi de conservation du vecteur vitesse du point matériel, dite première loi de Newton (voir ch. XIII, n° 1.3 et ch. XV, n° 1.3).

Voyons dans quels cas les théorèmes démontrés ci-dessus conduisent à des intégrales premières. Supposons que la somme des projections des forces actives extérieures sur l'axe Ox soit identiquement nulle,

$$R_x^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^{(e)} \equiv 0. \qquad (19.10)$$

On tire alors de (19.9)

$$\frac{dv_x^C}{dt} \equiv 0, \quad \text{ou} \quad v_x^C(t) = v_x^C(0) = \text{const.}$$

D'où

$$\frac{dx_C}{dt} = v_x^C(0), \quad \text{ou} \quad x_C(t) = v_x^C(0)\, t + x_C(0). \qquad (19.11)$$

La formule (19.11) s'appelle *intégrale de mouvement du centre de masse du système*: si le système peut se déplacer en translation, à la façon d'un solide, le long d'un axe et la somme des projections des forces actives extérieures sur cet axe est identiquement nulle, la projection du centre de masse sur l'axe en question est animée d'un mouvement uniforme.

L'intégrale de mouvement du centre de masse du système se laisse aussi définir autrement. Supposons que la condition (19.10) soit vérifiée. On a alors en vertu de (19.5) et de (19.7)

$$\frac{dQ_x}{dt} = 0, \quad \text{et} \quad Q_x(t) = Q_x(0) = \text{const.} \qquad (19.12)$$

C'est la raison pour laquelle la condition (19.10) est quelquefois appelée *condition de conservation* de la projection de la quantité de mouvement totale du système sur un axe du repère inertiel. L'inté-

grale première (19.12) est la *loi de conservation de la projection de la quantité de mouvement totale du système sur l'axe Ox*.

Supposons que les liaisons imposées permettent des translations du système de points matériels suivant chacun des trois axes (c'est-à-dire en direction quelconque) à la façon d'un solide. Il ressort alors des formules (19.9)

$$M\frac{dv_x^C}{dt}=R_x^{(e)},\quad M\frac{dv_y^C}{dt}=R_y^{(e)},\quad M\frac{dv_z^C}{dt}=R_z^{(e)},$$

ou en notation vectorielle

$$M\frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt}=\boldsymbol{R}^{(e)}. \qquad (19.13)$$

Cette équation est la justification de la dynamique du point, étant donné qu'on ne rencontre dans la nature que des corps. La notion de point matériel est un être de raison physiquement justifié même quand le corps en question est non libre, auquel cas on applique l'axiome des liaisons.

D'autre part, si pour un système libre de points matériels la résultante générale des forces extérieures est égale à zéro, son centre de masse possède une vitesse constante en module et en direction:

si $\boldsymbol{R}^{(e)}\equiv 0$, on a $\boldsymbol{v}_C(t)=\boldsymbol{v}_C(0)$. (19.14)

La formule (19.14) traduit la loi de mouvement par inertie du centre de masse du système dans le cas où $\boldsymbol{R}^{(e)}\equiv 0$. En vertu de la formule (19.4), cette dernière identité est la condition de conservation de la quantité de mouvement totale du système libre.

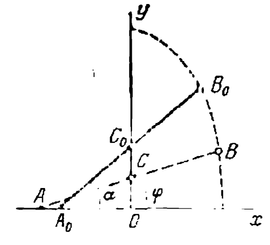


Fig. 19.2

Exemple 19.1. Une barre homogène AB de longueur $2l$ est appuyée par son extrémité A sur un plan horizontal poli, formant avec ce plan un angle α à l'instant initial (c'est-à-dire quand la barre se trouve en repos). Déterminer la trajectoire suivie par le point B (fig. 19.2).

Solution. Parmi les déplacements virtuels de la barre, il y a une translation dans le plan vertical suivant l'axe Ox. Puisque $\sum X_\nu^{(e)}=0$ et que $v_x^C(0)=0$, il vient en vertu de (19.11)

$$x_C(t)=x_C(0)=0,$$

ce qui veut dire que l'axe Oy passe par le centre de masse de la barre. A l'instant $t>0$ où la barre fait un angle $\varphi<\alpha$ avec le plan, son point B se définit par les coordonnées

$$x=l\cos\varphi,\qquad y=2l\sin\varphi.$$

D'où

$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{4l^2}=1\ ;$$

autrement dit, le point B parcourt un arc d'ellipse de demi-axes l et $2l$ (en trait interrompu sur la figure 19.2).

Exemple 19.2. Le tube lance-torpilles monté à bord d'un navire de masse M qui avance par inertie, le moteur à l'arrêt, lance vers l'arrière un projectile de masse m avec une vitesse relative $\boldsymbol{u}$. Avant le tir, le navire a une vitesse $\boldsymbol{v}_0$. Déterminer la vitesse du navire après le lancement en supposant que la résistance de l'eau est proportionnelle à la première puissance de la vitesse.

Solution. La seule force extérieure agissant dans le sens de mouvement est la force de résistance de l'eau. Sans tenir compte de son influence pendant le lancement, nous avons d'après la loi de conservation de la projection de la quantité de mouvement (voir (19.12))

$$(M+m)\,v_0 = Mv_1 + m\,(v_0 - u).$$

La vitesse du navire v_1 à l'instant postérieur au lancement sera

$$v_1 = v_0 + \frac{m}{M}\,u.$$

L'équation du mouvement du centre de masse du navire après le départ du projectile s'écrira d'après (19.9)

$$M\frac{dv}{dt} = -kv.$$

On obtient après intégration

$$v = v_1 e^{-\frac{k}{M}t}.$$

§ 2. Théorème du moment cinétique du système

2.1. Définitions. Construisons pour chaque point du système les vecteurs quantités de mouvement $m_1\boldsymbol{v}_1, m_2\boldsymbol{v}_2, \ldots, m_n\boldsymbol{v}_n$ (fig. 19.3).

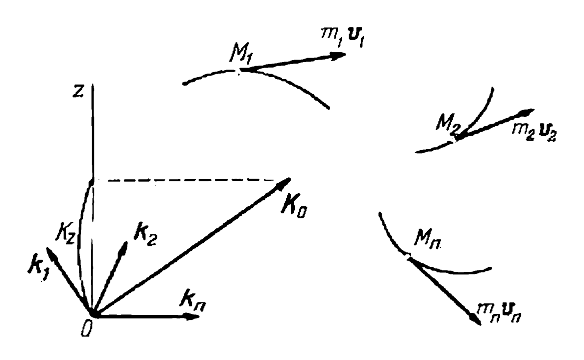


Fig. 19.3

Construisons les vecteurs moments des quantités de mouvement (moments cinétiques) $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \ldots, \boldsymbol{k}_n$ (voir ch. XV, n° 2.1) par rapport à un centre fixe O:

$$\boldsymbol{k}_\nu = \mathbf{Mom}_O\,(m_\nu \boldsymbol{v}_\nu) = [\boldsymbol{r}_\nu, m_\nu \boldsymbol{v}_\nu] \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

On appelle *moment cinétique du système* de points matériels *par rapport à un centre O* et on note $\boldsymbol{K}_O$ la somme géométrique des moments cinétiques de tous les points du système par rapport à ce même centre :

$$\boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 + \ldots + \boldsymbol{k}_n = \sum_{\nu=1}^{n} [\boldsymbol{r}_\nu, m_\nu \boldsymbol{v}_\nu]. \tag{19.15}$$

Le moment résultant des quantités de mouvement des points du système (*moment cinétique du système*) K_{Oz} *par rapport à un axe* fixe Oz est la somme algébrique des moments cinétiques de tous les points du système par rapport à ce même axe :

$$K_{Oz} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{mom}_{Oz}(m_\nu \boldsymbol{v}_\nu). \tag{19.16}$$

Ici $\mathrm{mom}_{Oz}(m_\nu \boldsymbol{v}_\nu)$ se calcule par la formule (15.5).

Puisque la projection de la somme géométrique des vecteurs sur un axe est égale à la somme algébrique des projections (voir (1.5)), on a aussi en vertu de (15.6)

$$K_{Oz} = \mathrm{proj}_{Oz}\boldsymbol{K}_O. \tag{19.17}$$

Nous utiliserons la formule (19.17) pour établir l'expression analytique du moment cinétique du système par rapport à un axe. D'après la formule du produit vectoriel (1.16) on a

$$\boldsymbol{K}_O = \sum_{\nu=1}^{n} [\boldsymbol{r}_\nu, m_\nu \boldsymbol{v}_\nu] = \sum_{\nu=1}^{n} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_\nu & y_\nu & z_\nu \\ m_\nu \frac{dx_\nu}{dt} & m_\nu \frac{dy_\nu}{dt} & m_\nu \frac{dz_\nu}{dt} \end{vmatrix}$$

et l'on peut écrire d'après (1.17)

$$K_{Oz} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left(x_\nu \frac{dy_\nu}{dt} - y_\nu \frac{dx_\nu}{dt} \right). \tag{19.18}$$

2.2. Théorème du moment cinétique du système par rapport à un axe fixe. *Si les déplacements virtuels du système admettent sa rotation à la façon d'un solide autour de l'axe fixe Oz du repère inertiel, la dérivée du moment cinétique du système par rapport à l'axe Oz est égale au moment résultant des forces actives extérieures par rapport à ce même axe :*

$$\frac{dK_{Oz}}{dt} = M_{Oz}^{(e)}. \tag{19.19}$$

Démonstration. Par analogie à la formule connue (8.17) de la vitesse d'un point du solide mobile en rotation autour d'un

axe fixe, on a

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = [\delta\varphi \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}_\nu] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \delta\varphi \\ x_\nu & y_\nu & z_\nu \end{vmatrix} = -y_\nu \delta\varphi \boldsymbol{i} + x_\nu \delta\varphi \boldsymbol{j} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

où $\delta\varphi$ est une rotation infinitésimale du système autour de l'axe Oz. On en déduit les variations des coordonnées dans le déplacement virtuel considéré:

$$\delta x_\nu = -y_\nu \delta\varphi, \quad \delta y_\nu = x_\nu \delta\varphi, \quad \delta z_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Le mouvement du système se définit par l'équation générale de la dynamique (18.2), qui se présente en l'occurrence comme suit:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left[-\left(X_\nu - m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} \right) y_\nu + \left(Y_\nu - m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} \right) x_\nu \right] \delta\varphi = 0.$$

Divisons-la par $\delta\varphi$ et mettons le résultat obtenu sous la forme

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left(x_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} - y_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} \right) = \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu Y_\nu - y_\nu X_\nu).$$

Transformons le premier membre à l'aide des identités

$$\frac{d}{dt}\left(x_\nu \frac{dy_\nu}{dt} - y_\nu \frac{dx_\nu}{dt} \right) = x_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} + \frac{dx_\nu}{dt}\frac{dy_\nu}{dt} -$$
$$- y_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} - \frac{dy_\nu}{dt}\frac{dx_\nu}{dt} = x_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} - y_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Après cette transformation, l'équation générale de la dynamique devient

$$\frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left(x_\nu \frac{dy_\nu}{dt} - y_\nu \frac{dx_\nu}{dt} \right) = \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu Y_\nu - y_\nu X_\nu).$$

Le second membre est le moment résultant par rapport à l'axe Oz des forces actives agissant sur le système (voir la formule (5.17)), et le premier membre, la dérivée dK_{Oz}/dt (voir (19.18)). La dernière égalité signifie donc que

$$\frac{dK_{Oz}}{dt} = M_{Oz}.$$

Les forces actives connues étant classées en extérieures et intérieures, on a

$$M_{Oz} = M_{Oz}^{(e)} + M_{Oz}^{(i)}.$$

Dans cette expression $M_{Oz}^{(e)}$ et $M_{Oz}^{(i)}$ sont les moments résultants par rapport à l'axe Oz des forces actives extérieures et intérieures.

Les forces intérieures agissant au sein du système se font équilibre deux à deux (voir figure 13.4), c'est pourquoi non seulement leur résultante générale mais aussi leur moment résultant par rapport à un axe quelconque est nul, $M_{Oz}^{(i)} = 0$, si bien que

$$M_{Oz} = M_{Oz}^{(e)}.$$

Le théorème est démontré.

Soulignons que dans ce théorème comme dans les précédents, on ne voit figurer *aucune réaction de liaison parfaite*.

2.3. Intégrales premières. Voyons dans quelles conditions le théorème démontré ci-dessus peut fournir des intégrales premières. Supposons que le moment résultant des forces actives extérieures par rapport à un axe fixe Oz soit identiquement nul,

$$M_{Oz}^{(e)} \equiv 0. \qquad (19.20)$$

Il suit alors de (19.19) que

$$\frac{dK_{Oz}}{dt} = 0, \quad \text{et} \quad K_{Oz}(t) = K_{Oz}(0). \qquad (19.21)$$

La formule (19.21) traduit la loi de conservation du moment cinétique du système par rapport à un axe Oz; c'est l'*intégrale des aires* pour le plan Oxy. L'identité (19.20) est la condition de conservation du moment cinétique du système par rapport à un axe fixe.

Supposons que les liaisons imposées admettent une rotation du système de points matériels à la façon d'un solide par rapport aux trois axes fixes (ou inertiels) Ox, Oy, Oz: ce cas se présente par exemple quand le système est libre ou forme un corps solide ayant un point fixe (ch. V, n° 3.3). On a alors en vertu de la formule (19.19)

$$\frac{dK_{Ox}}{dt} = M_{Ox}^{(e)}, \quad \frac{dK_{Oy}}{dt} = M_{Oy}^{(e)}, \quad \frac{dK_{Oz}}{dt} = M_{Oz}^{(e)}. \qquad (19.22)$$

Ces trois équations scalaires se laissent réduire à une seule équation vectorielle

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^{(e)}. \qquad (19.22a)$$

Ici $\mathbf{K}_O$ est le moment cinétique du système par rapport au centre fixe O (formule (19.15)), et $\mathbf{M}_O^{(e)}$ est le vecteur moment résultant des forces actives extérieures par rapport au même centre.

Si, pour les liaisons indiquées, le vecteur moment résultant des forces extérieures est identiquement nul, le moment cinétique du système est constant en module et en direction:

$$\text{si } \mathbf{M}_O^{(e)} \equiv \mathbf{0}, \text{ on a } \mathbf{K}_O(t) = \mathbf{K}_O(0). \qquad (19.23)$$

La formule (19.23) traduit la loi de conservation du moment cinétique du système par rapport au centre O. L'identité $\boldsymbol{M}_O^{(e)} \equiv \boldsymbol{0}$ est la condition de conservation du moment cinétique du système par rapport à un point fixe.

Nous omettons de donner un exemple illustrant ce paragraphe, car on trouvera dans le § 2 du chapitre XXI une application du présent paragraphe à la dynamique du solide.

§ 3. Théorème de la variation de l'énergie cinétique du système

Ce théorème n'est pas lié à un certain type de déplacement virtuel du système de points matériels comme c'était le cas dans les paragraphes 1 et 2, mais à une certaine propriété de ce déplacement. Supposons que tous les déplacements réels figurent parmi les déplacements virtuels. Cela revient à dire que chaque déplacement réel du système se confond avec un déplacement virtuel de ce dernier. Ce cas se présente quand les liaisons imposées au système ne dépendent pas explicitement du temps; on dit alors que les liaisons sont scléronomes ou stationnaires (voir ch. XVII, n° 1.1).

Rappelons la définition énoncée dans le n° 2.2 du chapitre XVIII. La quantité

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left[\left(\frac{dx_\nu}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_\nu}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_\nu}{dt}\right)^2 \right], \tag{19.24}$$

qui représente la somme des énergies cinétiques de tous les points du système, porte le nom d'énergie cinétique (demi-force vive) du système en mouvement absolu.

3.1. Théorème de la variation de l'énergie cinétique du système sous forme différentielle. *Si les liaisons imposées au système sont géométriques, bilatérales, parfaites et stationnaires, la différentielle de l'énergie cinétique du système est égale à la somme des travaux élémentaires de toutes les forces actives connues (tant extérieures qu'intérieures) dans un déplacement réel du système:*

$$dT = \sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu \, dx_\nu + Y_\nu \, dy_\nu + Z_\nu \, dz_\nu). \tag{19.25}$$

Démonstration. Quand les liaisons sont stationnaires, le déplacement réel du système se confond avec un déplacement virtuel, en sorte que

$$dx_\nu = \delta x_\nu, \quad dy_\nu = \delta y_\nu, \quad dz_\nu = \delta z_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

et l'équation générale de la dynamique (18.2) peut s'écrire ainsi:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left[\left(X_\nu - m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2}\right)dx_\nu + \left(Y_\nu - m_\nu \frac{d^2y_\nu}{dt^2}\right)dy_\nu + \left(Z_\nu - m_\nu \frac{d^2z_\nu}{dt^2}\right)dz_\nu\right] = 0.$$

Mettons cette équation sous la forme

$$dt\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\left(\frac{d^2x_\nu}{dt^2}\frac{dx_\nu}{dt} + \frac{d^2y_\nu}{dt^2}\frac{dy_\nu}{dt} + \frac{d^2z_\nu}{dt^2}\frac{dz_\nu}{dt}\right) = \sum_{\nu=1}^{n}(X_\nu\,dx_\nu + Y_\nu\,dy_\nu + Z_\nu\,dz_\nu).$$

Etant donné qu'on a

$$dt\,\frac{dx_\nu}{dt}\,\frac{d^2x_\nu}{dt^2} = dt\cdot\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx_\nu}{dt}\right)^2\right] = d\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx_\nu}{dt}\right)^2\right] \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

et que les mêmes égalités sont valables pour les deux autres termes du premier membre, on obtient

$$d\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2}m_\nu\left[\left(\frac{dx_\nu}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_\nu}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_\nu}{dt}\right)^2\right] = \sum_{\nu=1}^{n}(X_\nu\,dx_\nu + Y_\nu\,dy_\nu + Z_\nu\,dz_\nu).$$

Le premier membre est la différentielle de l'énergie cinétique du système (voir (19.24)). Le théorème est démontré.

Divisons l'égalité (19.25) par dt; il vient

$$\frac{dT}{dt} = N = \sum_{\nu=1}^{n}(X_\nu v_x^\nu + Y_\nu v_y^\nu + Z_\nu v_z^\nu). \qquad (19.26)$$

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un système de points matériels est égale à la puissance N de toutes les forces actives connues (tant extérieures qu'intérieures) appliquées au système.

Classons les forces actives connues appliquées à un ν-ième point en forces extérieures $F_\nu^{(e)}$ et forces intérieures $F_\nu^{(i)}$ et écrivons pour les projections de ces forces:

$$X_\nu = X_\nu^{(e)} + X_\nu^{(i)},\quad Y_\nu = Y_\nu^{(e)} + Y_\nu^{(i)},\quad Z_\nu = Z_\nu^{(e)} + Z_\nu^{(i)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Le théorème qu'on vient de démontrer s'écrira ainsi :

$$dT = \sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu^{(e)}\, dx_\nu + Y_\nu^{(e)}\, dy_\nu + Z_\nu^{(e)}\, dz_\nu) + \\ + \sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu^{(i)}\, dx_\nu + Y_\nu^{(i)}\, dy_\nu + Z_\nu^{(i)} dz_\nu).$$

3.2. Théorème de la variation de l'énergie cinétique du système sous forme intégrale (finie). Intégrant l'égalité différentielle (19.25), on obtient

$$T - T_0 = A^{(e)} + A^{(i)}. \tag{19.27}$$

L'accroissement de l'énergie cinétique est égal à la somme des travaux de toutes les forces a c t i v e s *données appliquées au système.* Ici les intégrales curvilignes

$$A^{(e)} = \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu^{(e)}\, dx_\nu + Y_\nu^{(e)}\, dy_\nu + Z_\nu^{(e)}\, dz_\nu),$$

$$A^{(i)} = \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu^{(i)}\, dx_\nu + Y_\nu^{(i)}\, dy_\nu + Z_\nu^{(i)}\, dz_\nu)$$

expriment respectivement le travail des forces actives extérieures et des forces actives intérieures pour le déplacement du système à partir de la configuration initiale Γ_0 jusqu'à la configuration finale Γ.

Cherchons par exemple le t r a v a i l p r o d u i t p a r l e p o i d s dans le déplacement du système de points matériels. Les projections des poids des points s'écrivent

$$X_\nu^{(e)} = Y_\nu^{(e)} = 0, \quad Z_\nu^{(e)} = -m_\nu g,$$

d'où

$$dA^{(e)} = \sum_\nu (X_\nu^{(e)}\, dx_\nu + Y_\nu^{(e)}\, dy_\nu + Z_\nu^{(e)}\, dz_\nu) = -gd \sum_\nu m_\nu z_\nu.$$

Or, la somme $\sum m_\nu z_\nu$ est égale, en vertu de la troisième formule (19.2), à Mz_C, où M est la masse et z_C la cote du centre de masse du système. On a donc

$$dA^{(e)} = -Mg\, dz_C;$$

après l'intégration, on verra que le travail effectué pour le déplacement du système de points matériels dans le champ de la pesanteur est égal à

$$A^{(e)} = -Mg\,[z_C - z_C\,(0)], \tag{19.28}$$

c'est-à-dire au produit du poids du système par la valeur de l'abaissement du centre de masse.

Dans l'énoncé final des théorèmes de la dynamique du système considérés dans les paragraphes 1 et 2, il n'était question ni des réactions des liaisons parfaites, ni des forces intérieures. Au contraire, si le théorème de la variation de l'énergie cinétique ne tient pas compte comme précédemment des réactions des liaisons parfaites, le travail des forces intérieures y figure généralement.

3.3. Remarque sur le travail des forces intérieures. On peut indiquer les cas où les forces intérieures ne figurent pas dans le théorème de la variation de l'énergie cinétique du système.

L e m m e. *Le travail des forces intérieures est nul dans tout déplacement réel du système invariable de points matériels* (c'est-à-dire d'un système où la distance entre deux points quelconques est conservée pendant toute la durée du mouvement).

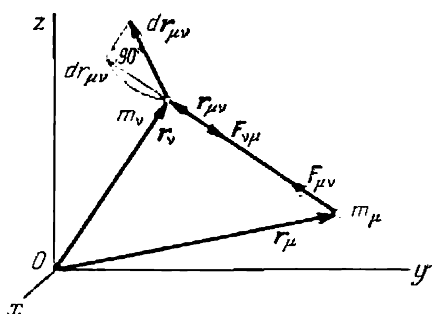


Fig. 19.4

D é m o n s t r a t i o n. Une force intérieure, qui est une force d'interaction entre les points du système, ne dépend que de la distance entre les points, est dirigée suivant la droite joignant les points en question et obéit à la loi de Newton. Supposons que deux points m_ν, m_μ du système (fig. 19.4) effectuent des déplacements élémentaires $d\boldsymbol{r}_\nu$ et $d\boldsymbol{r}_\mu$; le travail élémentaire des forces d'interaction entre ces points est alors égal à

$$(\boldsymbol{F}_{\nu\mu}, d\boldsymbol{r}_\nu) + (\boldsymbol{F}_{\mu\nu}, d\boldsymbol{r}_\mu) = (\boldsymbol{F}_{\nu\mu}, d\boldsymbol{r}_\nu - d\boldsymbol{r}_\mu) =$$
$$= (\boldsymbol{F}_{\nu\mu}, d(\boldsymbol{r}_\nu - \boldsymbol{r}_\mu)) = (\boldsymbol{F}_{\nu\mu}, d\boldsymbol{r}_{\mu\nu}).$$

Ici $\boldsymbol{r}_{\mu\nu} = \boldsymbol{r}_\nu - \boldsymbol{r}_\mu$ est le vecteur joignant les points m_μ et m_ν. Puisque $F_{\nu\mu} = f(r_{\mu\nu})$ et que les vecteurs $\boldsymbol{F}_{\nu\mu}$ et $\boldsymbol{r}_{\mu\nu}$ sont colinéaires, on a (voir fig. 19.4)

$$(\boldsymbol{F}_{\nu\mu}, d\boldsymbol{r}_{\mu\nu}) = f(r_{\mu\nu}) \, |d\boldsymbol{r}_{\mu\nu}| \cos(\widehat{\boldsymbol{F}_{\nu\mu}, d\boldsymbol{r}_{\mu\nu}}) = -f(r_{\mu\nu}) \, dr_{\mu\nu}.$$

Le travail des forces intérieures du système de points matériels s'écrira ainsi :

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{F}_\nu^{(i)}, d\boldsymbol{r}_\nu) = \sum_{\substack{\nu, \mu=1 \\ (\nu > \mu)}}^{n} [(\boldsymbol{F}_{\nu\mu}, d\boldsymbol{r}_\nu) + (\boldsymbol{F}_{\mu\nu}, d\boldsymbol{r}_\mu)] = -\sum_{\substack{\nu, \mu=1 \\ (\nu > \mu)}}^{n} f(r_{\mu\nu}) \, dr_{\mu\nu}.$$

Dans le système de points invariable on a $dr_{\mu\nu} = 0$ ($\nu, \mu = 1, 2, \ldots, n$) pour tous les points (à la différence de la figu-

re 19.4 !), si bien que

$$dA^{(i)} = \sum_{\nu=1}^{n} (F_\nu^{(i)},\ dr_\nu) = 0.$$

Le lemme est démontré.

Puisque tout solide peut être considéré comme un système mécanique invariable, le travail des forces intérieures dans le déplacement du solide est nul comme précédemment. Dans ces cas précis, le théorème de la variation de l'énergie cinétique s'écrira sous forme différentielle, soit comme

$$dT = \sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu^{(e)}\, dx_\nu + Y_\nu^{(e)}\, dy_\nu + Z_\nu^{(e)}\, dz_\nu), \qquad (19.25a)$$

soit comme

$$\frac{dT}{dt} = N^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu^{(e)} v_x^\nu + Y_\nu^{(e)} v_y^\nu + Z_\nu^{(e)} v_z^\nu). \qquad (19.26a)$$

Les seconds membres des formules (19.25a) et (19.26a) sont respectivement le travail élémentaire dans un déplacement réel et la puissance de toutes les forces actives extérieures connues.

La formule (19.27) prend la forme

$$T - T_0 = A^{(e)} = \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu^{(e)}\, dx_\nu + Y_\nu^{(e)}\, dy_\nu + Z_\nu^{(e)} dz_\nu). \quad (19.27a)$$

L'accroissement de l'énergie cinétique du corps solide (ou du système invariable de points matériels) est égal au travail de toutes les forces actives extérieures connues appliquées au corps (au système) sur le chemin considéré. Nous reviendrons à la formule (19.27a) dans le chapitre XXI, nos 2.4 et 2.5.

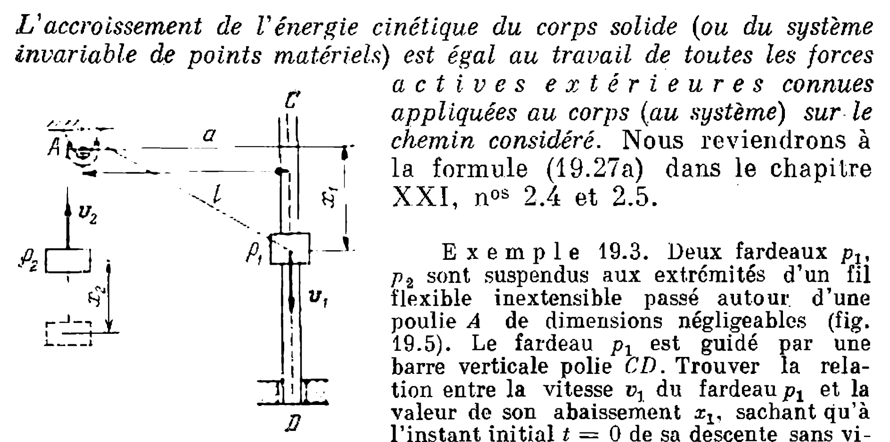


Fig. 19.5

Exemple 19.3. Deux fardeaux p_1, p_2 sont suspendus aux extrémités d'un fil flexible inextensible passé autour d'une poulie A de dimensions négligeables (fig. 19.5). Le fardeau p_1 est guidé par une barre verticale polie CD. Trouver la relation entre la vitesse v_1 du fardeau p_1 et la valeur de son abaissement x_1, sachant qu'à l'instant initial $t = 0$ de sa descente sans vitesse initiale le fardeau se trouvait à la hauteur de l'axe de la poulie.

Solution. Supposons que le fardeau p_1 s'est abaissé de x_1 et le fardeau p_2 a remonté de x_2. Les liaisons étant parfaites et stationnaires, on est en droit d'appliquer le théorème de la variation de l'énergie cinétique du système dans le déplacement considéré. D'après la formule (19.24), l'énergie cinétique

à l'instant t est égale à

$$T = \frac{p_1}{2g} v_1^2 + \frac{p_2}{2g} v_2^2,$$

tandis que $T_0 = 0$. Le travail des forces actives extérieures (les poids de p_1 et p_2) est défini par la formule (19.28):

$$A^{(e)} = p_1 x_1 - p_2 x_2.$$

Abstraction faite du travail des forces intérieures du système (le système n'est pas invariable !), on a d'après la formule (19.27)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{g} v_1^2 + \frac{p_2}{g} v_2^2\right) = p_1 x_1 - p_2 x_2. \qquad (1)$$

Le fil étant inextensible, il ressort des rapports géométriques évidents que

$$x_2 = l - a = \sqrt{x_1^2 + a^2} - a.$$

Dérivant cette équation de liaison, on obtient

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + a^2}} \frac{dx_1}{dt}.$$

Or, $v_1 = dx_1/dt$ et $v_2 = dx_2/dt$, si bien que

$$v_2 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + a^2}} v_1.$$

Portant les expressions trouvées de x_2 et v_2 dans (1), on obtient après simplification

$$v_1^2 = 2g\,(x_1^2 + a^2)\,\frac{p_1 x_1 - p_2\left(\sqrt{x_1^2 + a^2} - a\right)}{p_1\,(x_1^2 + a^2) + p_2 x_1^2}.$$

3.4. Intégrale des forces vives. Rappelons la définition énoncée dans le chapitre XVIII, nº 2.3. Si les forces actives admettent une fonction

$$U\,(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \ldots;\ x_n, y_n, z_n)$$

vérifiant les conditions

$$X_\nu = \frac{\partial U}{\partial x_\nu}, \quad Y_\nu = \frac{\partial U}{\partial y_\nu}, \quad Z_\nu = \frac{\partial U}{\partial z_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

on dit que les forces *dérivent d'une fonction de forces U* ou que les forces sont *conservatives* *).

La fonction de signe opposé

$$V = -U$$

s'appelle *énergie potentielle du système de points matériels.* Ces deux fonctions se définissent à une constante additive près. L'identité

---

*) Un tel système de points matériels est souvent appelé lui-même *système conservatif.*

(19.25) devient alors

$$dT = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial x_\nu} dx_\nu + \frac{\partial U}{\partial y_\nu} dy_\nu + \frac{\partial U}{\partial z_\nu} dz_\nu \right) = dU,$$

où dU est la différentielle de la fonction de forces dans le mouvement réel. On trouve ensuite par intégration

$$T = U + h \qquad (h = T_0 - U_0 = \text{const}). \qquad (19.27\text{b})$$

Cette intégrale première des équations du mouvement du système de points matériels s'appelle *intégrale des forces vives.* La quantité $h = T - U = T + V$ représente l'*énergie mécanique totale* du système.

L'intégrale des forces vives existe chaque fois que les déplacements réels figurent parmi les déplacements virtuels (voir le début du § 3) et que les forces actives dérivent d'une fonction de forces indépendante du temps.

L'existence de l'intégrale des forces vives signifie que l'énergie mécanique totale $T + V$ reste inchangée pendant toute la durée du mouvement; on l'appelle d'ailleurs parfois intégrale de l'énergie.

Nous ferons intervenir l'intégrale des forces vives en démontrant le théorème de Lagrange sur la stabilité de l'équilibre (ch. XX, n° 2.2).

3.5. Remarques sur les applications des théorèmes généraux de la dynamique du système de points matériels. Dans les théorèmes des paragraphes 1 et 2 et dans le théorème de ce paragraphe énoncé pour e système de points invariable, il s'agissait des forces a c t i v e s e x t é r i e u r e s connues: on voulait souligner par là que les formules ne contenaient ni forces intérieures ni réactions de liaison (forces extérieures passives non connues). En outre, dans la mécanique du système, nous n'examinions que des l i a i s o n s p a r f a i t e s, c'est-à-dire sans frottement.

1. Ajoutons cependant qu'on peut aussi déterminer les r é a c t i o n s d e l i a i s o n à l'aide des théorèmes généraux de la dynamique: à cet effet, il suffit de supprimer les liaisons imposées au système, partiellement ou totalement, selon qu'on demande de savoir une partie ou toutes les liaisons. Supprimant les ou des liaisons, on doit a j o u t e r l e s r é a c t i o n s des liaisons supprimées a u x f o r c e s a c t i v e s e x t é r i e u r e s, après quoi on peut appliquer les théorèmes généraux de la dynamique du système et profiter des intégrales premières ainsi obtenues. On peut analyser de cette façon, en particulier, des liaisons élémentaires avec frottement, ajoutant les forces de frottement de glissement, obtenues après la suppression des liaisons correspondantes, aux forces extérieures connues (voir ci-après les exemples 21.1 et 21.4 dans le chapitre XXI).

2. Les théorèmes généraux de la dynamique restent applicables même si les liaisons imposées ne vérifient pas toutes les conditions a), b), c) énoncées dans le n° 1.1 du chapitre XVIII ; tel est par exemple le cas des liaisons avec frottement. En pareils cas on supprime ces liaisons et l'on ajoute les réactions correspondantes aux forces actives extérieures connues.

3. Tous les théorèmes généraux de la dynamique du système de points matériels restent en vigueur aussi pour un système libre de toute liaison, à condition que les réactions correspondantes soient ajoutées aux forces actives extérieures : on peut alors retirer les conditions d'existence des déplacements virtuels correspondants (voir §§ 1 et 2), car un système libre admet tous les déplacements virtuels indiqués.

§ 4. Théorèmes généraux du mouvement du système de points matériels par rapport à son centre de masse

4.1. Moment cinétique et énergie cinétique du système dans les axes de König *). Considérons, en plus du repère inertiel $Oxyz$ un système de coordonnées $Cx'y'z'$ dont l'origine se situe au centre de masse C du système et les axes sont parallèles aux axes fixes Ox, Oy, Oz (*axes de König*, fig. 19.6). Ainsi donc, le trièdre $Cx'y'z'$ est animé d'un mouvement de translation (en général non rectiligne et non uniforme). Le mouvement du système de points matériels par rapport au référentiel $Cx'y'z'$ s'appelle *mouvement par rapport au centre de masse*. Soit un point M_ν de masse m_ν ; désignons ses coordonnées dans $Oxyz$ par x_ν, y_ν, z_ν et dans $Cx'y'z'$ par x'_ν, y'_ν, z'_ν ; on a alors

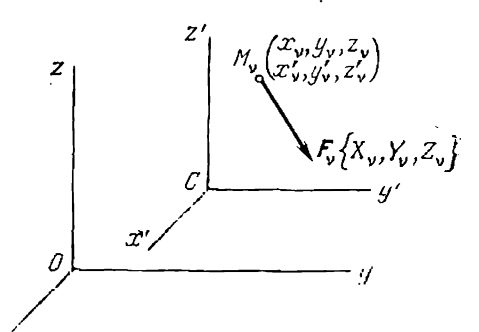


Fig. 19.6

$$x_\nu = x_C + x'_\nu, \quad y_\nu = y_C + y'_\nu, \quad z_\nu = z_C + z'_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \qquad (19.29)$$

Les coordonnées du centre de masse C dans $Oxyz$ sont (voir (6.9), (19.2))

$$x_C = \frac{1}{M} \sum m_\nu x_\nu, \quad y_C = \frac{1}{M} \sum m_\nu y_\nu, \quad z_C = \frac{1}{M} \sum m_\nu z_\nu \quad \left(M = \sum m_\nu\right),$$

*) Samuel König, mécanicien allemand (1712-1757).

où la sommation se fait, comme partout dans la suite, sur tous les points du système. Quant au système $Cx'y'z'$, les coordonnées du centre de masse C y sont évidemment nulles, ce qui nous conduit aux égalités

$$\sum m_\nu x'_\nu = \sum m_\nu y'_\nu = \sum m_\nu z'_\nu = 0. \qquad (19.30)$$

Calculons le moment cinétique du système de points matériels par rapport à un axe fixe, par exemple à Oz. On a d'après les formules (19.18) et (19.29)

$$K_{Oz} = \sum m_\nu [(x_C + x'_\nu)(\dot{y}_C + \dot{y}'_\nu) - (y_C + y'_\nu)(\dot{x}_C + \dot{x}'_\nu)] =$$
$$= \sum m_\nu (x'_\nu \dot{y}'_\nu - y'_\nu \dot{x}'_\nu) + (x_C \dot{y}_C - y_C \dot{x}_C) \sum m_\nu +$$
$$+ x_C \sum m_\nu \dot{y}'_\nu + \dot{y}_C \sum m_\nu x'_\nu - y_C \sum m_\nu \dot{x}'_\nu - \dot{x}_C \sum m_\nu y'_\nu.$$

(Les points désignent les dérivées par rapport au temps.) La deuxième somme est égale au moment de la quantité de mouvement $Q = Mv_C$ du système (voir (19.4)) par rapport à l'axe Oz. Les quatre dernières sommes restent nulles pendant toute la durée du mouvement; on s'en assure après avoir dérivé les identités (19.30). Nous venons d'établir la première formule de König:

$$K_{Oz} = K'_{Cz'} + M\left(x_C \frac{dy_C}{dt} - y_C \frac{dx_C}{dt}\right) = K'_{Cz'} + \mathrm{mom}_{Oz} M v_C, \qquad (19.31)$$

où

$$K'_{Cz'} = \sum m_\nu \left(x'_\nu \frac{dy'_\nu}{dt} - y'_\nu \frac{dx'_\nu}{dt}\right). \qquad (19.32)$$

Le *moment cinétique* K_{Oz} du système de points matériels par rapport à un *axe fixe Oz* est égal à la *somme* du moment cinétique du système $K'_{Cz'}$ par rapport à l'*axe mobile Cz'* parallèle à Oz et passant par le centre de masse C et du *moment* par rapport à l'axe *fixe Oz de la quantité de mouvement totale du système*, appliqué au centre de masse. Autrement dit, le moment cinétique du système de points matériels dans son mouvement absolu est égal au moment cinétique de celui-ci dans les axes de König augmenté du moment de la quantité de mouvement du centre de masse du système dans son mouvement absolu (la masse du centre de masse étant égale à la masse du système).

Calculons à présent l'énergie cinétique du système de points matériels. D'après la formule (19.24) et les formules (19.29)

$$T = \frac{1}{2} \sum m_\nu [(\dot{x}_C + \dot{x}'_\nu)^2 + (\dot{y}_C + \dot{y}'_\nu)^2 + (\dot{z}_C + \dot{z}'_\nu)^2] =$$
$$= \frac{1}{2} \sum m_\nu (\dot{x}'^2_\nu + \dot{y}'^2_\nu + \dot{z}'^2_\nu) + \frac{1}{2}(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) \sum m_\nu +$$
$$+ \dot{x}_C \sum m_\nu \dot{x}'_\nu + \dot{y}_C \sum m_\nu \dot{y}'_\nu + \dot{z}_C \sum m_\nu \dot{z}'_\nu.$$

La deuxième somme est égale à l'énergie cinétique du centre de masse du système, à condition que ce centre contienne toute la masse du système. Les trois dernières sommes restent nulles pendant toute la durée du mouvement, en vertu des identités (19.30). Nous venons d'établir la deuxième formule de König:

$$T = T'_C + \frac{1}{2} M v_C^2 \qquad (19.33)$$

dans laquelle

$$T'_C = \frac{1}{2} \sum m_\nu \left[\left(\frac{dx'_\nu}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy'_\nu}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz'_\nu}{dt} \right)^2 \right]. \qquad (19.34)$$

L'*énergie cinétique* T du système de points matériels dans son mouvement absolu est égale à la *somme* de son énergie cinétique T'_C dans son mouvement *rapporté aux axes de König* et de l'énergie cinétique du *centre de masse* du système dans le mouvement absolu (la masse du centre de masse étant supposée égale à celle du système de points matériels).

4.2. Théorème de Resal *) sur la variation du moment cinétique du système dans son mouvement relatif (par rapport au centre de masse du système). *Supposons que les liaisons imposées au système de points matériels sont géométriques, bilatérales, parfaites et permettent en particulier les déplacements virtuels suivants:*

a) *translation du système, à la façon d'un corps solide, dans les directions des axes Ox et Oy;*

b) *rotation du système, à la façon d'un corps solide, autour de l'axe fixe Oz.*

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique $K'_{Cz'}$ *du système par rapport à l'axe de König Cz' est égale alors au moment résultant par rapport à cet axe des forces actives extérieures:*

$$\frac{dK'_{Cz'}}{dt} = M_{Cz'}^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{mom}_{Cz'} F_\nu^{(e)}. \qquad (19.35)$$

Démonstration. La condition a) du théorème donne lieu au théorème du mouvement du centre de masse du système (voir (19.9)):

$$M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum X_\nu^{(e)}, \quad M \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum Y_\nu^{(e)}. \qquad (19.36)$$

La condition b) donne lieu au théorème du moment cinétique du système par rapport à l'axe fixe Oz (voir (19.19) et (5.17)):

$$\frac{dK_{Oz}}{dt} = M_{Oz}^{(e)} = \sum \left(x_\nu Y_\nu^{(e)} - y_\nu X_\nu^{(e)} \right).$$

Portons dans le premier membre les expressions tirées des formules (19.31) et (19.32) et faisons la dérivation, puis substituons dans

*) Henri Resal, ingénieur et mathématicien français (1828-1896).

le second membre les valeurs des coordonnées tirées de (19.29):

$$\frac{dK'_{Cz'}}{dt}+x_C M\frac{d^2y_C}{dt^2}-y_C M\frac{d^2x_C}{dt^2}=$$

$$=\sum(x'_\nu Y^{(e)}_\nu-y'_\nu X^{(e)}_\nu)+x_C\sum Y^{(e)}_\nu-y_C\sum X^{(e)}_\nu.$$

Les deux derniers termes du premier et du second membre sont égaux deux à deux en vertu de (19.36) ; on obtient en les supprimant

$$\frac{dK'_{Cz'}}{dt}=\sum(x'_\nu Y^{(e)}_\nu-y'_\nu X^{(e)}_\nu).$$

Le second membre est précisément $M^{(e)}_{Cz'}$, le moment résultant des forces actives extérieures par rapport à l'axe de König Cz'. Le théorème est démontré.

4.3. Théorème de la variation de l'énergie cinétique du système dans son mouvement relatif (par rapport au centre de masse du système) (König). *Si les liaisons imposées au système* a) *sont géométriques, bilatérales, parfaites et stationnaires* (ne dépendent pas explicitement du temps);

b) *permettent, parmi les déplacements virtuels du système de points matériels, des translations en direction quelconque*, en particulier dans les directions des axes Ox, Oy et Oz, *la différentielle de l'énergie cinétique* T'_C *dans le mouvement rapporté aux axes de König est égale à la somme des travaux élémentaires de toutes les forces actives connues* (tant extérieures qu'intérieures) *dans le déplacement relatif réel du système:*

$$dT'_C=\sum_{\nu=1}^{n}(X_\nu\,dx'_\nu+Y_\nu\,dy'_\nu+Z_\nu\,dz'_\nu). \qquad (19.37)$$

D é m o n s t r a t i o n. La condition b) donne lieu au théorème du mouvement du centre de masse du système (voir (19.9) et (19.13)):

$$M\frac{d^2x_C}{dt^2}=\sum X_\nu,\quad M\frac{d^2y_C}{dt^2}=\sum Y_\nu,\quad M\frac{d^2z_C}{dt^2}=\sum Z_\nu. \quad (19.38)$$

La condition a) donne lieu au théorème de la variation de l'énergie cinétique dans le mouvement absolu (voir (19.25)):

$$dT=\sum(X_\nu dx_\nu+Y_\nu dy_\nu+Z_\nu dz_\nu).$$

Portons dans le premier membre les expressions tirées des formules (19.33), (19.34) et dans le second membre les valeurs des coordonnées tirées de (19.29):

$$dT'_C+M\frac{d^2x_C}{dt^2}dx_C+M\frac{d^2y_C}{dt^2}dy_C+M\frac{d^2z_C}{dt^2}dz_C=$$

$$=\sum(X_\nu\,dx'_\nu+Y_\nu\,dy'_\nu+Z_\nu\,dz'_\nu)+dx_C\sum X_\nu+dy_C\sum Y_\nu+dz_C\sum Z_\nu.$$

Les trois derniers termes dans le premier et le second membre sont égaux deux à deux en vertu de (19.38) ; en les supprimant, on retrouve (19.37). Le théorème est démontré.

On peut donc, en imposant certaines conditions aux liaisons, appliquer les théorèmes des paragraphes 1 et 2 au cas de mouvement du système de points matériels par rapport à son centre de masse. Nous verrons des applications de ces théorèmes dans la dynamique du solide (ch. XXI, § 3).

Exercices

Exercice 19.1. Le chariot d'une grue roulante se déplace avec la vitesse v par rapport à la grue (fig. 19.7). Le poids de la grue est P, le poids du chariot Q. Abstraction faite de toutes les forces de résistance, quelle sera la vitesse de recul u de la grue ?

Réponse. $u = -\dfrac{Q}{P+Q}v.$

Exercice 19.2. Deux fardeaux A, B de masses m_1, m_2 sont reliés par un fil inextensible passé autour d'une poulie D (fig. 19.8). Le fardeau B

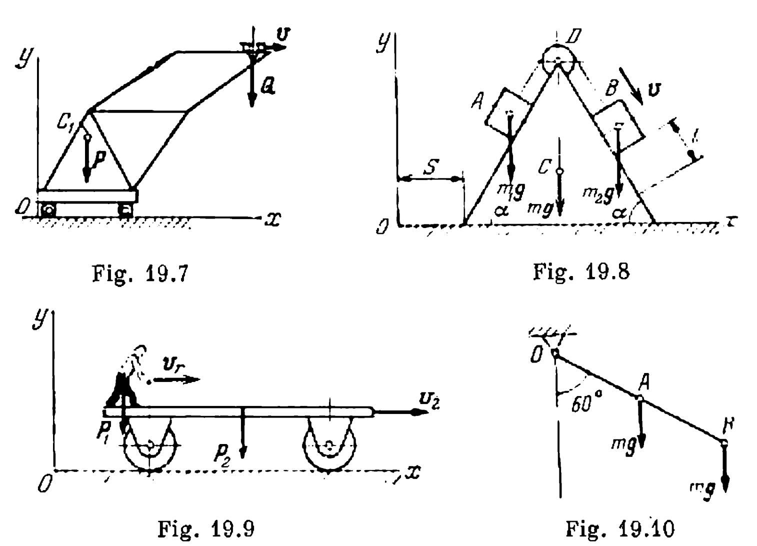


Fig. 19.7 Fig. 19.8

Fig. 19.9 Fig. 19.10

glisse vers le bas sur la face latérale d'un prisme triangulaire de masse m, mettant en mouvement le fardeau A. Quel est l'espace parcouru par le prisme sur le plan horizontal poli quand le fardeau B s'abaisse d'une longueur l ? On ne tient pas compte des masses de la poulie et du fil. A l'instant initial le système est en repos.

Réponse. $s = -\dfrac{m_1+m_2}{m+m_1+m_2}\, l \cos \alpha.$

Exercice 19.3. Un homme de masse m_1 se met à marcher sur la plateforme d'un wagonnet avec une vitesse relative constante v_r (fig. 19.9). A l'instant initial le wagonnet de masse m_2 se trouve en repos. Chercher les vitesses absolues

du wagonnet v_1 et de l'homme v_2. Le wagonnet roule sur une voie horizontale. On ne tient pas compte du frottement entre les rails et les roues.

Réponse. $v_1 = -\frac{m_1}{m_1+m_2} v_r$, $v_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2} v_r$.

Exercice 19.4. Deux points matériels A et B de même masse m sont fixés sur une barre rigide sans poids, de longueur $2a$. Le point A est fixé au milieu, et le point B à l'extrémité de la barre (fig. 19.10). L'autre extrémité de la barre est articulée en O. A l'instant initial la barre est écartée de 60° par rapport à la verticale et abandonnée sans vitesse initiale. On demande la vitesse angulaire ω avec laquelle la barre franchira sa position d'équilibre stable.

Réponse. $|\omega| = \sqrt{\frac{3}{5}\frac{g}{a}}$ rad/s.

CHAPITRE XX

PRINCIPE DE D'ALEMBERT. STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE ET PETITES OSCILLATIONS

Avant d'aborder la dynamique du solide, nous allons traiter deux questions séparées qui se rapportent toutes les deux au système de points matériels.

§ 1. Principe de d'Alembert

1.1. Principe de d'Alembert *) pour le point matériel. Considérons de nouveau le mouvement du point matériel gêné (ch. XVI, § 1). Il est sollicité par la résultante des forces actives connues $\boldsymbol{F}$ et la résultante des réactions de liaison (forces passives) $\boldsymbol{N}$ (fig. 20.1). La résultante de ces deux forces

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N},$$

en vertu de la deuxième loi de Newton, communique au point un mouvement avec une accélération $\boldsymbol{w}$ dirigée suivant la ligne d'action de $\boldsymbol{R}$, et ceci en sorte que

$$\boldsymbol{R} = m\boldsymbol{w}$$

ou

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{N} + (-m\boldsymbol{w}) = 0. \qquad (20.1)$$

Le terme $(-m\boldsymbol{w})$ a la dimension d'une force.

On appelle *force d'inertie* $\boldsymbol{I}$ du point matériel un vecteur fictif $(-m\boldsymbol{w})$ appliqué au point mobile, ayant pour module le produit de la masse du point par son accélération et dirigé à l'opposé du vecteur accélération du point:

$$\boldsymbol{I} = -m\boldsymbol{w}. \qquad (20.2)$$

Fig. 20.1

Il convient de souligner que la force d'inertie $\boldsymbol{I}$, représentée par un vecteur qui n'est pas réellement appliqué au point, est une force fictive. Pour l'observateur fixe, il n'existe aucune force en dehors des actions des corps matériels, qui sont toutes prises en

*) Jean Le Rond d'Alembert, philosophe, mathématicien et mécanicien français (1717-1783).

compte par la somme des vecteurs $F + N$ dans l'équation (20.1). L'appellation « force d'inertie » est en l'occurrence une pure convention. Il en est tout autrement des forces d'inertie qui proviennent de l'accélération d'entraînement et de l'accélération complémentaire (ch. XVI, n° 2.1) : ce sont des forces réelles, qui se laissent mesurer en comparant les lectures du dynamomètre en systèmes de référence fixes et mobiles.

Nous énoncerons maintenant le

Principe de d'Alembert pour le point matériel gêné. *En ajoutant la force d'inertie* (20.2) *à toutes les forces connues et réactions de liaison appliquées au point matériel, on obtient à chaque instant un système de forces en équilibre*:

$$F + N + I = 0. \qquad (20.1a)$$

Dans le cas particulier où le point est libre, on pose dans (20.1a) $N = 0$.

Il faut souligner que cet énoncé est conventionnel, lui aussi. En effet, on ne peut pas parler d'un équilibre de forces pendant le mouvement du système, car les forces actives et les réactions de liaison sont réellement appliquées au point matériel, alors que la force d'inertie est fictive (un vecteur qui n'est pas réellement appliqué au point mobile).

Le principe de d'Alembert est un outil commode pour la résolution des problèmes de dynamique, car il permet de réduire les équations du mouvement à celles de l'équilibre. Il serait cependant faux de croire qu'on réduit de cette façon le problème de dynamique à un problème de statique, car, tout en se facilitant la mise en équations du mouvement, on est généralement obligé, comme par le passé, de procéder à l'intégration de ces équations.

L'équation vectorielle (20.1a) se laisse récrire en termes de projections sur les axes du repère inertiel:

$$F_x + N_x + I_x = 0, \; F_y + N_y + I_y = 0, \; F_z + N_z + I_z = 0. \qquad (20.3)$$

En y substituant les expressions

$$I_x = -mw_x = -m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad I_y = -mw_y = -m\frac{d^2y}{dt^2},$$
$$I_z = -mw_z = -m\frac{d^2z}{dt^2},$$

on retrouve l'équation (13.6).

Projetons les deux membres de (20.1a) sur les axes intrinsèques $M\tau$, Mn, Mb (voir ch. VII, n° 3.3). Il vient

$$F_\tau + N_\tau + I_\tau = 0, \quad F_n + N_n + I_n = 0, \quad F_b + N_b = 0, \qquad (20.4)$$

car $I_b = -mw_b \equiv 0$ (on a pour des liaisons parfaites $N \perp M\tau$ et donc $N_\tau = 0$). Portant dans les équations (20.4) les expressions

$$I_\tau = -mw_\tau = -m\frac{dv_\tau}{dt}, \quad I_n = -mw_n = -m\frac{v^2}{\rho}$$

(où ρ est le rayon de courbure de la trajectoire), on retrouve les équations (13.8). Les forces I_τ, I_n sont appelées respectivement *force d'inertie tangentielle* et *force d'inertie normale*.

Exemple 20.1. Soit une barre sans poids OA de longueur l animée de rotation avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'articulation sphérique O (engendrant une surface conique) et portant à son extrémité A un point pesant de masse m (fig. 20.2). Déterminer l'angle γ que fait la barre avec la verticale et la réaction dynamique N de la barre.

Solution. Animé d'un mouvement circulaire uniforme, le point possède une accélération

$$w = w_n = l\omega^2 \sin\gamma$$

dirigée vers le centre O_1 de la circonférence. La force d'inertie est dirigée à partir du centre de la circonférence. Son module est égal à

$$I_n = mw_n = ml\omega^2 \sin\gamma.$$

La force donnée F est le poids mg. La réaction N de la barre est dirigée le long de celle-ci vers le point O. Orientons l'axe Oy verticalement vers le bas et sup-

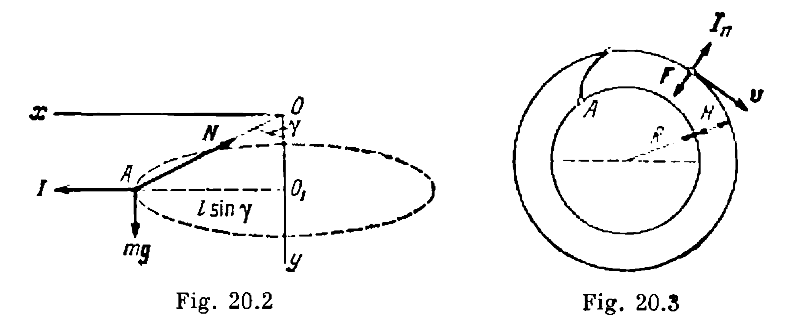


Fig. 20.2   Fig. 20.3

posons qu'à l'instant considéré le plan Oxy passe par le point A. Ecrivons les équations (20.3):

$$-N\sin\gamma + ml\omega^2 \sin\gamma = 0, \qquad mg - N\cos\gamma = 0.$$

Elles permettent de calculer

$$N = ml\omega^2, \quad \cos\gamma = \frac{mg}{N} = \frac{g}{l\omega^2}.$$

La barre est sollicitée par la force d'inertie centrifuge $ml\omega^2$ orientée dans le sens inverse de la réaction dynamique N.

Exemple 20.2. Déterminer la vitesse v et le temps de révolution T du satellite placé sur une orbite circulaire d'altitude H, abstraction faite de la résistance de l'atmosphère (fig. 20.3).

Solution. La force d'attraction F à l'altitude H se définit par la formule (13.31) (voir l'exemple 13.7). Les modules des forces d'inertie tangentielle et normale sont égaux à

$$I_\tau = mw_\tau = m\frac{dv}{dt}, \quad I_n = mw_n = m\frac{v^2}{R+H},$$

où m est la masse du satellite. On a d'après les équations (20.4)

$$m\frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{mgR^2}{(R+H)^2} - \frac{mv^2}{R+H} = 0,$$

d'où

$$v = \text{const}, \quad v = \sqrt{gR}\sqrt{\frac{R}{R+H}} = 7910\sqrt{\frac{R}{R+H}}\ \text{m/s}.$$

Connaissant la longueur de la circonférence de rayon $R + H$, on établit la formule définissant le temps de révolution (période) du satellite autour de la Terre:

$$T = \frac{2\pi(R+H)}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(\frac{R+H}{R}\right)^{3/2} = 84{,}43\left(1+\frac{H}{R}\right)^{3/2}\ \text{mn}.$$

Sur la figure 20.3 le point A marque le point de départ du vecteur, et le point B, la mise sur orbite circulaire du satellite.

A titre d'exercice, nous recommandons au lecteur de reprendre le problème du pendule simple (ch. XVI, n° 3.3) et de déduire au moyen des équations (20.4) l'équation différentielle des oscillations et l'expression du module de la réaction dynamique S du fil.

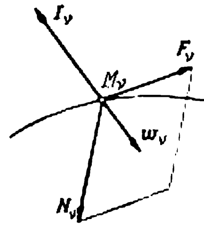


Fig. 20.4

1.2. Principe de d'Alembert pour le système de points matériels. Considérons un système de n points matériels $M_1, M_2, \ldots, M_n$ soumis à des liaisons géométriques (holonomes) bilatérales (voir ch. XVII, n° 1.1) qui ne sont pas stationnaires (scléronomes) et parfaites dans le cas général. Désignons les masses des points par $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Les forces actives connues (extérieures et intérieures) appliquées à un ν-ième point se résument par la résultante $\boldsymbol{F}_\nu$, et les réactions de liaison dans le même point, par $\boldsymbol{N}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) (fig. 20.4). On a pour chaque point du système, en vertu de la deuxième loi de Newton,

$$\boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{N}_\nu + (-m_\nu \boldsymbol{w}_\nu) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{20.5}$$

Le vecteur

$$\boldsymbol{I}_\nu = -m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \tag{20.6}$$

appliqué au ν-ième point s'appelle force d'inertie du ν-ième point matériel.

Principe de d'Alembert pour le système de points matériels. *En ajoutant à toutes les forces actives et passives* (réactions de liaison) *appliquées aux points du système les forces d'inertie* (20.6) *de chaque point matériel, on obtient un système de forces en équilibre* (voir (20.5)).

Les forces d'inertie (20.6) sont des forces fictives, comme on l'a fait remarquer dans le n° 1.1.

Le principe de d'Alembert peut s'énoncer sous une autre forme. Si on arrête instantanément le système mobile à un instant quelcon-

que et que l'on applique à chaque point matériel du système les forces qui existent au moment de l'arrêt : la force active $\boldsymbol{F}_\nu$, la force passive (réaction de liaison) $\boldsymbol{N}_\nu$ et la force d'inertie (fictive) $\boldsymbol{I}_\nu$, le système reste en équilibre.

Expliquons la notion d'arrêt instantané. Imaginons, à côté du système mobile considéré, un système identique soumis aux mêmes liaisons mais fixe. Si nous appliquons à ce système imaginaire les mêmes forces actives et les forces d'inertie, le système imaginaire restera en repos, les réactions de liaison étant les mêmes que dans le système mobile considéré.

Le principe de d'Alembert réduit formellement le problème de dynamique au problème de l'équilibre des forces, c'est-à-dire à un problème de statique. En disant « formellement », nous soulignons que les équations écrites sous la forme (20.5) restent des équations du mouvement et demandent généralement à être intégrées.

Or, en considérant (20.5) comme équations d'équilibre d'un système de forces quelconque (système de forces dans l'espace) appliqué au solide, nous obtenons dans le cas général *six équations de la cinétostatique* :

a) trois équations pour la somme des projections des forces actives extérieures, des réactions de liaison et des forces d'inertie fictives sur les axes du repère inertiel $Oxyz$:

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=1}^{n}(X_\nu^{(e)}+N_x^\nu+I_x^\nu)=0,\\ \sum_{\nu=1}^{n}(Y_\nu^{(e)}+N_y^\nu+I_y^\nu)=0,\\ \sum_{\nu=1}^{n}(Z_\nu^{(e)}+N_z^\nu+I_z^\nu)=0;\end{gathered}\tag{20.7}$$

b) trois équations pour la somme des moments des forces actives extérieures, des réactions de liaison et des forces d'inertie fictives par rapport aux trois axes indiqués :

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=1}^{n}(\mathrm{mom}_{Ox}\boldsymbol{F}_\nu^{(e)}+\mathrm{mom}_{Ox}\boldsymbol{N}_\nu+\mathrm{mom}_{Ox}\boldsymbol{I}_\nu)=0,\\ \sum_{\nu=1}^{n}(\mathrm{mom}_{Oy}\boldsymbol{F}_\nu^{(e)}+\mathrm{mom}_{Oy}\boldsymbol{N}_\nu+\mathrm{mom}_{Oy}\boldsymbol{I}_\nu)=0,\\ \sum_{\nu=1}^{n}(\mathrm{mom}_{Oz}\boldsymbol{F}_\nu^{(e)}+\mathrm{mom}_{Oz}\boldsymbol{N}_\nu+\mathrm{mom}_{Oz}\boldsymbol{I}_\nu)=0.\end{gathered}\tag{20.8}$$

Exemple 20.3 (problème de G. de Laval). Détermination de la vitesse angulaire critique de la poulie montée sur un arbre flexible dans le cas le plus simple.

S o l u t i o n. Précisons la position du problème. Nous supposons que l'arbre est vertical, rectiligne à l'état non déformé, résiste à la torsion, est parfaitement élastique en flexion et se laisse incliner et se déplacer longitudinalement sans difficulté dans ses paliers. La poulie est cylindrique, placée perpendiculairement à l'arbre au milieu de celui-ci de telle façon que le point d'emmanchement W de l'arbre ne se confond pas avec le centre de gravité S de la poulie (fig. 20.5). La distance $WS = e$ s'appelle *excentricité*; la masse de la poulie est m. Un moteur met l'arbre en rotation avec une vitesse angulaire constante ω.

Soit O le point en lequel le plan médian de la poulie intercepte l'axe de l'arbre quand celui-ci n'est pas déformé. Négligeant l'action du poids et du frottement dans les paliers, nous disons que la seule force active exercée sur la poulie est la force élastique $\boldsymbol{K}$ de l'arbre, proportionnelle à la flèche OW:

$$K = cOW,$$

où la constante c est fonction du matériau de l'arbre, de sa section transversale et de la distance entre les appuis. Puisque l'arbre tourne avec une vitesse angulaire constante ω, chaque élément Δm de la poulie ne subit qu'une force d'inertie normale (centrifuge) égale à $\Delta m \cdot r\omega^2$, où r est la distance entre l'élément Δm et l'axe à l'état non déformé. La résultante $\boldsymbol{I}_n$ des forces d'inertie normales est appliquée au centre de gravité S de la poulie; son intensité est égale à

$$I_n = mr_S\,\omega^2,$$

où r_S est la distance entre S et l'axe (non déformé) de l'arbre.

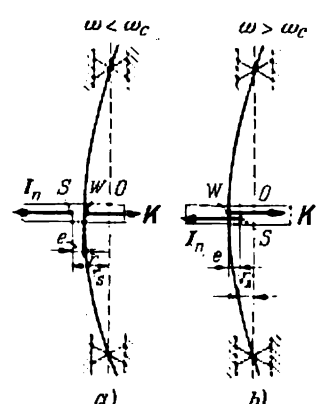


Fig. 20.5

Conformément au principe de d'Alembert, les forces $\boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{I}_n$ se font équilibre à chaque instant. Cela revient à dire tout d'abord que les points O, W et S sont situés sur une même droite. Les deux cas possibles représentés sur la figure 20.5 sont résumés par l'égalité

$$OW = OS \mp WS = r_S \mp e.$$

Il doit y avoir en outre $I_n = K$, de sorte que

$$mr_S\omega^2 = c\,(r_S \mp e),$$

d'où

$$r_S = \frac{\mp ce}{m\omega^2 - c} = \frac{\mp \omega_c^2 e}{\omega^2 - \omega_c^2} \qquad \left(\omega_c = \sqrt{\frac{c}{m}}\right).$$

Puisque r_S doit rester positif, on prendra dans le numérateur le signe négatif quand $\omega < \omega_c$ (fig. 20.5, *a*) et le signe positif quand $\omega > \omega_c$ (fig. 20.5, *b*). Pour $\omega = \omega_c$ le dénominateur s'annule, ce qui ne conduit pourtant pas en pratique aux flèches indéfinies (en raison des hypothèses simplificatrices admises); par contre, lorsque la vitesse de rotation se situe autour de $\omega \approx \omega_c$, il se produit des perturbations très fortes qui peuvent occasionner la rupture de l'arbre. La vitesse angulaire $\omega = \omega_c$ s'appelle *critique*. Quand la vitesse angulaire augmente indéfiniment, on a

$$r_S \to 0 \quad \text{pour} \quad \omega \to \infty.$$

Cela veut dire que le centre de gravité S de la poulie tend vers la position O.

Ce phénomène, appelé autocentrage de l'arbre flexible, a été remarqué en 1889 par l'inventeur suédois G. de Laval.

Le principe de d'Alembert convient surtout pour la recherche des réactions dynamiques des liaisons, c'est-à-dire des réactions qui se produisent pendant le mouvement du système de points matériels. Nous en donnerons un exemple tout de suite, avant de consacrer à la détermination des réactions dynamiques tout le paragraphe 2 du chapitre XXII.

Exemple 20.4. La chaîne passée autour d'une poulie à pignon de poids Q et de rayon R porte à son extrémité un fardeau A de poids P. Supposant que la masse de la poulie est uniformément répartie suivant la jante, déterminer l'accélération w du fardeau A, la tension T de la chaîne et l'effort exercé sur le palier de l'axe de la poulie (fig. 20.6).

Solution. Supposons que le fardeau A descend avec une accélération; la force d'inertie du fardeau $I_A = -Pw/g$ est orientée alors vers le haut. L'accélération de chaque point de la poulie se compose d'une accélération

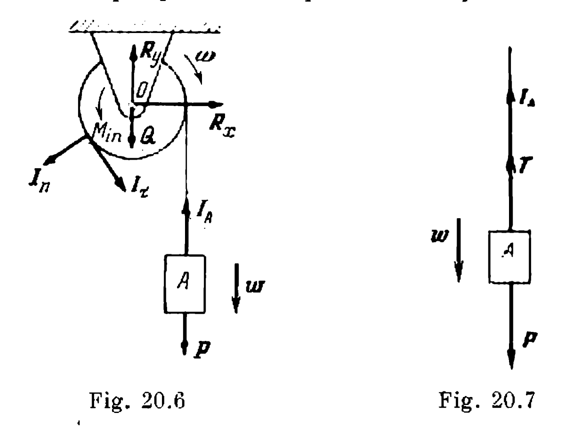


Fig. 20.6 Fig. 20.7

normale w_n et d'une accélération tangentielle w_τ. Aussi chaque élément Δm de la poulie est-il sollicité par une force d'inertie normale $I_n = -\Delta m w_n$ orientée à partir de l'axe Oz, et une force d'inertie tangentielle $I_\tau = -\Delta m w_\tau$ orientée en sens inverse de w_τ. Appliquons au point O les composantes R_x, R_y de la réaction du palier de l'axe. Ecrivons les équations (20.7), (20.8) pour le système poulie-fardeau. Le système de forces étant plan, la dernière équation (20.7) et les deux premières équations (20.8) font défaut:

$$\sum X = R_x = 0, \quad \sum Y = -P - Q + \frac{P}{g} w + R_y = 0,$$
$$\sum \text{mom}_O = -PR + \frac{P}{g} wR + \sum \text{mom}_O I_\tau = 0. \qquad (20.9)$$

La somme géométrique des forces d'inertie appliquées à la poulie est nulle par raison de symétrie. Les forces d'inertie normales passent par l'axe Oz et ne fournissent donc aucun moment par rapport à cet axe. Pour calculer la somme des moments des forces d'inertie tangentielles, remarquons que

$$I_\tau = \Delta m w_\tau = \Delta m R\varepsilon, \qquad \sum \text{mom}_O I_\tau = \sum \Delta m R\varepsilon \cdot R = MR^2\varepsilon,$$

puisque la masse $M = Q/g$ de la poulie est répartie suivant la jante. D'autre part, on a $\varepsilon = w/R$, aussi le moment des forces d'inertie de la poulie par rapport au point O (de l'axe Oz) est-il égal à

$$MR^2\varepsilon = \frac{Q}{g} Rw.$$

De la dernière équation (20.9) on tire

$$w = \frac{P}{P+Q} g,$$

et les deux premières équations nous donnent alors

$$R_x = 0, \quad R_y = P + Q - \frac{P}{g} w = P + Q - \frac{P^2}{P+Q} = \frac{(2P+Q)\,Q}{P+Q}.$$

L'effort exercé sur le palier de l'axe est égal à $-R_y$.

Afin de déterminer la tension de la chaîne, considérons séparément le mouvement du fardeau (fig. 20.7). Coupons la chaîne et remplaçons son action par la tension T. Ajoutons à la force active P et à la force passive T la force d'inertie fictive $I_A = -Pw/g$; il vient en vertu de (20.1)

$$-P + T + \frac{P}{g} w = 0,$$

d'où

$$T = P - \frac{P}{g} w = P - \frac{P^2}{P+Q} = \frac{PQ}{P+Q}.$$

§ 2. Stabilité de l'équilibre et petites oscillations

2.1. Position du problème *). Considérons un système de n points matériels de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ soumis à des liaisons géométriques (holonomes), bilatérales, parfaites (voir ch. XVII, n° 1.1) mais non stationnaires (rhéonomes, ou dépendantes explicitement du temps). Soient $q_1, q_2, \ldots, q_k$ les coordonnées généralisées définissant la position du système. Supposons que les forces appliquées aux points du système dérivent d'une fonction de forces $U(q_1, q_2, \ldots, q_k)$. La position d'équilibre d'un tel système se définit par les équations (17.15) qui, en vertu de (18.12), s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0. \tag{20.10}$$

Supposant que ces équations définissent une position d'équilibre isolée, choisissons les coordonnées généralisées $q_1, q_2, \ldots, q_k$ de telle façon qu'elles s'annulent en cette position. Supposons également **) que l'énergie cinétique T du système soit une forme

*) Le problème de la stabilité de l'équilibre avait été posé encore dans l'Antiquité, notamment par Aristote (384-322 av. notre ère) et Archimède (287-212 av. notre ère). Evangelista Torricelli (1608-1647) a formulé le principe général de la stabilité des corps pesants: en état d'équilibre stable le centre de gravité descend aussi bas que possible.

**) On peut aussi le démontrer, sous les hypothèses consenties.

quadratique homogène des vitesses généralisées, de telle sorte que

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{k} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \quad (a_{ji}=a_{ij}),$$

où les coefficients a_{ij} ne dépendent que des coordonnées généralisées:

$$a_{ij}=a_{ij}(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_k) \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

La *position d'équilibre* $q_1=q_2=\ldots=q_k=0$ d'un système de points matériels est appelée *stable* si, quels que soient les nombres strictement positifs α et α', il existe des nombres strictement positifs δ et δ' tels que pour

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} q_{\varkappa 0}^2 \leqslant \delta, \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} \dot{q}_{\varkappa 0}^2 \leqslant \delta'$$

on ait à chaque instant $t \geqslant t_0$

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} q_{\varkappa}^2 < \alpha, \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} \dot{q}_{\varkappa}^2 < \alpha'.$$

Ici $q_{\varkappa 0}=q_\varkappa(t_0)$ et $\dot{q}_{\varkappa 0}=\dot{q}_\varkappa(t_0)$ $(\varkappa=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ sont les valeurs initiales des coordonnées généralisées et des vitesses. Autrement dit, la position d'équilibre est stable si, pendant le mouvement qui commence à partir de cette position, les coordonnées et les vitesses demeurent aussi petites que l'on veut, à condition que leurs valeurs initiales soient suffisamment petites.

2.2. Théorème de la stabilité de l'équilibre (Lagrange) *). *Si la fonction de forces admet un maximum isolé dans la position d'équilibre du système de points matériels, la position d'équilibre est stable.*

Démonstration. Puisque la fonction de forces ne se définit qu'à une constante additive près, nous supposerons qu'elle s'annule en passant par la position d'équilibre,

$$U(0,\ 0,\ \ldots,\ 0)=0,$$

en même temps que l'énergie cinétique du système:

$$T(0,\ 0,\ \ldots,\ 0;\quad 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)=0.$$

*) La première démonstration rigoureuse du théorème de Lagrange est due au mathématicien allemand Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859). Sa démonstration allait servir de base au théorème connu de A. Liapounov sur la stabilité. La réciproque du théorème de Lagrange sera démontrée par Liapounov, puis, sous des hypothèses moins restrictives, par N. Tchétaïev.

Le maximum étant isolé, il existe un voisinage de la position d'équilibre

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} q_{\varkappa}^2 \leqslant \lambda$$

dans lequel la fonction de forces n'admet aucun autre point stationnaire que la position d'équilibre. Supposons que la fonction de forces vérifie l'inégalité

$$U \leqslant -\varepsilon$$

sur une sphère à k dimensions de rayon $\sqrt{\alpha}$ dans l'espace de $q_1, q_2, \ldots, q_k$, c'est-à-dire pour

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} q_{\varkappa}^2 = \alpha \leqslant \lambda,$$

tandis que sur une sphère à k dimensions de rayon $\sqrt{\alpha'}$ dans l'espace de $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k$, c'est-à-dire lorsque

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} q_{\varkappa}^2 \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad \sum_{\varkappa=1}^{k} \dot{q}_{\varkappa}^2 = \alpha', \tag{20.11}$$

l'énergie cinétique du système vérifie l'inégalité

$$T \geqslant \varepsilon.$$

Comme les fonctions U, T sont continues, il existe des nombres δ, δ' tels que dans le domaine

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} q_{\varkappa}^2 \leqslant \delta, \quad \sum_{\varkappa=1}^{k} \dot{q}_{\varkappa}^2 \leqslant \delta'$$

sont vérifiées les inégalités

$$U > -\frac{1}{2}\varepsilon, \quad T < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Choisissons maintenant les valeurs initiales des coordonnées et des vitesses dans ce domaine, c'est-à-dire

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} q_{\varkappa 0}^2 \leqslant \delta, \quad \sum_{\varkappa=1}^{k} \dot{q}_{\varkappa 0}^2 \leqslant \delta'; \tag{20.12}$$

il vient alors

$$U_0 > -\frac{1}{2}\varepsilon, \quad T_0 < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

En raison de l'existence de l'intégrale des forces vives (19.27b)

$$T - U = T_0 - U_0,$$

on a à chaque instant du mouvement

$$T = U + T_0 - U_0 \leqslant T_0 - U_0 < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Puisque sur la sphère (20.11) on a toujours $T \geqslant \varepsilon$, à chaque instant suivant $t \geqslant t_0$ du mouvement commencé dans le domaine (20.12) on a les inégalités

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} q_\varkappa^2 < \alpha, \quad \sum_{\varkappa=1}^{k} \dot{q}_\varkappa^2 < \alpha',$$

ce qui veut dire que la position d'équilibre est stable. Le théorème est démontré. On recommande au lecteur de s'adresser à la figure 17.3 et d'établir laquelle des trois positions d'équilibre est stable.

E x e m p l e 20.5. Un cylindre circulaire homogène de rayon r est posé horizontalement sur un cylindre circulaire horizontal fixe de rayon R ; les axes des cylindres sont perpendiculaires (fig. 20.8). Déterminer les conditions de l'équilibre stable du système.

S o l u t i o n. La fonction de forces s'écrit (voir (19.28))

$$U = -mgz_C,$$

où m est la masse du cylindre supérieur et z_C la cote de son centre de gravité C. Puisque $AB = \widehat{AD} = R\varphi$ (fig. 20.8), on a

$$z_C = R \cos \varphi + R\varphi \sin \varphi + r \cos \varphi,$$

où φ est l'unique coordonnée généralisée.

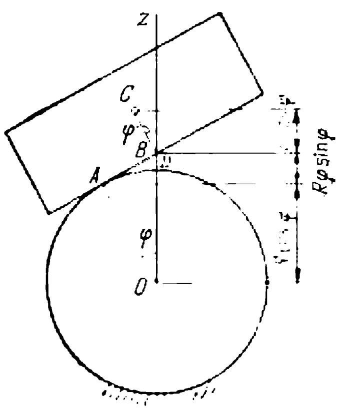


Fig. 20.8

La position d'équilibre se définira par l'unique équation (20.10)

$$\frac{dU}{d\varphi} = -mg\,(R\varphi \cos \varphi - r \sin \varphi) = 0,$$

conformément à laquelle le système est en équilibre pour $\varphi = 0$. Calculons la dérivée seconde de la fonction de forces

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} = -mg\,(R \cos \varphi - R\varphi \sin \varphi - r \cos \varphi)$$

et cherchons sa valeur en position d'équilibre $\varphi = 0$:

$$\left.\frac{d^2U}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = -mg\,(R - r).$$

Quand on a l'inégalité

$$r < R,$$

cette valeur est négative, ce qui veut dire que la fonction de forces admet un maximum dans la position d'équilibre $\varphi = 0$. Il s'ensuit que cette dernière inégalité fournit la condition suffisante d'un équilibre stable.

2.3. Petites oscillations libres d'un système mécanique à un degré de liberté autour de sa position d'équilibre stable. Pour un système conservatif (voir ch. XIX, n° 3.4) à un degré de liberté,

on a

$$T=\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2, \quad U=U(q),$$

où q est l'unique coordonnée généralisée. Développons $a(q)$ et $U(q)$ en série de Maclaurin (voir Piskounov, t. II, ch. XVI, § 16) dans le voisinage de la position d'équilibre $q=0$:

$$a(q)=a(0)+O(q),$$

$$U(q)=U(0)+\left(\frac{dU}{dq}\right)_0 q+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_0 q^2+O(q^3),$$

où $O(q)$ et $O(q^3)$ désignent les termes de degré non inférieur à 1 et à 3 respectivement. Or, nous pouvons admettre dans le deuxième développement que $U(0)=0$ (puisque la fonction de forces se définit à une constante additive près), et que dU/dq s'annule pour $q=0$ en vertu de (20.10). En se bornant aux petits mouvements du système, on suppose que les quantités q et $\dot{q}$ restent si faibles qu'on peut garder seulement les premiers termes des développements en séries entières de l'énergie cinétique et de la fonction de forces. On a alors

$$T=\frac{1}{2}a(0)\dot{q}^2, \quad U=-\frac{1}{2}cq^2 \quad \left(c=-\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_{q=0}\right).$$

Supposons que $c>0$, ce qui revient à dire que la fonction de forces admet un maximum dans la position d'équilibre; autrement dit, en vertu du théorème du nº 2.2, l'équilibre est stable. L'unique équation de Lagrange (18.11a) devient alors

$$a(0)\ddot{q}=-cq$$

ou

$$\ddot{q}+\omega^2q=0 \quad \left(\omega=\sqrt{\frac{c}{a(0)}}\right). \tag{20.13}$$

Nous aboutissons à l'équation des oscillations harmoniques (14.3) que nous avons discutée en détail dans le paragraphe 1 du chapitre XIV. Il convient de noter cependant que l'équation (20.13) peut définir aussi le mouvement d'un système mécanique très complexe autour de sa position d'équilibre stable, à condition que le nombre de ses degrés de liberté soit égal à 1. En se proposant de prendre en considération l'amortissement ou l'action des forces perturbatrices ne dérivant pas d'un potentiel, on se serait trouvé dans les situations décrites dans le chapitre XIV, §§ 2 et 3. Nous l'expliquerons à l'aide d'un exemple.

Exemple 20.6. Le vibrographe utilisé pour enregistrer les oscillations horizontales (vibrations) des fondations des machines représente une barre de longueur l fixée sur un axe fixe Oz (fig. 20.9). La barre porte une masselotte de masse m et un ressort spiral dont la raideur à la torsion est γ. Cette dernière quantité signifie qu'une torsion d'un angle φ fait naître dans le ressort un moment de rappel égal à $-\gamma\varphi$. Quand la barre est verticale, le ressort est non tendu. On demande de trouver la période des oscillations libres du vibrographe.

Solution. Donnons un écart à la barre et adoptons l'angle d'écart φ comme coordonnée généralisée. La fonction de forces U admet deux composantes: une composante $U_1 = mgl(\cos\varphi - 1)$ (voir l'exemple 15.5) due au poids et une composante $U_2 = -\frac{1}{2}\gamma\varphi^2$ due à la force élastique du ressort auquel on a donné un angle de torsion φ, en sorte que

$$U = mgl(\cos\varphi - 1) - \frac{1}{2}\gamma\varphi^2. \qquad (1)$$

L'énergie cinétique est égale à

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2.$$

L'équation de Lagrange (18.11a) s'écrit sous la forme

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi - \gamma\varphi.$$

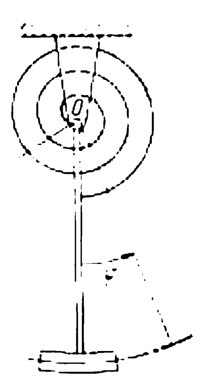


Fig. 20.9

Cette équation ne se laisse pas intégrer à l'aide de fonctions élémentaires. Se bornant à considérer des oscillations petites et posant $\sin\varphi \approx \varphi$, on obtient après division par ml^2

$$\ddot{\varphi} + \frac{\gamma + mgl}{ml^2}\varphi = 0. \qquad (2)$$

En développant (1) suivant les puissances de φ,

$$U = -\frac{1}{2}(\gamma + mgl)\varphi^2 + O(\varphi^3),$$

et en se rappelant qu'on a en l'occurrence

$$a(0) = ml^2, \qquad c = \gamma + mgl,$$

on déduit l'équation (2) directement à partir de (20.13). La pulsation ω est égale à

$$\omega = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{\gamma + mgl}{m}}$$

et la période des oscillations libres se définit par la formule (14.5):

$$T = 2\pi l\sqrt{\frac{m}{\gamma + mgl}}.$$

Pour prendre en considération l'amortissement proportionnel à la vitesse angulaire du vibrographe, on devrait ajouter à l'équation de Lagrange (18.11a)

la force généralisée $\tilde{Q} = -\alpha\dot{\varphi}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \tilde{Q}.$$

Cela nous ferait retrouver l'équation

$$ml^2\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + (\gamma + mgl)\,\varphi = 0$$

déjà discutée dans le chapitre XIV, § 2.

Exercices

Exercice 20.1. Un solide de poids G est posé sur un plan horizontal qui présente un coefficient de frottement f (fig. 20.10). Une corde horizontale st attachée au solide, passée autour d'une poulie A et dotée d'un fardeau de

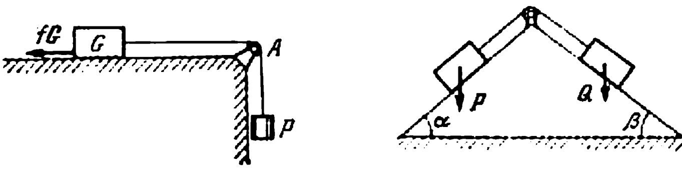


Fig. 20.10 Fig. 20.11

poids P $(P > fG)$. Déterminer l'accélération w du solide et la tension T du fil.

Réponse. $w = \frac{P - fG}{P + G} g$, $T = \frac{(1+f)PG}{P+G}$.

Exercice 20.2. Deux solides de poids P et Q, reliés par un fil inextensible, peuvent glisser sans frottement sur deux plans inclinés qui font des angles α et β avec l'horizontale (fig. 20.11). Quelle est la condition pour que le mouvement se produise vers le mobile P ? quelle sera alors l'accélération w?

Réponse. $P > \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} Q$, $w = \frac{P\sin\alpha - Q\sin\beta}{P+Q} g$.

CHAPITRE XXI

ÉLÉMENTS DE DYNAMIQUE DU SOLIDE

§ 1. Moments d'inertie du solide

1.1. Définitions. La notion de moment d'inertie du solide par rapport à un axe invariablement lié au solide joue un rôle capital en dynamique du solide. Elle constitue une caractéristique de la disposition des éléments de masse du corps par rapport à un axe, caractéristique fort importante pour la dynamique.

Le *moment d'inertie du point matériel par rapport à l'axe Oz* est le produit de la masse m du point par le carré de sa distance h à cet axe:

$$J_{Oz} = mh^2.$$

Le *moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz* est la somme des produits des éléments de masse Δm du solide par le carré de leurs distances h à cet axe (fig. 21.1):

$$J_{Oz} = \sum \Delta m \cdot h^2, \qquad (21.1)$$

la sommation étant étendue à tout le volume du solide.

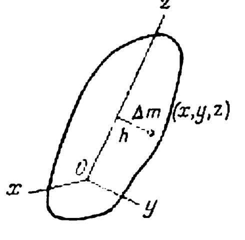


Fig. 21.1

Remarque. Soit $\beta = \gamma/g$ la densité du solide; alors $\Delta m = \beta \Delta V$, où ΔV est le volume d'un élément de masse. Le carré de la distance à l'axe Oz est égal à $h^2 = x^2 + y^2$, si bien que la formule (21.1) prend la forme

$$J_{Oz} = \sum (x^2 + y^2)\, \Delta m = \sum \beta\, (x^2 + y^2)\, \Delta V. \qquad (21.1a)$$

Dans le cas où les masses sont réparties uniformément, le moment d'inertie est la limite de la somme (21.1) ou (21.1a) quand le volume ΔV de chaque élément du solide tend vers zéro:

$$J_{Oz} = \lim_{\max \Delta V \to 0} \sum \beta h^2 \Delta V = \int_D \beta h^2\, dV, \qquad (21.2)$$

où D est le domaine d'intégration (le volume du solide). Ecrite en coordonnées cartésiennes rectangulaires, cette dernière formule

devient

$$J_{Oz} = \iiint_D \beta\,(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz. \qquad (21.2a)$$

La dimension du moment d'inertie est la masse multipliée par le carré de la longueur; son unité SI est le kilogramme-mètre carré (kg·m²). La dimension du rapport J_{Oz}/M, où M est la masse du solide, est le carré de la longueur. Désignons ce rapport par ρ^2, en sorte que

$$\rho = \sqrt{\frac{J_{Oz}}{M}} \quad (J_{Oz} = M\rho^2). \qquad (21.3)$$

La quantité ρ définie par (21.3) s'appelle *rayon de giration du solide par rapport à l'axe Oz.*

Autrement dit, le rayon de giration ρ du solide par rapport à l'axe Oz est la distance par rapport à cet axe à laquelle peut être concentrée toute la masse du solide sans que son moment d'inertie s'en trouve changé. Grâce au rayon de giration, on peut assimiler le moment d'inertie du solide à celui d'un point doué d'une masse égale à celle du solide et placé à la distance ρ de l'axe Oz (deuxième formule (21.3)).

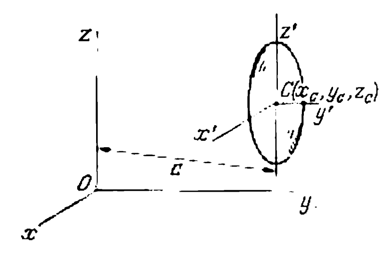


Fig. 21.2

Par rapport aux axes disposés de façons différentes relativement au solide donné, ses moments d'inertie seront en général différents. Dans le cas particulier où les axes sont parallèles, les moments d'inertie du solide par rapport à ces axes vérifient une relation établie par le théorème de Steiner.

1.2. Théorème des moments d'inertie du solide par rapport à des axes parallèles (Steiner). *Le moment d'inertie du solide par rapport à un axe Oz est égal à son moment d'inertie par rapport à un axe Cz' parallèle à Oz et passant par le centre de masse C du solide, augmenté du produit de sa masse M par le carré de la distance d entre les axes* (fig. 21.2):

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + Md^2. \qquad (21.4)$$

D é m o n s t r a t i o n. Traçons les axes Ox, Oy d'un repère cartésien rectangulaire $Oxyz$ et, parallèlement à eux, les axes Cx', Cy' d'un autre repère cartésien rectangulaire $Cx'y'z'$. Soient comme d'ordinaire x_C, y_C, z_C les coordonnées du centre de masse C dans le système $Oxyz$, avec par définition

$$d^2 = x_C^2 + y_C^2.$$

On a pour un point quelconque du solide

$$x = x' + x_C, \qquad y = y' + y_C.$$

Il vient donc en vertu de la formule (21.1a)

$$J_{Oz} = \sum(x^2 + y^2)\,\Delta m = \sum[(x' + x_C)^2 + (y' + y_C)^2]\,\Delta m =$$
$$= \sum(x'^2 + y'^2)\,\Delta m + (x_C^2 + y_C^2)\sum\Delta m + 2x_C\sum x'\,\Delta m + 2y_C\sum y'\Delta m.$$

Les deux dernières sommes sont égales à zéro. On a en effet d'après les formules (19.2)

$$\sum x'\Delta m = Mx'_C = 0, \qquad \sum y'\Delta m = My'_C = 0,$$

parce que les coordonnées du centre de masse C du solide dans le système $Cx'y'z'$ sont égales à zéro. Puisque

$$\sum (x'^2 + y'^2)\,\Delta m = J_{Cz'}, \qquad \sum\Delta m = M, \qquad x_C^2 + y_C^2 = d^2,$$

on aboutit à l'égalité (21.4). Le théorème est démontré.

Il ressort de la formule (21.4) que le moment d'inertie du solide par rapport à un axe passant par son centre de masse est le plus petit de tous ses moments d'inertie par rapport aux axes parallèles.

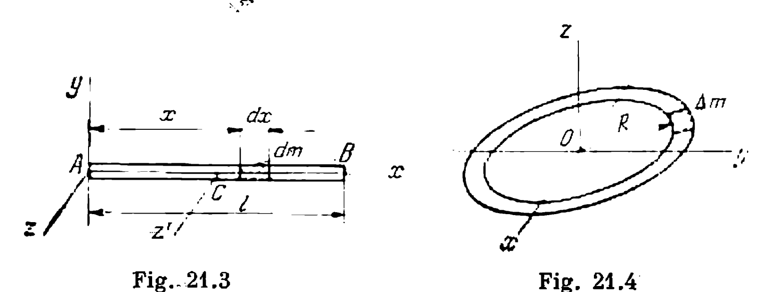


Fig. 21.3 Fig. 21.4

1.3. Moments d'inertie de quelques solides simples. Proposons-nous de calculer les moments d'inertie de quelques solides homogènes de forme élémentaire.

1° *Moment d'inertie d'une barre* mince homogène de section constante *par rapport à un axe Az* perpendiculaire à la barre et *passant par son extrémité A* (fig. 21.3).

Soient l la longueur de la barre, M sa masse, $\varkappa = M/l$ la masse d'une unité de longueur (densité linéique). On a alors pour un élément de longueur dx de la barre $dm = \varkappa\, dx$ et

$$J_{Az} = \int_0^l x^2\varkappa\, dx = \varkappa\frac{l^3}{3} = \varkappa l\,\frac{l^2}{3} = \frac{1}{3}Ml^2. \qquad (21.5)$$

2° *Moment d'inertie de la même barre par rapport à un axe Cz' perpendiculaire à la barre et passant par son centre* (fig. 21.3). Posons

$d = l/2$ et appliquons le théorème de Steiner (formule 21.4):

$$\frac{1}{3}Ml^2 = J_{Cz'} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

Il en découle

$$J_{Cz'} = \frac{1}{3}Ml^2 - \frac{1}{4}Ml^2 = \frac{1}{12}Ml^2. \qquad (21.6)$$

3° *Moment d'inertie d'un tube* mince homogène de masse M et de rayon R *par rapport à son axe de symétrie* Oz (fig. 21.4).

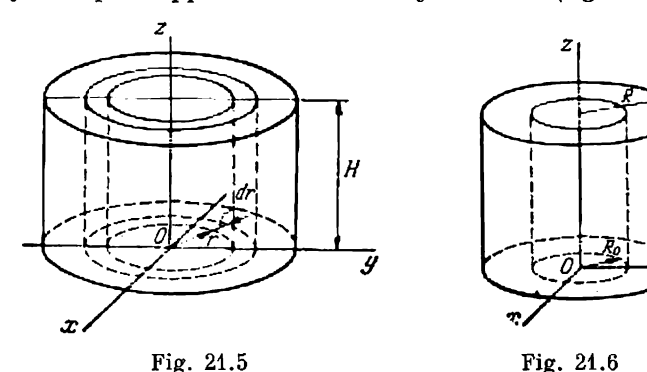


Fig. 21.5 Fig. 21.6

La figure 21.4 montre une section du tube. Pour tout élément du tube la distance h à l'axe Oz est égale au rayon R, aussi

$$J_{Oz} = \sum \Delta m \cdot h^2 = R^2 \sum \Delta m = MR^2. \qquad (21.7)$$

4° *Moment d'inertie d'un cylindre* circulaire droit plein homogène (ou d'un disque) de masse M et de rayon R *par rapport à son axe de symétrie* (fig. 21.5). Soient H la hauteur et V le volume du cylindre, alors sa densité est égale à

$$\beta = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 H}.$$

Prenons dans ce cylindre un tube élémentaire d'épaisseur dr éloigné d'une distance r de son axe. On a pour ce tube

$$dV = 2\pi r H\, dr$$

et d'après la formule (21.2)

$$J_{Oz} = \int_0^R \beta r^2 2\pi r H\, dr = 2\pi\beta H \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}\pi R^2 H \beta R^2,$$

ou

$$J_{Oz} = \frac{1}{2}MR^2. \qquad (21.8)$$

Le rayon de giration du cylindre se définit par la formule (21.3):

$$\rho = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} MR^2}{M}} = \frac{\sqrt{2}}{2} R = 0{,}707R. \qquad (21.9)$$

En comparant cette expression avec la formule (21.7), nous remarquons que le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe de symétrie est égal au moment d'inertie que présente par rapport au même axe un tube mince qui, pour une masse identique, possède un rayon $\sqrt{2}/2$ fois inférieur à celui du cylindre.

5° *Moment d'inertie d'un cylindre* homogène *creux par rapport à son axe de symétrie Oz* (fig. 21.6). On a par analogie au cas 4° ci-dessus

$$J_{Oz} = \int_{R_0}^{R} \beta r^2 2\pi r H \, dr = \pi\beta H \frac{R^4 - R_0^4}{2} = \frac{1}{2} \pi\beta H (R^2 - R_0^2)(R^2 + R_0^2).$$

Il vient définitivement

$$J_{Oz} = \frac{1}{2} M (R^2 + R_0^2),$$

où $M = \pi (R^2 - R_0^2) H\beta$ est la masse du cylindre creux, R son rayon extérieur et R_0 son rayon intérieur.

Citons sans déduction les formules du moment d'inertie d'une sphère pleine homogène par rapport à son diamètre

$$J_{Ox} = J_{Oy} = J_{Oz} = \frac{2}{5} MR^2 \qquad (21.11)$$

et d'un cône circulaire droit homogène (non tronqué) par rapport à son axe de symétrie Oz:

$$J_{Oz} = \frac{3}{10} MR^2 \qquad (21.12)$$

dans lesquelles comme précédemment M est la masse du solide et R le rayon de la sphère ou de la base du cône. Remarquons que dans les formules (21.7), (21.8), (21.10) et (21.12) la hauteur du solide n'intervient pas explicitement (c'est la masse du corps M qui est fonction de la hauteur).

§ 2. Rotation du solide autour d'un axe fixe

Nous passons directement à la dynamique du solide. Dans le chapitre VIII, nous avons indiqué deux catégories élémentaires de mouvement du solide: le mouvement de translation et le mouvement de rotation. En cinématique, l'étude du mouvement de translation du solide se réduit au mouvement de son point quelconque, en particulier de son centre de masse. En dynamique, l'étude du mouvement de translation du solide se réduit au problème correspondant

de dynamique du point, conformément au théorème du mouvement du centre de masse (ch. XIX, n° 1.3, formules (19.9) et (19.13)). Il ne reste donc à étudier, à proprement parler, que la seconde catégorie élémentaire du mouvement, à savoir : la rotation autour d'un axe fixe.

2.1. Moment cinétique et énergie cinétique du solide en rotation. Soit un solide parfait animé de rotation avec une vitesse angulaire (variable en général) ω autour d'un axe fixe Oz sous l'action des forces actives extérieures connues $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_m$ (fig. 21.7). Calculons deux quantités qui caractérisent la rotation du solide : son moment cinétique K_{Oz} par rapport à l'axe Oz et son énergie cinétique T.

Soit un élément matériel du solide, de masse Δm, placé à une distance h de l'axe Oz. On a

$$v = h\omega.$$

Le bras de levier du vecteur $\Delta m \cdot v$ par rapport au point O' étant égal à h, on obtient d'après la formule (19.16)

$$K_{Oz} = \sum \text{mom}_{Oz} (\Delta m \cdot v) = \sum \Delta m \cdot h\omega h = \omega \sum \Delta m \cdot h^2,$$

ou

$$K_{Oz} = J_{Oz}\omega. \tag{21.13}$$

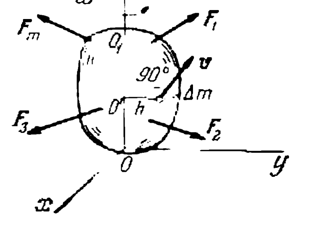


Fig. 21.7

Le moment cinétique K_{Oz} (moment résultant des quantités de mouvement) du solide par rapport à son axe de rotation Oz est égal au produit de son moment d'inertie J_{Oz} par rapport à cet axe par la valeur algébrique de la vitesse angulaire ω du solide.

L'énergie cinétique T du solide en rotation se définit par la formule (19.24) :

$$T = \frac{1}{2} \sum \Delta m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \sum \Delta m \, (\omega h)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum \Delta m \cdot h^2.$$

On a donc

$$T = \frac{1}{2} J_{Oz}\omega^2. \tag{21.14}$$

L'énergie cinétique du solide mobile en rotation autour d'un axe fixe est égale au demi-produit du son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation par le carré de sa vitesse angulaire.

Remarque. Les formules (21.13) et (21.14) restent valables quand le solide mobile n'admet qu'un point fixe (ch. IX, § 2). Dans ce cas, au lieu de l'axe de rotation fixe, on parle d'un axe instantané de rotation passant par le point fixe O (le vecteur vitesse angulaire instantanée $\boldsymbol{\omega}$ est dirigé suivant cet axe, voir ch. IX, n° 2.1).

2.2. Equation différentielle de la rotation du solide autour d'un axe fixe. Les liaisons imposées à un tel solide sont ses deux points fixes O et O_1; elles peuvent être matérialisées par exemple par une crapaudine en O et un palier en O_1 (fig. 21.7). Puisque, pour tout déplacement virtuel, le système n'admet qu'une rotation autour de l'axe fixe Oz, on peut appliquer le théorème du moment cinétique du système par rapport à un axe fixe (en termes de coordonnées, voir formule (19.19)):

$$\frac{dK_{Oz}}{dt} = M_{Oz}^{(e)}.$$

En y portant $K_{Oz} = J_{Oz}\omega$ (voir (21.13)), on obtient

$$J_{Oz}\frac{d\omega}{dt} = M_{Oz}^{(e)}. \qquad (21.15)$$

Puisque la vitesse angulaire du solide est $\omega = d\varphi/dt$, l'accélération angulaire ε peut s'écrire sous la forme

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

où φ est l'angle de rotation (d'écart) du solide. Le moment résultant des forces actives extérieures connues par rapport à l'axe de rotation est

$$M_{Oz}^{(e)} = \mathrm{mom}_{Oz}\boldsymbol{F}_1 + \mathrm{mom}_{Oz}\boldsymbol{F}_2 + \ldots + \mathrm{mom}_{Oz}\boldsymbol{F}_m,$$

aussi l'*équation différentielle du mouvement de rotation du solide* (21.15) peut-elle s'écrire aussi sous la forme

$$J_{Oz}\varepsilon = M_{Oz}^{(e)}, \qquad (21.15a)$$

$$J_{Oz}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum \mathrm{mom}_{Oz}\boldsymbol{F}. \qquad (21.15b)$$

Remarquons que les réactions de liaison n'interviennent pas dans l'équation (21.15). Les moments de ces réactions par rapport à l'axe Oz sont d'ailleurs nuls, car les réactions sont appliquées aux points O et O_1. Pour déterminer les réactions, il convient de supprimer les liaisons; nous y reviendrons dans le paragraphe 2 du chapitre XXII.

Si le moment résultant $M_{Oz}^{(e)}$ des forces actives extérieures connues par rapport à l'axe de rotation est nul, le moment cinétique K_{Oz} du solide par rapport à cet axe conserve une valeur constante (voir (19.21)). En effet, il ressort de l'équation (21.15) qu'on a pour $M_{Oz}^{(e)} \equiv 0$

$$J_{Oz}\omega(t) = J_{Oz}\omega(0), \quad \text{ou} \quad \omega(t) = \omega(0) = \text{const.}$$

Ce cas de rotation du solide s'appelle *rotation par inertie.* Par exemple, quand l'arbre d'une machine tourne uniformément, les moments des forces motrices et des forces résistantes sont de même module mais de sens contraires.

2.3. Pendule composé. On appelle *pendule composé* un solide de forme quelconque qui peut tourner par gravité autour d'un axe horizontal fixe O qui ne passe pas par son centre de gravité (fig. 21.8).

Supposons que le pendule composé a quitté son état d'équilibre en lequel le segment $OC = a$ est vertical. Proposons-nous de déterminer le mouvement du pendule, sans tenir compte du frottement dans l'axe de suspension ni de la résistance de l'air.

Conformément au théorème de Varignon (ch. III, n° 1.4, formule (3.5)), la somme des moments des forces actives extérieures connues est égale au moment du poids $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ du pendule, appliqué en son centre de gravité C. Le bras de levier de la force $\boldsymbol{P}$ par rapport au point O est égal à $a \sin \varphi$. Comme sens positif, nous adoptons comme d'ordinaire la rotation dans le sens antihoraire. Dans la position représentée sur la figure 21.8 le moment de $\boldsymbol{P}$ par rapport à O est négatif, si bien qu'on a

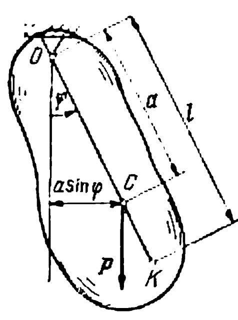


Fig. 21.8

$$M_{Oz}^{(e)} = -Pa \sin \varphi.$$

L'équation différentielle du mouvement de rotation (21.15b) s'écrira pour le pendule composé sous la forme

$$J_{Oz} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Pa \sin \varphi, \qquad (21.16)$$

où J_{Oz} est le moment d'inertie du pendule composé par rapport à l'axe de rotation. Pour de faibles écarts on a $\sin \varphi \approx \varphi$, si bien que l'équation différentielle des petites oscillations du pendule composé devient après division par J_{Oz}

$$\ddot{\varphi} + \tilde{k}^2\varphi = 0 \quad \left(\tilde{k}^2 = \frac{Pa}{J_{Oz}}\right). \qquad (21.17)$$

En la comparant avec l'équation différentielle des petites oscillations du pendule simple (16.18)

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0 \quad \left(k^2 = \frac{g}{l}\right),$$

nous remarquons que ces deux équations des oscillations harmoniques (ch. XIV, n° 1.1) ne diffèrent que par le coefficient de φ. Autrement dit, il existe un pendule simple de longueur l qui présente la même période d'oscillation que le pendule composé en question : on l'appelle *pendule simple synchrone*. Pour déterminer l, égalons $\tilde{k}^2$ et k^2:

$$\frac{Mga}{J_{Oz}} = \frac{g}{l},$$

d'où

$$l = \frac{J_{Oz}}{Ma}. \qquad (21.18)$$

La quantité $l = OK$ est appelée *longueur du pendule simple synchrone*, ou *longueur réduite du pendule composé*. La *période d'oscillation* T du pendule composé se laisse exprimer d'après la formule (14.5),

$$T = \frac{2\pi}{\tilde{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{Oz}}{Mga}}, \qquad (21.19)$$

ou bien en fonction de la longueur réduite,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

L'*équation des oscillations* se définit à l'aide de la formule (16.19) à condition d'y remplacer k^2 par Pa/J_{Oz} et de déterminer les quantités α et β à partir des conditions initiales au moyen des formules (14.8). Dans le cas particulier où

$$\varphi(0) = \varphi_0, \qquad \dot{\varphi}(0) = 0,$$

les oscillations du pendule composé se définissent par l'équation

$$\varphi = \varphi_0 \cos \sqrt{\frac{Mga}{J_{Oz}}}\, t. \qquad (21.20)$$

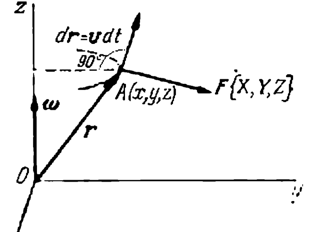


Fig. 21.9

2.4. Travail et puissance d'un système de forces appliquées au solide mobile en rotation autour d'un axe fixe. Traçons deux axes fixes Ox, Oy perpendiculaires à l'axe de rotation Oz (fig. 21.9). Soit A (x, y, z) le point d'application d'une force $\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$. Le déplacement réel $d\boldsymbol{r}$ du point A est égal à

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\, dt,$$

le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ de A étant défini par la formule (8.17):

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}].$$

On a donc

$$d\boldsymbol{r} = [\boldsymbol{\omega}\, dt, \boldsymbol{r}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & d\varphi \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\, d\varphi \boldsymbol{i} + x\, d\varphi \boldsymbol{j}.$$

Le travail élémentaire dA de la force $\boldsymbol{F}$ pour la rotation du solide autour de l'axe Oz de l'angle $d\varphi$ se définit par la formule (15.14):

$$dA = (\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r}) = (X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k})\,(-y\, d\varphi \boldsymbol{i} + x\, d\varphi \boldsymbol{j}) = (-Xy - Yx)\, d\varphi.$$

Or, l'expression entre parenthèses dans le dernier membre est égale à $\mathrm{mom}_{Oz}\boldsymbol{F}$ (voir (5.8)), si bien qu'on a

$$dA = \mathrm{mom}_{Oz}\boldsymbol{F}\cdot d\varphi.$$

Pour un système des forces $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_m$ appliquées au solide (fig. 21.7), le travail élémentaire pour la rotation du solide autour de l'axe fixe Oz d'un angle $d\varphi$ est égal à

$$dA^{(e)} = \sum_{\mu=1}^{m} \mathrm{mom}_{Oz}\boldsymbol{F}_\mu\cdot d\varphi = M_{Oz}^{(e)}\,d\varphi. \qquad (21.21)$$

Divisant par dt, on obtient la *formule de la puissance*:

$$N = \frac{dA^{(e)}}{dt} = M_{Oz}^{(e)}\frac{d\varphi}{dt} = M_{Oz}^{(e)}\omega. \qquad (21.22)$$

La puissance d'un système de forces pendant la rotation du solide autour de l'axe fixe Oz est égale au produit du moment résultant par rapport à Oz des forces extérieures par la vitesse angulaire (les deux facteurs étant pris en valeur algébrique, c'est-à-dire en tenant compte du signe). Le *travail* du système de forces appliquées au solide pendant sa rotation d'un angle $\varphi - \varphi_0$ se définit, à partir de (21.21), par la formule

$$A^{(e)} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{Oz}^{(e)}\,d\varphi. \qquad (21.23)$$

Dans le cas particulier où $M_{Oz}^{(e)}$ est une constante, on a

$$A^{(e)} = M_{Oz}^{(e)}(\varphi - \varphi_0). \qquad (21.24)$$

Autrement dit, quand le moment résultant des forces extérieures par rapport à l'axe de rotation est constant, le travail est égal au produit de ce moment par l'angle de rotation.

2.5. Théorème de la variation de l'énergie cinétique pendant la rotation. Puisque les liaisons sont stationnaires (l'axe Oz est fixe!) et que, par conséquent, les déplacements réels se trouvent parmi les déplacements virtuels, le théorème de la variation de l'énergie cinétique (ch. XIX, nº 3.2) a lieu. D'après la formule (19.27a)

$$T - T_0 = A^{(e)}.$$

Nous établirons maintenant, en utilisant les formules (21.14) et (21.23), la formule de l'accroissement de l'énergie cinétique pendant la rotation du solide d'un angle $\varphi - \varphi_0$ autour d'un axe fixe:

$$\frac{1}{2}J_{Oz}(\omega^2 - \omega_0^2) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{Oz}^{(e)}\,d\varphi. \qquad (21.25)$$

Dans le cas particulier où le moment résultant par rapport à l'axe Oz des forces extérieures est constant, le module de la vitesse angulaire du solide en fin de la rotation s'écrira comme suit :

$$|\omega| = \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{M_{Oz}^{(e)}}{J_{Oz}}(\varphi - \varphi_0)}.$$

Exemple 21.1. Une force radiale N applique le sabot de frein A sur le disque homogène de poids P et de rayon R animé de rotation avec une vitesse angulaire initiale ω_0 autour de l'axe vertical Oz. L'effet du frottement provoque l'arrêt de la roue au bout de t_1 secondes. On demande de savoir le coefficient de frottement f (fig. 21.10).

Solution. La force radiale N ne fournissant aucun moment par rapport à l'axe Oz, le moment résultant par rapport à l'axe Oz des forces extérieures est égal au moment de la force de frottement,

$$M_{Oz}^{(e)} = -fNR. \qquad (1)$$

Fig. 21.10

Puisque le moment résultant $M_{Oz}^{(e)}$ est constant, il ressort de l'équation (21.15a) que l'accélération angulaire ε est constante elle aussi, c'est-à-dire que la rotation est uniformément retardée. On a alors conformément à la formule (8.8)

$$\omega(t_1) = 0 = \omega_0 + \varepsilon t_1, \quad \text{donc} \quad \varepsilon = -\frac{\omega_0}{t_1}.$$

Portant cette expression dans (21.15a), on obtient

$$-J_{Oz}\frac{\omega_0}{t_1} = -fNR \qquad (2)$$

et appliquant la formule (21.8), on trouve

$$f = \frac{J_{Oz}\omega_0}{NRt_1} = \frac{PR\omega_0}{2gNt_1}.$$

Remarque. On peut aussi déduire l'équation (2) sans faire intervenir la formule cinématique (8.8). En effet, multiplions l'identité (21.15) par dt et faisons l'intégration sur t entre 0 et t_1 et sur ω entre $\omega_0 = \omega(0)$ et $\omega_1 = \omega(t_1)$; il vient

$$J_{Oz}\omega_1 - J_{Oz}\omega_0 = \int_0^{t_1} M_{Oz}^{(e)}\,dt. \qquad (3)$$

Dans notre exemple $\omega_1 = 0$, tandis que $M_{Oz}^{(e)}$ se définit par (1). On a donc de l'équation (3)

$$-J_{Oz}\omega_0 = -fNRt_1,$$

c'est-à-dire qu'on aboutit aussitôt à (2).

D'une façon générale, le théorème de la variation du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation et l'équation différentielle de la rotation du solide (21.15) qui se déduit de ce théorème conduisent à une intégrale première, à condition que $M_{Oz}^{(e)}$ ne dépende que du temps qui intervient explicitement ou soit constant, comme dans le cas particulier que l'on vient d'examiner.

Exemple 21.2. Une barre mince homogène de longueur l et de poids P tourne autour d'un axe horizontal qui passe par son extrémité A. Placée initiale-

ment en position horizontale, la barre est abandonnée sans vitesse initiale. Déterminer la vitesse de l'extrémité de la barre au moment où celle-ci vient en position verticale (fig. 21.11).

S o l u t i o n. En analysant le mouvement de rotation, on peut appliquer les théorèmes de la variation du moment cinétique et de l'énergie cinétique. L'application du premier ne fournit aucune intégrale première (voir la remarque à l'exemple précédent), c'est pourquoi nous appliquerons le second. Puisque $T_0 = 0$, on a

$$T = A^{(e)}.$$

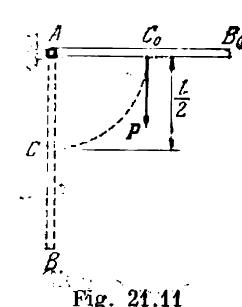


Fig. 21.11

Pour le calcul du travail du poids P, la formule (15.26) s'avère plus commode que (21.25). On a en vertu de (15.26)

$$A^{(e)} = P\frac{l}{2},$$

donc

$$J_{Az}\frac{\omega^2}{2} = P\frac{l}{2}.$$

Nous pouvons donc trouver à l'aide de (21.5)

$$|\omega| = \sqrt{\frac{Pl}{J_{Az}}} = \sqrt{\frac{Pl}{\frac{1}{3}\frac{P}{g}l^2}} = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

Le module du vecteur vitesse du point B sera alors

$$v = l\,|\omega| = \sqrt{3gl}.$$

§ 3. Mouvement plan du solide

3.1. Equations différentielles du mouvement plan. En cinématique, on appelle mouvement plan (ou parallèle à un plan fixe) un mouvement dans lequel tous les points du solide se déplacent en

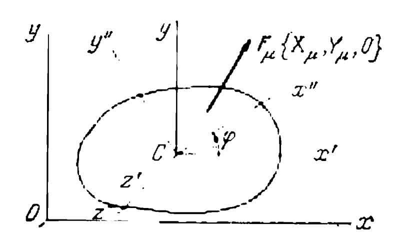


Fig. 21.12

restant dans des plans parallèles à un même plan fixe (ch. X, nº 1.1). Soit Oxy un plan qui passe par le centre de masse C du solide et qui est parallèle à un plan fixe (fig. 21.12). L'analyse du mouvement plan du solide est ainsi réduit à l'analyse du mouvement d'une

figure plane dans son plan Oxy. Supposons que les axes Cx' et Cy' restent parallèles aux axes Ox et Oy pendant toute la durée du mouvement (axes de König, voir ch. XIX, nº 4.1) et que les axes Cx'' et Cy'' soient invariablement associés à la figure plane. Les axes Cx'' et Cx' forment entre eux un angle variable φ. La dérivée $d\varphi/dt$ est égale à ω, valeur algébrique de la vitesse angulaire de la figure plane (ch. X, nº 1.1).

Supposons que le solide effectue un mouvement parallèle au plan Oxy sous l'action des forces extérieures $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_m$ (ce peuvent être tant des forces actives que des réactions de liaison). Le moment cinétique $K'_{Cz'}$ du solide par rapport à l'axe de König Cz' est égal, en vertu des formules (19.32) et (21.13), à

$$K'_{Cz'} = J_{Cz'}\omega, \tag{21.26}$$

où $J_{Cz'}$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Cz' qui passe par son centre de masse. Les conditions du théorème de Resal sur la variation du moment cinétique du système en mouvement relatif (ch. XIX, nº 4.2) sont vérifiées, si bien qu'on a les équations (19.36) et (19.35):

$$M\frac{d^2x_C}{dt^2} = \sum_{\mu=1}^{m} X_\mu, \quad M\frac{d^2y_C}{dt^2} = \sum_{\mu=1}^{m} Y_\mu, \tag{21.27}$$

$$J_{Cz'}\frac{d\omega}{dt} = \sum_{\mu=1}^{m} \text{mom}_{Cz'}\,\boldsymbol{F}_\mu, \tag{21.28}$$

où M est la masse du solide. Les équations (21.27), (21.28) sont les *équations différentielles du mouvement plan du solide.* Les équations (21.27) définissent le mouvement du centre de masse, et l'équation (21.28), la rotation du solide autour de l'axe Cz' passant par son centre de masse et perpendiculaire au plan fixe. Le moment résultant des forces actives extérieures $M^{(e)}_{Cz'}$ est envisagé, lui aussi, par rapport à cet axe.

R e m a r q u e. Les équations (21.27) et (21.28) sont fondées sur le théorème de Resal d'après lequel les liaisons admettent les déplacements virtuels déterminés d'un système de points (du solide, dans le cas envisagé ci-dessus).

E x e m p l e 21.3. *Glissement d'un cylindre sur un plan incliné poli.* Un cylindre circulaire droit homogène de rayon R et de masse M se déplace sur un plan poli fixe qui fait un angle α avec l'horizontale. A l'instant initial $t = 0$ l'axe du cylindre en repos est horizontal. Déterminer le mouvement du cylindre (fig. 21.13) et calculer la pression qu'il exerce sur le plan incliné.

S o l u t i o n. Supprimons la liaison imposée au cylindre en la remplaçant par la réaction $\boldsymbol{N}$. Les équations différentielles (21.27) et (21.28) s'écriront sous la forme

$$M\frac{d^2x_C}{dt^2} = Mg\sin\alpha, \quad M\frac{d^2y_C}{dt^2} = -Mg\cos\alpha + N, \quad J_{Cz'}\frac{d\omega}{dt} = 0.$$

En vertu de la liaison imposée on a $y_C = R$ pendant toute la durée du mouvement; il ressort donc de la deuxième équation

$$N = Mg \cos \alpha,$$

d'où l'on obtient la valeur de la pression. Conformément à la troisième équation, on a $\omega = \text{const}$; étant donné qu'on avait à l'instant initial $\omega(0) = 0$, on a $\omega = 0$ pendant toute la durée du mouvement. Cela revient à dire que le cylindre glisse sur le plan incliné poli en conservant la rotation qui lui était communiquée à l'instant initial.

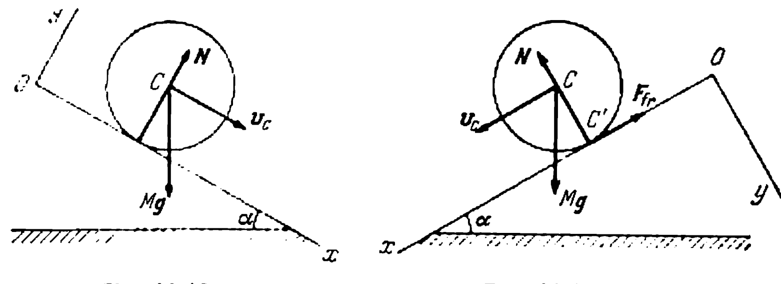


Fig. 21.13 Fig. 21.14

De la première équation il découle que l'accélération du centre de masse en mouvement rectiligne est constante et égale à $g \sin \alpha$. Sous les conditions initiales données on a (voir l'exemple 13.3)

$$v_C = \frac{dx_C}{dt} = gt \sin \alpha,$$

$$x_C = \frac{1}{2} gt^2 \sin \alpha.$$

Exemple 21.4. *Roulement d'un cylindre sur un plan incliné dépoli.* Mêmes conditions que dans l'exemple précédent, mais le plan incliné est dépoli et offre un coefficient de frottement de glissement égal à f (fig. 21.14).

Solution. Supprimons la liaison imposée au cylindre en faisant intervenir à sa place la réaction normale N et la force de frottement F_{fr}. Choisissons les axes de coordonnées de la façon indiquée sur la figure 21.14. Les équations différentielles (21.27), (21.28) s'écriront sous la forme

$$M \frac{dv_x^C}{dt} = Mg \sin \alpha - F_{fr}, \quad M \frac{d^2 y_C}{dt^2} = Mg \cos \alpha - N, \quad \frac{1}{2} MR^2 \frac{d\omega}{dt} = F_{fr} R. \quad (1)$$

Puisque $y_C \equiv -R$, on tire de la deuxième équation la valeur de $N = Mg \cos \alpha$.

a) Supposons d'abord que le cylindre roule sans glisser. Dans ce cas la vitesse du point de contact C' du cylindre avec le plan incliné est égale à zéro. Ce point est le centre instantané des vitesses, et l'on a (voir (10.5))

$$v_x^C = R\omega, \quad (2)$$

où ω est comme précédemment la valeur algébrique de la vitesse angulaire du cylindre. La première et la troisième équations différentielles (1) nous donnent

$$MR \frac{d\omega}{dt} = Mg \sin \alpha - F_{fr}, \quad MR \frac{d\omega}{dt} = 2F_{fr}.$$

Les premiers membres étant égaux, il ressort de l'égalité des seconds membres que

$$F_{\text{fr}} = \frac{1}{3} Mg \sin \alpha. \tag{3}$$

D'après la loi d'Amontons-Coulomb (ch. III, n° 3.1), on a en l'absence du glissement $F_{\text{fr}} \leqslant fN$, d'où

$$\frac{1}{3} Mg \sin \alpha \leqslant fMg \cos \alpha, \quad \text{donc} \quad \operatorname{tg} \alpha \leqslant 3f.$$

Ceci est précisément la condition pour que le cylindre roule sans glisser sur le plan incliné dépoli. En portant (3) dans la première équation (1), nous constatons que l'accélération du centre de gravité pendant le roulement sans glissement est égale à

$$w_x^C = w_C = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

et que par conséquent l'équation horaire du centre de gravité s'écrit sous les conditions initiales nulles

$$x_C = \frac{1}{2} w_C t^2 = \frac{1}{3} g t^2 \sin \alpha.$$

La comparaison avec l'exemple précédent montre que pour les mêmes t et α l'espace parcouru sur le plan dépoli ne fait que 2/3 de l'espace parcouru sur le plan poli.

b) Supposons maintenant que $\operatorname{tg} \alpha > 3f$. Le cylindre roule alors avec un glissement, si bien que l'égalité (2) n'a pas lieu. On a cependant alors

$$F_{\text{fr}} = fN = fMg \cos \alpha.$$

Portons cette expression dans la première et la troisième équation (1). Il vient

$$\frac{d^2 x_C}{dt^2} = a = g (\sin \alpha - f \cos \alpha), \qquad \frac{1}{2} R \frac{d\omega}{dt} = fg \cos \alpha.$$

La première relation exprime l'accélération du centre de masse et définit l'équation horaire du centre de masse du cylindre sous la forme

$$x_C = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t^2.$$

De la deuxième relation nous obtenons l'accélération angulaire du cylindre dans le roulement

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2fg}{R} \cos \alpha$$

et l'équation de la rotation du cylindre autour de son axe (indépendante cette fois-ci du mouvement de son centre de masse)

$$\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 = \frac{fg}{R} t^2 \cos \alpha.$$

3.2. Energie cinétique du solide en mouvement plan. La deuxième formule de König (19.33) et la formule (21.14) nous fournissent l'expression de cette énergie:

$$T = \frac{1}{2} J_{Cz'} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_C^2. \tag{21.29}$$

Exemple 21.5. Calculer l'énergie cinétique d'un cylindre circulaire droit animé d'un roulement sans glissement avec la vitesse v_C (à l'instant considéré); le rayon du cylindre est R et sa masse M (fig. 21.15).

Solution. Les formules (21.29) et (21.8) nous donnent

$$T=\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,MR^2\omega^2+\frac{1}{2}\,Mv_C^2.$$

Le point C' étant le centre instantané des vitesses (ch. X, n° 1.3), on a

$$|\omega|=\frac{v_C}{R}.$$

Substituant cette expression dans l'égalité précédente, on obtient

$$T=\frac{3}{4}\,Mv_C^2. \tag{21.30}$$

On aboutit d'ailleurs au même résultat en considérant le mouvement instantané du cylindre sous forme de rotation autour d'un axe $C'z$ passant par son centre

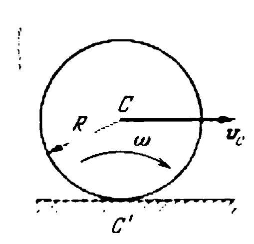


Fig. 21.15

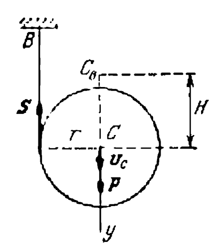


Fig. 21.16

instantané des vitesses. Conformément à la formule (21.14)

$$T=\frac{1}{2}\,J_{C'z}\omega^2.$$

Le moment d'inertie $J_{C'z}$ se calcule d'après le théorème de Steiner (21.4),

$$J_{C'z}=J_{Cz}+MR^2=\frac{1}{2}\,MR^2+MR^2=\frac{3}{2}\,MR^2,$$

et l'on retrouve (21.30):

$$T=\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,MR^2\,\frac{v_C^2}{R^2}=\frac{3}{4}\,Mv_C^2.$$

Exemple 21.6. Un fil dont l'extrémité B est fixe s'enroule sur un cylindre circulaire droit de poids P en son milieu (fig. 21.16). Le cylindre tombe sans vitesse initiale en faisant dérouler le fil. Déterminer la vitesse v_C et l'accélération w_C de l'axe du cylindre, ainsi que la tension du fil au moment où l'axe sera descendu d'une hauteur H.

Solution. La formule (21.30) permet de calculer l'énergie cinétique du cylindre:

$$T=\frac{3}{4}\,\frac{P}{g}\,v_C^2.$$

Puisque la liaison imposée au cylindre est stationnaire (ne dépend pas explicitement du temps), on est en droit d'appliquer le théorème de la variation de l'énergie cinétique en mouvement absolu (voir (19.27a)). L'unique force active extérieure est le poids du cylindre; son travail pendant la descente du centre de masse d'une hauteur $C_0C = H$ est égal à PH, si bien qu'on a

$$T - T_0 = PH, \quad \text{ou} \quad \frac{3}{4}\frac{P}{g}v_C^2 = PH,$$

car $T_0 = 0$. Le carré de la vitesse du centre de masse du cylindre à l'instant t sera donc égal à

$$v_C^2 = \frac{4}{3}gH.$$

Dérivant cette identité par rapport à t, on trouve

$$2v_C\frac{dv_C}{dt} = \frac{4}{3}g\frac{dH}{dt}.$$

Remarquant que $v_C = dH/dt$, on en déduit l'accélération constante du centre de masse du cylindre, égale à

$$w_C = \frac{dv_C}{dt} = \frac{2}{3}g.$$

Pour calculer la tension S du fil, nous procéderons comme d'ordinaire, c'est-à-dire supprimerons la liaison. Coupant le fil et ajoutant $\boldsymbol{S}$ à la force active extérieure $\boldsymbol{P}$, on peut admettre que le cylindre est libre. S'il en est ainsi, on trouve parmi ses déplacements virtuels un mouvement de translation le long de l'axe des y. Appliquons le théorème du mouvement du centre de masse (voir (19.9))

$$\frac{P}{g}\frac{dv_C}{dt} = P - S.$$

D'où

$$S = P - \frac{P}{g}\cdot\frac{2}{3}g = \frac{1}{3}P,$$

ce qui signifie que la tension du fil reste constante pendant toute la durée du mouvement.

§ 4. Théorie élémentaire du gyroscope

4.1. Précession du gyroscope. On appelle *gyroscope symétrique* (ou toupie) un solide symétrique homogène animé de rotation rapide autour d'un point situé sur son axe de symétrie. Considérons le mouvement du gyroscope autour du point fixe O situé sur son axe de symétrie (fig. 21.17). Soient $\boldsymbol{\omega}_1$ le vecteur vitesse angulaire du gyroscope dans sa propre rotation autour de l'axe de symétrie, et $\boldsymbol{\Omega}$ le vecteur vitesse angulaire instantanée de sa rotation autour d'un axe instantané passant par le point fixe O (voir l'exemple 12.1). Le vecteur

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}_1$$

définit alors la vitesse angulaire de la *précession*, c'est-à-dire de la rotation de l'axe du gyroscope autour de la verticale. La vitesse

angulaire de la précession ω_2 est faible devant la vitesse angulaire de la rotation propre ω_1, aussi le vecteur vitesse angulaire résultante

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2$$

est-il peu différent en module et en direction du vecteur ω_1. En déterminant le vecteur moment cinétique K_O du gyroscope par rapport au point O, on peut admettre approximativement $\Omega \approx \omega_1$ et poser

$$K_O \approx J\omega_1, \tag{21.31}$$

où J est le moment d'inertie du gyroscope par rapport à son axe de symétrie. La quantité $J\omega_1$ s'appelle *moment propre du gyroscope.*

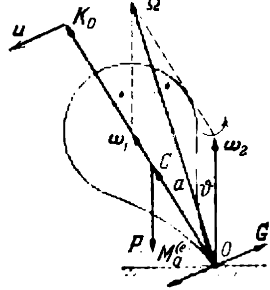


Fig. 21.17

4.2. Moment gyroscopique. Règle de Foucault. Puisque les liaisons imposées au gyroscope (point d'appui fixe O) permettent sa rotation autour de n'importe quel axe passant par le point fixe O, on a en vertu de la formule (19.22)

$$\frac{dK_O}{dt} = M_O^{(e)} = [a,\ P], \tag{21.32}$$

où a est le rayon vecteur du centre de gravité C du gyroscope, et P son poids. Le mouvement de l'axe du gyroscope se laisse définir par le mouvement de son point qui, dans l'hypothèse simplificatrice consentie, se confond avec l'extrémité du vecteur K_O. Puisque l'axe du gyroscope précessionne autour de la verticale avec la vitesse angulaire ω_2, la vitesse u de l'extrémité du vecteur K_O sera égale, en vertu de la formule (9.13), à

$$u = \frac{dK_O}{dt} = [\omega_2,\ K_O] \approx [\omega_2,\ J\omega_1]. \tag{21.33}$$

Portons cette valeur dans (21.32): il vient

$$[\omega_2,\ J\omega_1] = [a,\ P].$$

La dernière égalité approchée s'écrira sous la forme

$$[J\omega_1,\ \omega_2] + [a,\ P] = 0, \quad \text{donc} \quad G + M_O^{(e)} = 0. \tag{21.34}$$

Le vecteur moment

$$G = [K_O,\ \omega_2] \approx [J\omega_1,\ \omega_2] \tag{21.35}$$

égal au produit vectoriel du moment cinétique du gyroscope par la vitesse angulaire de précession s'appelle *moment gyroscopique* ou *moment de rappel.* La formule (21.35) montre que *le moment gyroscopique est dirigé perpendiculairement au plan des vecteurs* ω_1, ω_2 *et orienté de telle façon que le couple de forces engendré par ce vecteur*

tend à ramener le vecteur vitesse angulaire de la rotation propre sur le vecteur vitesse angulaire de la précession (règle de Foucault *)). L'identité (21.34) signifie que le moment gyroscopique G fait équilibre, à chaque instant de mouvement du gyroscope, au moment des forces extérieures $M_O^{(e)}$ (fig. 21.17). La formule (21.34) montre que les deux produits vectoriels ont même module,

$$J\omega_1\omega_2 \sin \vartheta = aP \sin (180^\circ - \vartheta),$$

d'où

$$\omega_2 = \frac{Pa}{J\omega_1}. \quad (21.36)$$

La vitesse angulaire de la précession du gyroscope est directement proportionnelle au produit de son poids par la distance du centre de gravité à l'appui et inversement proportionnelle au moment propre du gyroscope.

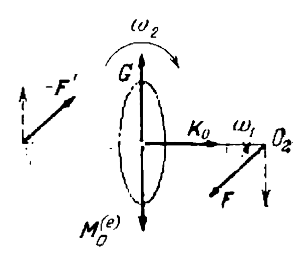


Fig. 21.18

4.3. Effet gyroscopique. En technique, on observe l'influence du moment gyroscopique (l'effet gyroscopique) chaque fois que l'on essaie d'incliner un rotor massif animé de rotation rapide. Soit un rotor S qui tourne avec son arbre dans les paliers O_1, O_2 de telle façon que son moment cinétique K_O est orienté de gauche à droite (fig. 21.18). Essayons de faire basculer l'arbre O_1O_2 avec rotor dans le plan du dessin dans le sens horaire. Il peut sembler de prime abord qu'un tel déplacement nécessite des efforts verticaux (en trait interrompu sur la figure). En réalité, il en est tout autrement. Pendant le basculement indiqué l'extrémité du vecteur K_O acquiert une vitesse qui est orientée suivant la verticale vers le bas dans le plan du dessin. En vertu de la formule (21.32) le vecteur moment des forces extérieures doit aussi agir en cette direction. Il en résulte que les efforts F et $-F'$ doivent être appliqués perpendiculairement au plan du dessin, de la façon montrée sur la figure 21.18.

Nous aboutirons d'ailleurs au même résultat en traçant le vecteur moment gyroscopique (21.35) qui est orienté vers le haut dans le plan du dessin. Conformément à la formule (21.34), le vecteur moment des forces extérieures doit être orienté en sens inverse, c'est-à-dire vers le bas. Les efforts dans les paliers se calculent selon la formule (21.34):

$$J\omega_1\omega_2 = F \cdot O_1O_2, \quad \text{donc} \quad F = \frac{J\omega_1\omega_2}{O_1O_2}. \quad (21.37)$$

*) Jean Bernard Léon Foucault, éminent physicien français (1819-1868).

Exemple 21.7. L'axe de la turbine est parallèle à l'axe longitudinal de la coque du navire, la masse de la roue de turbine est 2500 kg, son rayon de giration $\rho = 0{,}9$ m, la vitesse angulaire de rotation de la roue 1200 tr/mn, la distance entre paliers d'arbre $O_1O_2 = 1{,}9$ m. La valeur maximale de la vitesse angulaire ω_2 du tangage est égale à 0,11 rad/s. Déterminer les efforts complémentaires dans les paliers dus au tangage (fig. 21.18).

Solution. D'après la formule (21.3)

$$J = M\rho^2 = 2500 \cdot 0{,}9^2 = 2025 \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Quant à l'effort complémentaire dans les paliers, la formule (21.37) fournit sa valeur maximale:

$$F = 2025 \, \frac{1200 \cdot 2\pi}{60} \cdot \frac{0{,}11}{1{,}9} = 14\,700 \text{ N} = 14{,}7 \text{ kN}.$$

Sur les navires de mer, l'effet gyroscopique des masses en rotation sur la marche du navire est négligeable, car le poids du navire est très grand devant celui des masses tournantes. Au contraire, à bord d'un avion à hélice, le poids des masses tournantes constitue une fraction importante du poids de l'appareil. La conception à deux hélices tournant en sens opposés vise précisément à rattraper les moments gyroscopiques.

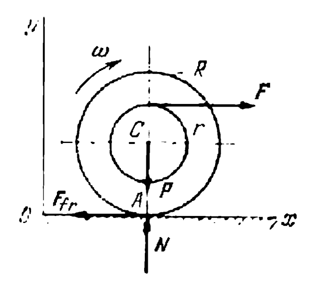


Fig. 21.19

Exercices

Exercice 21.1. Un volant de masse M, séparé de son système d'entraînement, s'est arrêté au bout de t_1 secondes après avoir fait N tours. On demande de savoir le moment de frottement M_{fr} (supposé constant) dans les paliers et la vitesse angulaire initiale ω_0 si le rayon de giration du volant par rapport à son axe de rotation est ρ.

Réponse. $\omega_0 = \dfrac{4\pi N}{t_1}$, $M_{\text{fr}} = \dfrac{4\pi N M\rho^2}{t_1^2}$.

Exercice 21.2. Déterminer la longueur réduite l et la période d'oscillation T d'une barre homogène rectiligne de longueur L suspendue à un axe horizontal qui passe par son extrémité.

Réponse. $l = \dfrac{2}{3} L$, $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{2L}{3g}}$.

Exercice 21.3. Un cylindre homogène de rayon R et de poids P roule sans glisser sous l'action d'une force constante horizontale F exercée sur le fil enroulé sur la fusée de rayon r du cylindre (fig. 21.19). Déterminer l'accélération du centre de masse du cylindre dans son roulement sur un plan horizontal, sachant que le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe est égal à J.

Indication. Ajouter aux trois équations différentielles du mouvement plan du cylindre les équations cinématiques; puisqu'on a $y_C \equiv R$ pendant toute la durée du mouvement du cylindre, on a $\ddot{y}_C \equiv 0$; puisque le cylindre roule sans glisser, le point A est le centre instantané des vitesses du cylindre, en sorte que $v_C = \dot{x}_C = R\omega = R\dot{\varphi}$ et par conséquent $\ddot{x}_C = R\ddot{\varphi}$.

Réponse. $w_C = \ddot{x}_C = \dfrac{F(R+r)R}{Jg + PR^2}\, g$.

Exercice 21.4. Une force horizontale F est exercée sur l'axe d'un essieu monté de rayon R et de poids P se trouvant dans une portion horizontale

de la voie ferrée (fig. 21.20). Le rayon de giration de l'essieu monté par rapport à son axe est égal à ρ, le coefficient de frottement de glissement est égal à f. Quelle doit être la force F pour que l'essieu monté roule sans glisser?

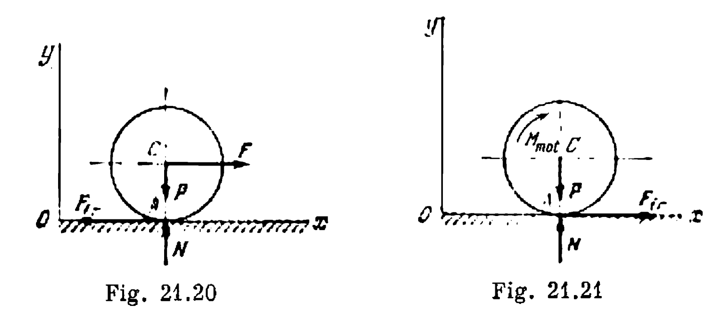


Fig. 21.20 Fig. 21.21

I n d i c a t i o n. Voir l'indication à l'exercice 21.3. Le roulement étant sans glissement, on a $F_{fr} \leqslant fN = fP$.

R é p o n s e. $F \leqslant f \dfrac{R^2 + \rho^2}{\rho^2} P$.

E x e r c i c e 21.5. Mêmes conditions, mais la force F est remplacée par un moment moteur M_{mot} (fig. 21.21).

R é p o n s e. $M_{mot} \leqslant f \dfrac{R^2 + \rho^2}{\rho} P$.

CHAPITRE XXII

DYNAMIQUE DU SOLIDE (suite)

§ 1. Géométrie des masses

1.1. Formule générale du moment d'inertie du solide par rapport à un axe quelconque. Conformément au théorème de Steiner (ch. XXI, n° 1.2), on peut exprimer le moment d'inertie du solide par rapport à un axe quelconque à l'aide de son moment d'inertie par rapport à un axe parallèle passant par son centre de masse. Il importe donc d'étudier la relation qui existe entre les moments d'inertie par rapport aux différents axes passant par le centre de masse du solide. Nous poserons cependant ce problème d'une façon plus générale et mènerons l'axe Ol par un point O qui ne se confond pas forcément avec le centre de masse du solide. Soit un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires $Oxyz$ d'origine en O et aux axes invariablement liés au solide (fig. 22.1), et soient α, β et γ les angles que fait l'axe Ol avec les axes Ox, Oy et Oz. Considérons un élément matériel N du solide de masse Δm et de coordonnées x, y, z. Soit $h = NL$ la distance de N à l'axe Ol. Calculons

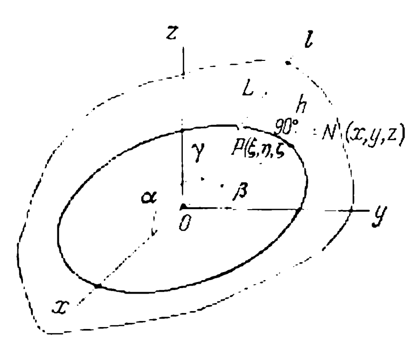


Fig. 22.1

$$OL = \text{proj}_{Ol} ON = (\boldsymbol{ON}, \boldsymbol{l}) =$$
$$= (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})(\boldsymbol{i}\cos\alpha +$$
$$+ \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma) =$$
$$= x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

Ici $\boldsymbol{l}$ est le vecteur unité de l'axe Ol et $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ ceux des axes Ox, Oy, Oz. Sachant que la somme des carrés des cosinus directeurs est égale à l'unité ($\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$), on obtient pour h^2:

$$h^2 = ON^2 - OL^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 =$$
$$= (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) -$$
$$- (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 = (y^2 + z^2)\cos^2\alpha +$$
$$+ (z^2 + x^2)\cos^2\beta + (x^2 + y^2)\cos^2\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma -$$
$$-2zx\cos\gamma\cos\alpha \quad 2xy\cos\alpha\cos\beta.$$

Le moment d'inertie J_{Ol} du solide par rapport à l'axe Ol est égal, d'après la définition (ch. XXI, n° 1.1) et la formule (21.1), à

$$J_{Ol}=\sum \Delta m\cdot h^2=\cos^2\alpha\sum(y^2+z^2)\,\Delta m+\cos^2\beta\sum(z^2+x^2)\,\Delta m+$$
$$+\cos^2\gamma\sum(x^2+y^2)\,\Delta m-2\cos\beta\cos\gamma\sum yz\,\Delta m-$$
$$-2\cos\gamma\cos\alpha\sum zx\Delta m-2\cos\alpha\cos\beta\sum xy\,\Delta m.$$

La troisième somme dans cette expression représente J_{Oz}, moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz (voir la formule (21.1a)) ; de même, les deux premières sommes sont J_{Ox} et J_{Oy}, moments d'inertie du solide par rapport aux axes Ox et Oy.

On appelle *produits d'inertie* (ou *moments centrifuges*) *du solide* les quantités J_{yz}, J_{zx}, J_{xy} définies par les formules

$$J_{yz}=\sum yz\,\Delta m,\qquad J_{zx}=\sum zx\,\Delta m,\qquad J_{xy}=\sum xy\,\Delta m,\tag{22.1}$$

où x, y, z sont les coordonnées d'un élément du solide de masse Δm dans les axes Ox, Oy, Oz associés au solide ; la sommation est étendue au solide tout entier. Les produits d'inertie, comme les moments d'inertie, ne dépendent que de la répartition des masses dans le solide, ainsi que de la disposition des axes ; ce sont donc des grandeurs constantes pour le solide donné et les axes invariablement liés à ce dernier. Le calcul des produits (et moments) d'inertie du solide se réduit dans le cas général au calcul d'une intégrale triple étendue au volume du solide.

La formule de J_{Ol} s'écrira maintenant comme suit :

$$J_{Ol}=J_{Ox}\cos^2\alpha+J_{Oy}\cos^2\beta+J_{Oz}\cos^2\gamma-2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma-$$
$$-2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha-2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta.\tag{22.2}$$

1.2. Ellipsoïde d'inertie. Trouvons sur l'axe Ol un point P tel que

$$OP=\frac{1}{\sqrt{J_{Ol}}}.$$

Ses coordonnées ξ, η, ζ seront

$$\xi=OP\cos\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{J_{Ol}}},\qquad \eta=\frac{\cos\beta}{\sqrt{J_{Ol}}},\qquad \zeta=\frac{\cos\gamma}{\sqrt{J_{Ol}}}.$$

Portant dans (22.2) les expressions

$$\cos\alpha=\sqrt{J_{Ol}}\,\xi,\qquad \cos\beta=\sqrt{J_{Ol}}\,\eta,\qquad \cos\gamma=\sqrt{J_{Ol}}\,\zeta$$

et divisant par J_{Ol}, on obtient

$$J_{Ox}\xi^2+J_{Oy}\eta^2+J_{Oz}\zeta^2-2J_{yz}\eta\zeta-2J_{zx}\zeta\xi-2J_{xy}\xi\eta=1.\tag{22.3}$$

C'est l'équation du lieu géométrique des points P dont la distance à l'origine des coordonnées est inversement proportionnelle à la racine carrée de leur moment d'inertie par rapport à l'axe Ol. Puis-

qu'on a $J_{Ol} \neq \infty$ (car le solide est situé dans une portion finie de l'espace) et $J_{Ol} \neq 0$ (les points du solide ne sont pas alignés), on a aussi $OP \neq 0$ et $OP \neq \infty$. Il n'y a qu'une seule surface du second ordre exempte de points singuliers: c'est l'ellipsoïde. L'équation (22.3) est donc celle d'un ellipsoïde, dit *ellipsoïde d'inertie du solide relativement au point O.*

L'ellipsoïde d'inertie varie en fonction du point O. L'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de masse C du solide est appelé *central.*

Si deux produits d'inertie J_{yz}, J_{zx} indiciés par le même axe Oz s'annulent simultanément,

$$J_{yz} = J_{zx} = 0,$$

l'axe Oz devient *axe principal d'inertie* du solide relatif au point O.

L'axe principal d'inertie passant par le centre de masse C du solide s'appelle *axe central principal d'inertie* du solide.

Si chacun des axes Cx, Cy, Cz est central principal, on a

$$J_{yz} = J_{zx} = J_{xy} = 0.$$

L'équation (22.2) de l'ellipsoïde d'inertie dans les axes centraux principaux d'inertie devient

$$J_{Cx}\xi^2 + J_{Cy}\eta^2 + J_{Cz}\zeta^2 = 1. \tag{22.4}$$

1.3. Propriétés de l'ellipsoïde d'inertie et des axes centraux principaux d'inertie.

1° Proposons-nous d'allonger le solide par la pensée dans une direction perpendiculaire à l'axe Ol. La distance h augmentera, de même que J_{Ol}; autrement dit, le point P deviendra plus proche de O. L'ellipsoïde d'inertie relatif à O s'aplatira le long de l'axe, conformément à la déformation générale du solide. S'agissant d'un solide parfait, il serait plus juste de dire que la déformation de l'ellipsoïde d'inertie est « conforme en moyenne » à la répartition des masses par rapport au point O.

2° Si les ellipsoïdes d'inertie relatifs aux points O et O' admettent OO' comme axe principal d'inertie, cet axe passe par le centre de masse C du solide (c'est-à-dire représente un axe central principal d'inertie du solide) et est principal relativement à tous ses points.

D é m o n s t r a t i o n. Prenons la droite OO' comme axe Oz (fig. 22.2), traçons les axes Ox, Oy et les axes parallèles $O'x'$, $O'y'$. On a alors $x = x'$, $y = y'$, $z = z' + c$, où $c = OO'$. On a par définition $J_{yz} = J_{zx} = J_{y'z'} = J_{z'x'} = 0$, et l'on obtient à l'aide des formules (19.2)

$$J_{yz} = \sum yz\,\Delta m = \sum y'(z' + c)\,\Delta m = J_{y'z'} + c \sum y'\Delta m = cMy'_C = 0,$$

$$J_{zx} = \sum zx\,\Delta m = \sum (z' + c)\,x'\Delta m = J_{z'x'} + c \sum x'\Delta m = cMx'_C = 0,$$

où $M = \sum \Delta m$. Par conséquent $x'_C = y'_C = 0$, c'est-à-dire que le centre de masse du solide est situé sur l'axe OO'. Prenons sur OO' un point quelconque O^* tel que $OO^* = c^*$, et calculons

$$J_{y^*z^*} = \sum y^*z^*\Delta m = \sum y(z - c^*)\,\Delta m = J_{yz} - c^* \sum y\Delta m = 0,$$

$$J_{z^*x^*} = \sum z^*x^*\Delta m = \sum (z - c^*)\,x\Delta m = J_{zx} - c^* \sum x\Delta m = 0.$$

Cela veut dire que l'axe OO' est aussi principal relativement au point O^*. La propriété 2° est démontrée.

3° Si le solide parfait homogène admet un axe de symétrie, ce dernier est axe central principal d'inertie du solide par rapport à chacun de ses points.

D é m o n s t r a t i o n. Le centre de masse C du solide est toujours situé sur l'axe de symétrie (voir ch. VI, n° 2.1). Il ne reste

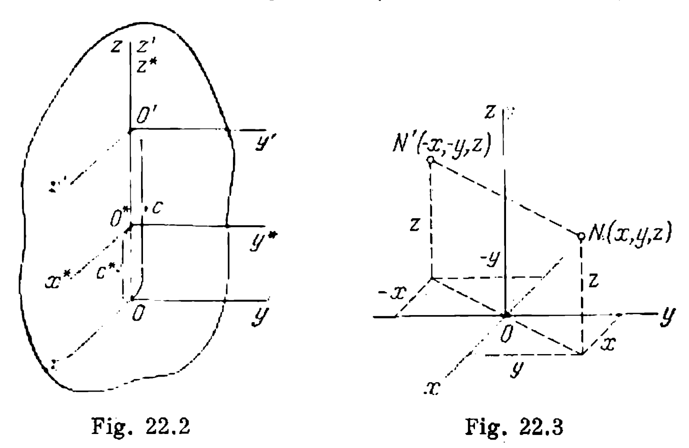


Fig. 22.2 Fig. 22.3

donc qu'à montrer que l'axe de symétrie est toujours axe principal d'inertie du solide relativement à n'importe quel point de l'axe. Soit Oz (fig. 22.3) un axe de symétrie; pour chaque élément matériel N du solide de masse Δm et de coordonnées x, y, z, on trouve un élément identique N' de coordonnées $-x$, $-y$, z, si bien que

$$J_{yz} = \sum yz\,\Delta m = 0, \qquad J_{zx} = \sum zx\,\Delta m = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

E x e m p l e 22.1. Construire l'ellipsoïde central d'inertie pour un cylindre circulaire homogène de rayon R, de hauteur H et de densité β (fig. 22.4).

S o l u t i o n. Plaçons l'origine des coordonnées dans le centre de masse C du cylindre; dirigeons l'axe Cz suivant l'axe de symétrie, les axes Cx, Cy étant disposés de façon quelconque dans le plan de symétrie. Puisque Cx, Cy sont, eux aussi, des axes de symétrie, on a d'après la propriété 3°

$$J_{yz} = J_{zx} = J_{xy} = 0,$$

ce qui veut dire que les axes choisis sont centraux principaux. Le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe Cz se définit par la formule (21.8):

$$J_{Cz}=\frac{1}{2}MR^2,$$

où $M = \pi R^2 H\beta$ est la masse du cylindre. Le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe Cx se définit par une formule analogue à (21.2a):

$$J_{Cx}=\iiint\limits_D \beta(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=\beta\int\limits_{-H/2}^{H/2}dz\iint\limits_{D'}y^2\,dx\,dy+$$
$$+\beta\int\limits_{-H/2}^{H/2}z^2\,dz\iint\limits_{D'}dx\,dy=\beta H\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\int\limits_0^R r^3\,dr+\beta\frac{H^3}{12}\pi R^2=\beta H\pi\frac{R^4}{4}+$$
$$+\frac{1}{12}H^2\pi R^2 H\beta=\frac{1}{4}MR^2+\frac{1}{12}MH^2.$$

Pour calculer l'intégrale triple étendue au volume D du cylindre, nous avons passé dans le plan Cxy (le domaine D' est un cercle de rayon R centré en C)

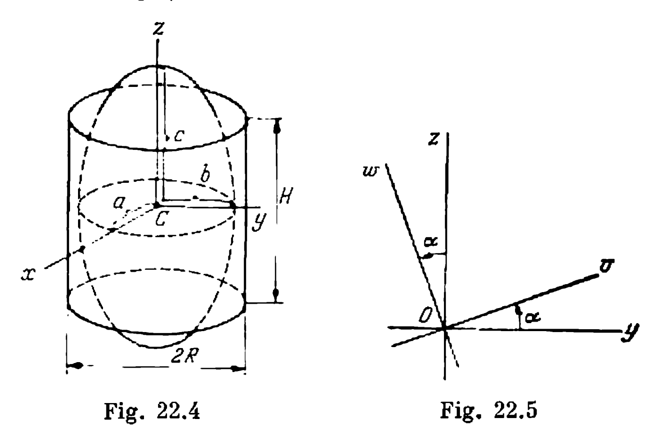


Fig. 22.4 Fig. 22.5

aux coordonnées polaires (voir P i s k o u n o v, t. II, ch. XIV, §§ 5 et 13). On a évidemment $J_{Cy} = J_{Cx}$. L'équation de l'ellipsoïde central d'inertie dans les axes principaux Cx, Cy et Cz s'obtient à partir de (22.4):

$$\left(\frac{1}{4}MR^2+\frac{1}{12}MH^2\right)(\xi^2+\eta^2)+\frac{1}{2}MR^2\zeta^2=1.$$

C'est un ellipsoïde de révolution de demi-axes

$$a=b=\frac{2}{\sqrt{MR^2+\frac{1}{3}MH^2}},\quad c=\frac{2}{R\sqrt{2M}}$$

représenté sur la figure 22.4 pour $H = 2R$.

1.4. Calcul des produits d'inertie. Citons trois autres propositions qui viennent s'ajouter à celles du nº 1.3.

I. Si le solide admet un plan de symétrie, toute droite perpendiculaire à ce plan est axe principal d'inertie relatif au point d'intersection de cette droite et du plan.

D é m o n s t r a t i o n. Soit Oxy un plan de symétrie du solide; à chaque élément de masse Δm de coordonnées x, y, z correspond alors un élément identique Δm de coordonnées x, y, $-z$, si bien que

$$J_{yz} = \sum yz \, \Delta m = 0, \qquad J_{zx} = \sum zx \, \Delta m = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

II. Faisons tourner les axes Oy, Oz d'un angle α autour de l'axe Ox dans le plan Oyz jusqu'à amener Oy et Oz sur les axes Ov, Ow situés dans le même plan Oyz et réciproquement perpendiculaires (fig. 22.5). S'il se trouve que l'un des axes Ov, Ow au moins est axe principal d'inertie du solide relativement au point O, le produit d'inertie J_{yz} s'exprime par

$$J_{yz} = \frac{1}{2}(J_{Ow} - J_{Ov}) \sin 2\alpha. \tag{22.5}$$

D é m o n s t r a t i o n. D'après les formules qui définissent la transformation des coordonnées cartésiennes rectangulaires à la suite d'une rotation des axes (voir E f i m o v, ch. 2, § 9), on a

$$y = v \cos \alpha - w \sin \alpha, \qquad z = v \sin \alpha + w \cos \alpha.$$

Il vient donc

$$J_{yz} = \sum yz \, \Delta m = \sin \alpha \cos \alpha \left(\sum v^2 \, \Delta m - \sum w^2 \, \Delta m\right) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sum vw \, \Delta m.$$

Or, la seconde somme s'annule par hypothèse, et l'on retrouve la formule (22.5).

III. Soit C le centre de masse du solide; les axes de coordonnées Cy', Cz' sont contenus dans le plan Oyz et parallèles aux axes Oy, Oz respectivement (fig. 22.6). Le produit d'inertie a alors pour expression

$$J_{yz} = J_{y'z'} + M y_C z_C, \tag{22.6}$$

où M est la masse du solide et x_C, y_C, z_C les coordonnées du centre de masse C du solide par rapport à $Oxyz$.

D é m o n s t r a t i o n. On a de toute évidence

$$y = y' + y_C, \qquad z = z' + z_C,$$

si bien que

$$J_{yz} = \sum yz \, \Delta m = \sum y' z' \, \Delta m + y_C z_C \sum \Delta m + z_C \sum y' \, \Delta m + y_C \sum z' \, \Delta m.$$

Or, les deux dernières sommes sont respectivement égales à My'_C et Mz'_C (voir les formules (19.2)), c'est-à-dire qu'elles s'annulent, et nous retrouvons (22.6).

§ 2. Efforts exercés sur l'axe du solide en rotation

Quand le rotor d'une machine tourne rapidement autour de son axe fixe, il engendre des forces d'inertie considérables qui agissent sur les paliers de l'arbre et font augmenter très sensiblement les efforts dans les paliers. Ces phénomènes nuisibles disparaissent quand les forces d'inertie des masses tournantes sont en équilibre. Dans les machines modernes rapides, l'équilibre des forces d'inertie constitue un souci constant du concepteur.

Les efforts exercés par le solide tournant en les points d'appui de son axe sont égaux en module aux réactions d'appui en les mêmes

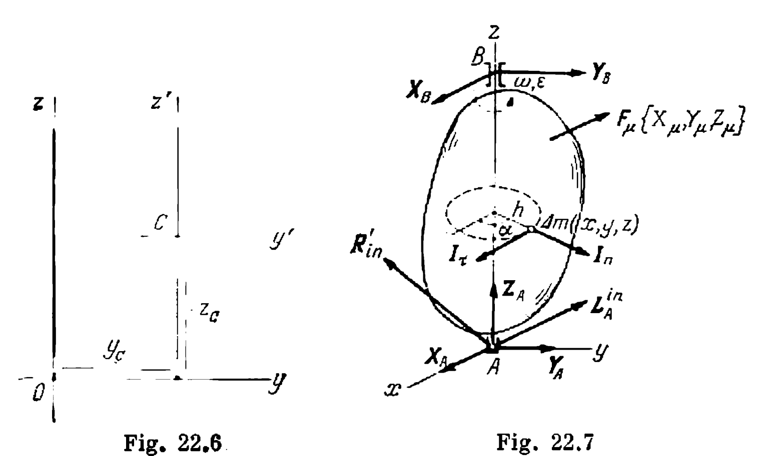


Fig. 22.6 Fig. 22.7

points, mais ont des sens contraires. Le problème des efforts sur l'axe se réduit donc à la recherche des réactions d'appui. Pour déterminer les réactions d'appui d'un solide mobile en rotation, nous utiliserons le principe de d'Alembert qui consiste à ajouter aux forces réelles appliquées au solide les forces d'inertie fictives.

2.1. Résultante générale et moment résultant des forces d'inertie. Soit un solide mobile en rotation autour d'un axe fixe AB sous l'action d'un système de forces connues $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_m$. Adoptons AB comme axe Az (fig. 22.7). Associés au solide, les axes Ax et Ay tournent avec ce dernier.

Choisissons dans le solide un élément de masse Δm situé à une distance h de l'axe Az. Les coordonnées définissant la position de cet élément seront

$$x = h \cos \alpha, \qquad y = h \sin \alpha, \qquad z = \text{const.}$$

Appliquons à l'élément considéré les forces d'inertie normale et tangentielle (voir fig. 22.7) d'intensités respectives

$$I_n = \Delta m \cdot w_n = h\omega^2 \Delta m, \qquad I_\tau = \Delta m \cdot w_\tau = h\varepsilon \Delta m,$$

où ω et ε sont la vitesse angulaire et l'accélération angulaire du solide. Chaque force d'inertie est orientée en sens inverse de l'accélération correspondante. La force d'inertie normale est toujours orientée à partir de l'axe de rotation, c'est pourquoi on l'appelle parfois force centrifuge (à ne pas confondre avec la force homonyme réelle appliquée à la liaison !). Nous avons supposé (fig. 22.7) que le solide tourne avec accélération dans le sens positif; on a donc $\omega > 0$ et $\varepsilon > 0$, si bien que la force d'inertie tangentielle est dirigée suivant la tangente et orientée dans le sens négatif.

Réduisant les forces d'inertie de tous les éléments du solide à un centre commun, par exemple au point A (comme on l'a fait dans le ch. V, § 2), on obtient dans le cas général une force résultante appliquée au centre de réduction et équipollente à la résultante générale $\boldsymbol{R}'_{\text{in}}$ des forces d'inertie, et un couple résultant de moment équipollent au moment résultant $\boldsymbol{L}_A^{\text{in}}$ des forces d'inertie par rapport au centre de réduction:

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R}'_{\text{in}} = \sum \boldsymbol{I}_\tau + \sum \boldsymbol{I}_n, \quad \boldsymbol{L}_A^{\text{in}} = \sum \text{Mom}_A \boldsymbol{I}_\tau + \sum \text{Mom}_A \boldsymbol{I}_n.$$

Calculons les projections de la résultante générale des forces d'inertie sur les axes Ax et Ay (voir fig. 22.7):

$$R'_x = \sum I_x^\tau + \sum I_x^n = \sum h\varepsilon \Delta m \sin\alpha + \sum h\omega^2 \Delta m \cos\alpha = \\ = \varepsilon \sum y \Delta m + \omega^2 \sum x \Delta m,$$

$$R'_y = \sum I_y^\tau + \sum I_y^n = -\sum h\varepsilon \Delta m \cos\alpha + \sum h\omega^2 \Delta m \sin\alpha = \\ = -\varepsilon \sum x \Delta m + \omega^2 \sum y \Delta m.$$

Utilisant les formules (19.2) des coordonnées du centre de masse du solide et désignant la masse du solide par M, on obtient

$$R'_x = M(\varepsilon y_C + \omega^2 x_C), \qquad R'_y = M(-\varepsilon x_C + \omega^2 y_C). \tag{22.7}$$

Puisque les forces d'inertie agissent dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, on a

$$R'_z = 0.$$

Le module de la résultante générale des forces d'inertie se calcule à l'aide de la formule (22.7):

$$R'_{\text{in}} = \sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2} = M\sqrt{(x_C^2 + y_C^2)(\omega^4 + \varepsilon^2)}.$$

Le moment résultant des forces d'inertie se calcule à l'aide des formules (5.12) et (5.2):

$$L_A^{\text{in}} = \sum \Delta m \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ \varepsilon y + \omega^2 x & -\varepsilon x + \omega^2 y & 0 \end{vmatrix}.$$

On en tire les expressions des moments des forces d'inertie par rapport aux axes Ax, Ay, Az (c'est-à-dire des projections du moment résultant des forces d'inertie sur les axes indiqués):

$$L_{Ax}^{\text{in}} = \varepsilon \sum zx\Delta m - \omega^2 \sum yz\Delta m,$$
$$L_{Ay}^{\text{in}} = \varepsilon \sum yz\Delta m + \omega^2 \sum zx\Delta m,$$
$$L_{Az}^{\text{in}} = -\varepsilon \sum (x^2 + y^2)\, \Delta m.$$

Les quatre premières sommes représentent les produits d'inertie (22.1), et la dernière somme, le moment d'inertie (21.1a) du solide. Nous écrivons donc

$$L_{Ax}^{\text{in}} = J_{zx}\varepsilon - J_{yz}\omega^2, \quad L_{Ay}^{\text{in}} = J_{yz}\varepsilon + J_{zx}\omega^2, \quad L_{Az}^{\text{in}} = -J_{Az}\varepsilon. \tag{22.8}$$

2.2. Réactions dynamiques. Passons à l'établissement des équations (20.7) et (20.8), souvent appelées *équations de cinétostatique.* Supposons que l'appui en A soit matérialisé par une crapaudine, et en B, par une articulation rotoïde (le problème devient alors isostatique, voir ch. V, nº 3.3). Les composantes des réactions seront désignées par X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B, et la distance AB par H. Alors

$$\text{mom}_{Ax} Y_B = -Y_B H, \qquad \text{mom}_{Ay} X_B = X_B H.$$

Tous les autres moments des composantes des réactions sont nuls. Puisqu'il en est ainsi, nous déduisons de (20.7) et (20.8), en faisant intervenir (22.7) et (22.8), les six équations suivantes:

$$\sum_{\mu=1}^{m} X_\mu + X_A + X_B + M\varepsilon y_C + M\omega^2 x_C = 0, \tag{22.9}$$

$$\sum_{\mu=1}^{m} Y_\mu + Y_A + Y_B - M\varepsilon x_C + M\omega^2 y_C = 0, \tag{22.10}$$

$$\sum_{\mu=1}^{m} Z_\mu + Z_A = 0, \tag{22.11}$$

$$\sum_{\mu=1}^{m} \text{mom}_{Ax} F_\mu - Y_B H + J_{zx}\varepsilon - J_{yz}\omega^2 = 0, \tag{22.12}$$

$$\sum_{\mu=1}^{m} \text{mom}_{Ay} F_\mu + X_B H + J_{yz}\varepsilon + J_{zx}\omega^2 = 0, \tag{22.13}$$

$$\sum_{\mu=1}^{m} \text{mom}_{Az} F_\mu - J_{Az}\varepsilon = 0. \tag{22.14}$$

La dernière équation, qui ne contient aucune réaction, représente l'équation différentielle (21.15) de la rotation du solide autour d'un axe fixe. Les cinq premières équations servent à déterminer les cinq projections X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B des réactions d'appui pendant la rotation.

Si le solide était fixe ($\omega = \varepsilon \equiv 0$), les deux derniers termes dans les équations (22.9), (22.10), (22.12), (22.13) s'annuleraient, et l'on obtiendrait les équations de l'équilibre statique (voir (5.40)) d'où l'on déduirait les projections des réactions d'appui en repos (*réactions statiques*) X_A^{st}, Y_A^{st}, Z_A^{st}, X_B^{st}, Y_B^{st}. Quant à l'équation (22.14), elle exprimerait dans ce cas la condition d'équilibre du solide. La différence entre les réactions d'appui en rotation et en repos s'appelle *réaction dynamique* (complémentaire) de l'appui:

$$\boldsymbol{R}_A^{\text{dyn}} = \boldsymbol{R}_A - \boldsymbol{R}_A^{\text{st}}; \quad \boldsymbol{R}_B^{\text{dyn}} = \boldsymbol{R}_B - \boldsymbol{R}_B^{\text{st}}.$$

Les projections correspondantes s'écrivent alors sous la forme

$$X_A^{\text{dyn}} = X_A - X_A^{\text{st}}, \quad Y_A^{\text{dyn}} = Y_A - Y_A^{\text{st}}, \quad Z_A^{\text{dyn}} = Z_A - Z_A^{\text{st}},$$
$$X_B^{\text{dyn}} = X_B - X_B^{\text{st}}, \quad Y_B^{\text{dyn}} = Y_B - Y_B^{\text{st}}.$$

Les équations (22.9) à (22.13) et (5.40) donnent lieu aux équations qui définissent les projections des réactions dynamiques des appuis:

$$X_A^{\text{dyn}} + X_B^{\text{dyn}} = -M\varepsilon y_C - M\omega^2 x_C,$$
$$Y_A^{\text{dyn}} + Y_B^{\text{dyn}} = M\varepsilon x_C - M\omega^2 y_C, \quad Z_A^{\text{dyn}} = 0,$$
$$HY_B^{\text{dyn}} = J_{zx}\varepsilon - J_{yz}\omega^2, \quad HX_B^{\text{dyn}} = -J_{yz}\varepsilon - J_{zx}\omega^2.$$

Les solutions de ces équations nous donnent les formules des projections des réactions dynamiques:

$$\begin{aligned} X_A^{\text{dyn}} &= -M\varepsilon y_C - M\omega^2 x_C + \frac{1}{H}(J_{yz}\varepsilon + J_{zx}\omega^2), \\ Y_A^{\text{dyn}} &= M\varepsilon x_C - M\omega^2 y_C + \frac{1}{H}(-J_{zx}\varepsilon + J_{yz}\omega^2), \qquad Z_A^{\text{dyn}} = 0, \qquad (22.15) \\ X_B^{\text{dyn}} &= -\frac{1}{H}(J_{yz}\varepsilon + J_{zx}\omega^2), \qquad Y_B^{\text{dyn}} = \frac{1}{H}(J_{zx}\varepsilon - J_{yz}\omega^2). \end{aligned}$$

2.3. Mise en équilibre des forces d'inertie. Proposons-nous de déterminer les conditions sous lesquelles les réactions engendrées par la rotation restent identiques aux réactions statiques; autrement dit, il s'agit de chercher les conditions pour que les réactions dynamiques s'annulent.

Des deux dernières équations (22.15) il ressort que pour annuler $\boldsymbol{R}_B^{\text{dyn}}$, il faut et il suffit qu'il y ait $J_{yz} = J_{zx} = 0$, c'est-à-dire que Az soit un axe principal d'inertie relativement au point A (voir la définition dans le nº 1.2). Si cette condition est vérifiée, les deux

premières équations (22.15) deviennent

$$X_A^{\text{dyn}} = -M\varepsilon y_C - M\omega^2 x_C, \qquad Y_A^{\text{dyn}} = M\varepsilon x_C - M\omega^2 y_C.$$

Si ω et ε ne sont pas identiquement nulles, pour annuler R_A^{dyn}, il faut et il suffit qu'il y ait $x_C = y_C = 0$, c'est-à-dire que le centre de masse C du solide se trouve sur l'axe de rotation. Autrement dit, il faut que l'axe de rotation Az soit un axe central principal d'inertie du solide (voir la fin du n° 1.2).

C o n c l u s i o n. *La rotation du solide n'engendre aucun effort complémentaire sur l'axe* (en plus des réactions statiques) *si et seulement si son axe de rotation fixe se confond avec un des axes centraux principaux d'inertie.* Autrement dit, la condition nécessaire et suffisante de la mise en équilibre des forces d'inertie du solide en rotation est que l'axe de rotation soit un axe central principal d'inertie du solide.

Nous savions déjà que le solide pouvait effectuer p a r i n e r t i e, c'est-à-dire sans l'intervention des forces actives extérieures et

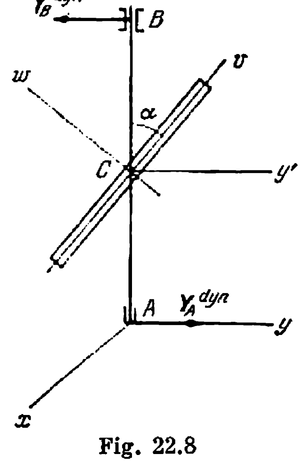
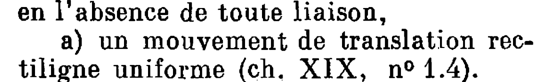
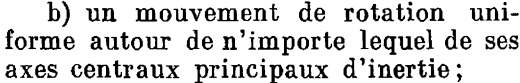


Fig. 22.8

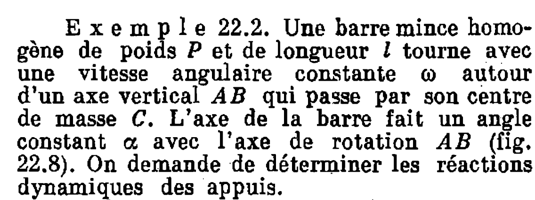

en l'absence de toute liaison,

a) un mouvement de translation rectiligne uniforme (ch. XIX, n° 1.4).

Désormais nous pouvons y ajouter:


b) un mouvement de rotation uniforme autour de n'importe lequel de ses axes centraux principaux d'inertie;

c) les mouvements a), b) combinés d'une façon quelconque.


E x e m p l e 22.2. Une barre mince homogène de poids P et de longueur l tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical AB qui passe par son centre de masse C. L'axe de la barre fait un angle constant α avec l'axe de rotation AB (fig. 22.8). On demande de déterminer les réactions dynamiques des appuis.

S o l u t i o n. Choisissons le repère $Axyz$ de la façon montrée sur la figure 22.8 et calculons les produits d'inertie J_{zx}, J_{yz}. Puisque la barre est contenue dans le plan Ayz, on a

$$J_{zx} = \sum zx\Delta m = 0,$$

car $x = 0$ pour chaque élément de masse de la barre. Adoptant le centre de masse C de la barre comme origine, traçons l'axe Cy' parallèle à Ay, l'axe Cv confondu avec celui de la barre et l'axe Cw perpendiculaire à Cv. Il vient alors en vertu de (22.5)

$$J_{y'z} = \frac{1}{2}(J_{Cw} - J_{Cv}) \sin [2(90° - \alpha)].$$

Le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe Cv est égal à

$$J_{Cv} = 0,$$

la barre étant suffisamment mince par définition. D'après la formule (21.6)

$$J_{Cw} = \frac{1}{12} \frac{P}{g} l^2.$$

De la formule (22.6) il ressort que

$$J_{yz} = J_{y'z} = \frac{1}{24} \frac{P}{g} l^2 \sin 2\alpha,$$

car $y_C = 0$.

Les formules (22.15) nous donnent maintenant les projections des réactions dynamiques des appuis

$$X_A^{\text{dyn}} = X_B^{\text{dyn}} = 0, \qquad Y_A^{\text{dyn}} = -Y_B^{\text{dyn}} = \frac{1}{24} \frac{P}{gH} l^2\omega^2 \sin 2\alpha. \qquad (1)$$

La figure 22.7 permet de voir que les réactions dynamiques des appuis forment un couple de forces de moment égal à

$$M_{\text{dyn}} = Y_A^{\text{dyn}} H = \frac{1}{24} \frac{P}{g} l^2\omega^2 \sin 2\alpha$$

et orienté dans le sens positif de l'axe Ax.

On peut d'ailleurs aboutir au même résultat sans faire intervenir les formules (22.15). En effet, la résultante générale des forces d'inertie est $R' = 0$ conformément à (22.7); d'autre part, il ressort de (22.8) que les projections du moment résultant des forces d'inertie sont égales à

$$L_{Ax}^{\text{in}} = -J_{yz}\omega^2 = -\frac{1}{24} \frac{P}{g} l^2\omega^2 \sin 2\alpha, \qquad L_{Ay}^{\text{in}} = L_{Az}^{\text{in}} = 0,$$

ce qui revient à dire que les réactions dynamiques des appuis (1) font équilibre aux forces d'inertie de la barre en rotation.

§ 3. Exemples d'application des équations de Lagrange à la dynamique du solide

Les exemples qui vont suivre ne pouvaient pas être cités dans le paragraphe 2 du chapitre XVIII. En effet, bien que la notion d'énergie cinétique du système de points matériels soit introduite lors de la déduction des équations de Lagrange (paragraphe indiqué), les formules qui permettent de calculer l'énergie cinétique du solide et le travail des forces dans la rotation de ce dernier n'apparaissent que plus tard, dans le chapitre XXI. Réunissant tous ces éléments, nous pouvons maintenant aborder les exemples.

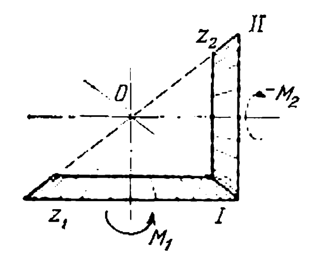


Fig. 22.9

E x e m p l e 22.3. La transmission de la rotation entre deux axes coplanaires perpendiculaires est réalisée par deux engrenages coniques à z_1 et z_2 dents (fig. 22.9). Les moments d'inertie des arbres portant les engrenages sont respectivement J_1 et J_2. Déterminer l'accélération angulaire du premier arbre, sachant qu'il est soumis à un moment moteur M_1, tandis que le second arbre est soumis à un moment résistant $-M_2$.

S o l u t i o n. Le système a un degré de liberté; adoptons comme coordonnée indépendante l'angle de rotation φ du premier engrenage. L'énergie ciné-

tique du système est égale à

$$T=T_1+T_2=\frac{1}{2}J_1\omega_1^2+\frac{1}{2}J_2\omega_2^2.$$

Les vitesses angulaires ω_1 et ω_2 des engrenages vérifient la relation (voir l'exemple 8.2)

$$\omega_2=k\omega_1,$$

où le coefficient $k=z_1/z_2$ est le rapport de transmission, ou rapport des vitesses. Il vient donc définitivement

$$T=\frac{1}{2}(J_1+k^2J_2)\,\omega_1^2=\frac{1}{2}(J_1+k^2J_2)\,\dot{\varphi}^2.$$

Déterminons la force généralisée Q_φ. A cet effet, donnons au système un déplacement virtuel en tournant le premier engrenage d'un angle $\delta\varphi$. Le second engrenage tournera d'un angle $\delta\varphi_2=k\delta\varphi$. Calculons le travail élémentaire des moments appliqués lors du déplacement virtuel du système d'après la formule (21.24):

$$\delta A=Q_\varphi\delta\varphi=M_1\delta\varphi-M_2\delta\varphi_2=$$
$$=(M_1-kM_2)\,\delta\varphi.$$

D'où

$$Q_\varphi=\frac{\delta A}{\delta\varphi}=M_1-kM_2.$$

Fig. 22.10

Nous voyons que la force généralisée est le moment réduit au premier axe. Etablissons l'équation de Lagrange (18.11) pour l'unique coordonnée indépendante φ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_\varphi.$$

En y portant T et Q_φ, on obtient

$$(J_1+k^2J_2)\,\ddot{\varphi}=M_1-kM_2.$$

L'accélération angulaire du premier engrenage sera donc

$$\varepsilon=\frac{M_1-kM_2}{J_1+k^2J_2}.$$

E x e m p l e 22.4. Le pendule elliptique est un système composé de deux corps mobiles dont le premier (M_1, fig. 22.10), de poids P_1, glisse sans frottement dans les guidages horizontaux et le second (M_2), de poids P_2, est relié au premier par une barre sans poids de longueur l et animé d'un mouvement oscillatoire dans le plan vertical. Former l'équation du mouvement et déterminer la période des petites oscillations du pendule elliptique.

S o l u t i o n. Le système a deux degrés de liberté. Comme coordonnées indépendantes, nous retiendrons l'abscisse x du centre de gravité du mobile M_1 et l'angle d'écart de la verticale φ (élongation angulaire) de la barre. Les coordonnées cartésiennes de M_2 sont

$$x_2=x+l\sin\varphi,\qquad y_2=l\cos\varphi,$$

et les projections de la vitesse de M_2 s'expriment donc par

$$\dot{x}_2=\dot{x}+l\dot{\varphi}\cos\varphi,\quad \dot{y}_2=-l\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

L'énergie cinétique du système est égale à

$$T=T_1+T_2=\frac{1}{2}\frac{P_1}{g}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\frac{P_2}{g}(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)=$$

$$=\frac{P_1+P_2}{2g}\dot{x}^2+\frac{P_2l}{2g}(l\dot{\varphi}^2+2\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi).$$

Le travail des forces P_1, P_2 (poids des solides) reste nul dans tout déplacement réel de M_1 sur le plan, car $P_1 \perp Ox$ et $P_2 \perp Ox$. La force généralisée Q_x s'annule donc, tandis que la force généralisée Q_φ se définit de la même façon que dans l'exemple 18.3:

$$Q_\varphi = -P_2 l \sin\varphi.$$

On aboutit à la même expression en partant de la formule de la fonction de forces du champ de la pesanteur (exemple 15.6)

$$U = mgy = P_2 l \cos\varphi$$

et en la dérivant par rapport à φ:

$$Q_\varphi=\frac{dU}{d\varphi}=-P_2 l\sin\varphi.$$

Formons les équations de Lagrange (18.11) pour le système considéré:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x=0,\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_\varphi.$$

A cet effet, calculons d'abord

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial T}{\partial\dot{x}}=\frac{P_1+P_2}{g}\dot{x}+\frac{P_2l}{g}\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=-\frac{P_2l}{g}\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi,\qquad \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{P_2l}{g}(l\dot{\varphi}+\dot{x}\cos\varphi).$$

Les équations du mouvement du pendule elliptique s'écriront donc sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{P_1+P_2}{g}\dot{x}+\frac{P_2l}{g}\dot{\varphi}\cos\varphi\right]=0, \tag{1}$$

$$\frac{P_2l^2}{g}\ddot{\varphi}+\frac{P_2l}{g}\ddot{x}\cos\varphi=-P_2l\sin\varphi. \tag{2}$$

De (1) se dégage une intégrale première (dite cyclique)

$$(P_1+P_2)\dot{x}+P_2l\dot{\varphi}\cos\varphi=c=\text{const.}$$

Supposons qu'à l'instant initial $t = 0$ le système est en repos et que l'élongation angulaire est φ_0. On a donc $\dot{x}(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$, $\varphi(0) = \varphi_0$. Portant ces valeurs dans l'intégrale première ci-dessus, on obtient $c = 0$, d'où

$$(P_1+P_2)\dot{x}+P_2l\dot{\varphi}\cos\varphi=0. \tag{1a}$$

Pour de faibles oscillations l'angle φ reste petit, si bien que $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx$ ≈ 1. Les équations (1a) et (2) deviennent alors

$$(P_1+P_2)\dot{x}=-P_2l\dot{\varphi},\qquad \ddot{\varphi}+\frac{1}{l}\ddot{x}+\frac{g}{l}\varphi=0.$$

La dérivation de la première équation nous donne

$$\frac{1}{l}\ddot{x}=-\frac{P_2}{P_1+P_2}\ddot{\varphi};$$

en portant cette expression dans la seconde équation, on obtient

$$\ddot{\varphi}+\frac{P_1+P_2}{P_1}\frac{g}{l}\varphi=0.$$

C'est l'équation différentielle des oscillations harmoniques (ch. XIV, nº 1.1) de pulsation

$$k=\sqrt{\frac{P_1+P_2}{P_1}\frac{g}{l}}$$

et de période

$$\tau=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{P_1}{P_1+P_2}\frac{l}{g}}.$$

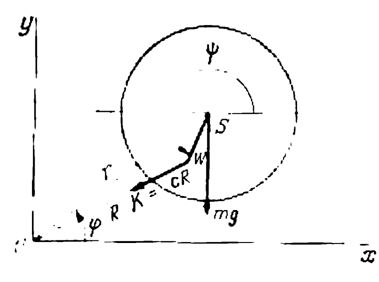


Fig. 22.11

E x e m p l e 22.5 (problème de A. S t o d o l a *)). Le système à déterminer représente une poulie pesante montée dans le centre d'un arbre flexible horizontal (fig. 22.11) (voir aussi l'exemple 20.3).

S o l u t i o n. Comme origine des coordonnées, nous adopterons le point en lequel l'axe non déformé de l'arbre est intercepté par le plan médian de la poulie. Le système proposé admettant trois degrés de liberté, nous choisirons comme coordonnées indépendantes les coordonnées polaires r, φ du centre de gravité S de la poulie et son angle de rotation (élongation angulaire) ψ. La poulie effectue un mouvement plan; son énergie cinétique T se définit par la formule (21.29),

$$T=\frac{1}{2}mv_S^2+\frac{1}{2}J_{Sz}\omega^2 \quad \left(\omega=\frac{d\psi}{dt}\right).$$

Utilisant la formule (11.3) de la vitesse du point en coordonnées polaires, nous obtenons

$$v_S^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2.$$

Posons

$$J_{Sz}=m\rho^2,$$

où m est la masse de la poulie et ρ le rayon de giration (ch. XXI, nº 1.1). L'énergie cinétique de la poulie s'écrira alors sous la forme

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\frac{1}{2}m\rho^2\dot{\psi}^2.$$

La poulie est sollicitée par son poids mg et par une force élastique K ($K = cR$, où $R = OW$) appliquée au point d'emmanchement W de la poulie. Le travail de la force élastique pendant la variation de R entre R_0 et R est égal à

$$A_{\acute{e}l}=\int_{R_0}^{R}cR\,dR=\frac{1}{2}cR^2-\frac{1}{2}cR_0^2.$$

---

*) A u r e l S t o d o l a, ingénieur suisse (1859-1942).

L'énergie potentielle V de la poulie est égale à la somme des travaux accumulés des forces en jeu:

$$V = A_{\acute{e}l} + mgy = \frac{1}{2} cR^2 - \frac{1}{2} cR_0^2 + mgr \sin \varphi .$$

Dans le triangle OWS on a

$$R^2 = r^2 + e^2 + 2er \cos(\psi - \varphi) \qquad (e = WS),$$

et la fonction de forces $U = -V$ s'écrit

$$U = -\frac{1}{2} c \left[r^2 + e^2 + 2er \cos(\psi - \varphi) \right] - mgr \sin \varphi + \frac{1}{2} cR_0^2 .$$

Les équations du mouvement de la poulie se présentent sous la forme des équations de Lagrange (18.11a):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\partial U}{\partial \psi}.$$

Calculons les quantités

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = m\rho^2\dot{\psi}, \quad \frac{\partial U}{\partial r} = -cr - ce\cos(\psi - \varphi) - mg \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -cer \sin(\psi - \varphi) - mgr \cos \varphi, \quad \frac{\partial U}{\partial \psi} = cer \sin(\psi - \varphi)$$

et mettons les équations de Lagrange sous la forme

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\omega_c^2 \left[r + e\cos(\psi - \varphi) \right] - g \sin \varphi,$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = -\omega_c^2 e \sin(\psi - \varphi) - g \cos \varphi,$$

$$\rho^2 \ddot{\psi} = \omega_c^2 er \sin(\psi - \varphi).$$

Ici

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

est la vitesse angulaire critique de la poulie (voir l'exemple 20.3). Les équations citées admettent comme solution

$$r = \frac{4}{3} e - \frac{2g}{\omega_c^2} \sin \frac{\omega_c t}{2}, \quad \varphi = \frac{1}{2} \omega_c t, \quad \psi = \pi + \frac{1}{2} \omega_c t,$$

ce que l'on vérifie par substitution directe. Soulignons qu'une telle solution particulière n'existe que pour $\dot{\psi} = \omega_c/2$, c'est-à-dire pour une seule vitesse angulaire de l'arbre, égale exactement à la moitié de la vitesse critique. La

trajectoire du centre de gravité S de la poulie est un limaçon de Pascal dont la forme est fonction de l'excentricité e et de la valeur critique de la vitesse angulaire ω_c. Sur la figure 22.12 la courbe est construite pour $\omega_c^2 = 3g/e$.

Exercices

E x e r c i c e 22.1. Le triangle rectangle ABD constitué de barres articulées en A, B, D tourne autour de l'axe vertical AD avec une vitesse angulaire constante ω (fig. 22.13). La barre AB de poids P et de longueur l fait un angle φ avec l'axe de rotation. Déterminer la réaction totale de l'articulation A et l'effort exercé sur la barre BD sans tenir compte du poids des barres AD et BD.

I n d i c a t i o n. Pour déterminer l'effort T, sectionner le triangle en B et analyser le mouvement de la barre BD. Pour calculer les forces d'inertie,

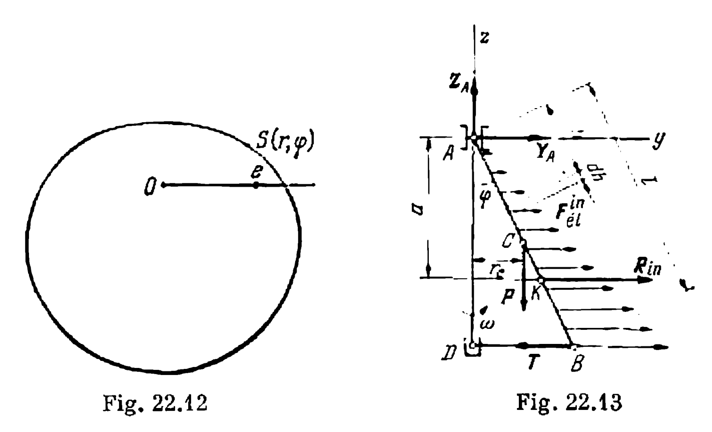


Fig. 22.12 Fig. 22.13

isoler un élément de la barre de longueur dh situé à la distance h du point A. Le système des forces d'inertie $F_{\text{él}}^{\text{in}}$ des éléments de la barre est un système plan de forces parallèles. Le point d'application K de la résultante de ce système (centre des forces parallèles) est situé sur la même droite horizontale que le centre de gravité de l'aire du triangle correspondant, si bien qu'on a $a = {}^2/_3 l \cos\varphi$. Le module de la résultante des forces d'inertie R_{in} se définit à l'aide de la formule (22.7), $R_{\text{in}} = \frac{P}{g}\frac{l}{2}\omega^2 \sin\varphi$.

Ecrire trois équations de cinétostatique (ch. XX, n° 1.2).

R é p o n s e. $Y_A = -\frac{1}{2}P\left(\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{3g}l\omega^2 \sin\varphi\right)$, $Z_A = P$, $T = \left(\frac{1}{3}\frac{l\omega^2}{g}\sin\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\right)P$.

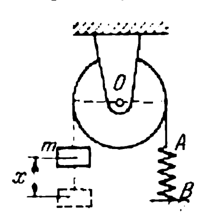


Fig. 22.14

E x e r c i c e 22.2. Un fil inextensible est passé autour d'une poulie mobile en rotation sur son axe horizontal O. Une extrémité du fil porte un fardeau de masse m ; l'autre extrémité du fil est attachée à un ressort vertical AB de raideur c dont le bout B est fixé (fig. 22.14). Déterminer la période d'oscillation du fardeau, étant donné que la masse M de la poulie est répartie suivant la jante et que le fil ne peut pas glisser sur la poulie. La masse du ressort est négligeable.

I n d i c a t i o n. Le système admettant un seul degré de liberté, on peut adopter comme coordonnée généralisée l'écart x du fardeau par rapport à sa position d'équilibre. L'énergie cinétique du système est $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} J\omega^2$, où $J = MR^2$ est le moment d'inertie de la poulie par rapport à l'axe O et $\omega = \dot{x}/R$ est la vitesse angulaire de rotation de la poulie. La fonction de forces est $U = -\frac{1}{2} c (\lambda + x)^2 + mgx$, où $\lambda = mg/c$ est l'allongement statique du ressort.

R é p o n s e. $T = 2\pi \sqrt{\frac{M+m}{c}}$.

CHAPITRE XXIII

ÉLÉMENTS DE THÉORIE DU CHOC ET DE DYNAMIQUE DU POINT DE MASSE VARIABLE

Le présent chapitre est consacré à deux sujets différents, qui ont ceci en commun que le corps considéré cesse d'être parfaitement rigide. En effet, nous analyserons dans la théorie du choc (§ 1) le choc des corps mous, et dans le paragraphe 2, le mouvement d'un corps de masse variable.

§ 1. Eléments de théorie du choc

1.1. Le phénomène de choc. Supposons qu'un point matériel M de masse m se déplace par rapport au repère inertiel $Oxyz$ sous l'action de la résultante $\boldsymbol{F}$ des forces appliquées (tant actives que passives, c'est-à-dire réactions de liaison). Conformément au théorème de la variation de la quantité de mouvement du point (formule (15.2)), on a pour un intervalle de temps $(t,\ t+\tau)$

$$m\boldsymbol{v}_1 - m\boldsymbol{v} = \int_{t}^{t+\tau} \boldsymbol{F}\, dt. \qquad (23.1)$$

La variation de la quantité de mouvement du point matériel est égale au vecteur impulsion de la résultante des forces appliquées. Supposons que la durée τ de l'intervalle de temps $(t,\ t+\tau)$ soit une quantité infiniment petite : dans tous les cas envisagés jusqu'à présent la variation de la quantité de mouvement était pour cette raison infiniment petite elle aussi (c'est-à-dire était continûment variable dans le temps).

Or, il arrive que l'impulsion de la force, et par suite la quantité de mouvement et la vitesse du point matériel ou du solide, passent d'une valeur finie à une autre pendant un temps extrêmement court (c'est-à-dire varient d'un bond dans le temps). C'est précisément ce qui se produit pendant le choc.

On entend par *choc* une interaction de deux corps qui, tout en étant confinée dans un intervalle de temps infiniment court, conduit toutefois à une variation finie de la vitesse des corps. La durée du

choc τ se mesure en millièmes de seconde et moins. Puisque les vitesses des points du corps changent en un temps très court, les accélérations des points pendant le choc atteignent des valeurs très élevées. Pour cette raison, les forces de choc engendrant les accélérations sont extrêmement élevées elles aussi. Elles se prêtent mal à la mesure par la méthode statique (le dynamomètre) ou dynamique (mesure des accélérations). Il est beaucoup plus facile de mesurer la force de choc $\boldsymbol{F}_{\text{ch}}$ par son vecteur impulsion

$$S = \int_{t}^{t+\tau} \boldsymbol{F}_{\text{ch}}\, dt \qquad (23.2)$$

que l'on appelle *vecteur percussion*, ou *percussion* tout court.

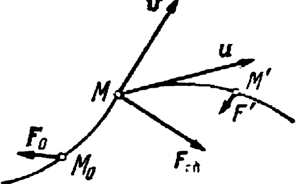


Fig. 23.1

Supposons que le point M de masse m se déplace suivant la courbe M_0M sous l'action d'une force $\boldsymbol{F}$ ordinaire (fig. 23.1). A l'instant t où le point possédait une vitesse $\boldsymbol{v}$ et se trouvait au point M de sa trajectoire, il s'est produit un choc. Sous l'action de la force de choc appliquée $\boldsymbol{F}_{\text{ch}}$, la vitesse du point a instantanément changé, tant en module qu'en direction. Abstraction faite des impulsions des forces autres que $\boldsymbol{F}_{\text{ch}}$ intervenant pendant le choc, on a en vertu de (23.1)

$$m\boldsymbol{u} - m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S}, \qquad (23.3)$$

où $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}(t + \tau)$ est la vitesse du point après le choc. La différence des vecteurs $m\boldsymbol{u} - m\boldsymbol{v}$ s'appelle *quantité de mouvement acquise*.

La relation (23.3), qui exprime l'action de la force de choc sur le point matériel, s'énonce comme suit: *la quantité de mouvement acquise par le point matériel pendant le choc est égale au vecteur percussion.*

Cette relation est fondamentale en théorie du choc. Connaissant la masse du point, sa vitesse au début du choc et la percussion, on peut calculer la vitesse du point après le choc

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \frac{1}{m}\boldsymbol{S}. \qquad (23.3a)$$

Projetons la relation (23.3) sur l'axe fixe Ox. Il vient

$$mu_x - mv_x = S_x, \qquad (23.4)$$

où S_x est la projection du vecteur percussion sur l'axe Ox. On aboutit à des formules analogues en faisant la projection sur les axes Oy, Oz du repère fixe (ou inertiel).

La durée du choc étant négligeable, les déplacements des points du corps pendant le choc sont négligeables eux aussi; on admet

donc que les coordonnées des points du corps restent inchangées pendant le choc.

Nous aboutissons à deux conclusions pratiques: 1° les actions des forces ordinaires (telles que le poids) pendant le choc sont négligeables;

2° les déplacements des points du corps pendant le choc sont également négligeables.

Dans l'étude du choc, la nature physique des corps joue un rôle essentiel. On distingue deux phases du choc. En première phase les corps se déforment (se compriment) jusqu'à ce que la vitesse de leur rapprochement s'annule. L'énergie cinétique du mouvement relatif des corps se transforme pendant cette phase en énergie potentielle

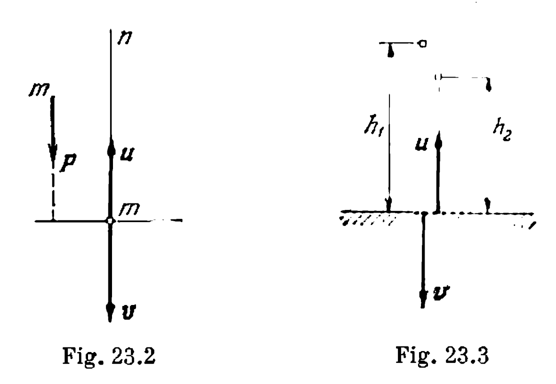


Fig. 23.2 Fig. 23.3

de déformation, énergie thermique, énergie des vibrations sonores, etc. En deuxième phase les corps reprennent leur forme initiale grâce à leur élasticité. L'énergie potentielle de déformation se transforme alors de nouveau en énergie cinétique, et après la deuxième phase le contact des corps prend fin.

Si les deux corps sont parfaitement mous, ou inélastiques, le choc se termine en première phase. Si les deux corps sont parfaitement élastiques, leur énergie cinétique totale à la fin du choc est la même qu'au début du choc.

1.2. Choc direct central d'un corps sur une surface fixe. Considérons le choc d'un corps, par exemple d'une boule (pour plus de facilité), contre une surface fixe. Supposons que le vecteur vitesse v de son centre de masse coïncide au début du choc avec la normale à la surface au point de contact (fig. 23.2); un tel choc est appelé *direct*. Supposant que la boule se déplace en translation avant et après le choc, nous l'assimilons à un point matériel.

Après le choc, la boule acquiert une vitesse u dirigée suivant la normale dans le sens opposé. L'expérience montre que le module du vecteur vitesse à la fin du choc est proportionnel à celui du vecteur

vitesse au début du choc:

$$u = kv. \tag{23.5}$$

Le facteur de proportionnalité k s'appelle *coefficient de restitution.* Il est entièrement défini par le matériau de la boule et de la surface fixe. La valeur de k caractérise la nature de la collision des deux corps qui se rencontrent. Trois cas sont à distinguer:

1° $k = 0$, si bien que la vitesse après le choc est $u = 0$. Le choc est terminé en première phase: la boule ne reprend pas sa forme primitive. C'est le *choc des corps parfaitement mous*;

2° $k = 1$, et la vitesse à la fin du choc est égale en module à la vitesse au début du choc, $u = v$. C'est le *choc des corps parfaitement élastiques*, la boule reprend complètement sa forme primitive;

3° $0 < k < 1$, donc $u < v$: le module de la vitesse après le choc est plus petit qu'au début du choc. C'est le *choc des corps imparfaitement élastiques*: la boule ne reprend sa forme qu'incomplètement.

1.3. Détermination expérimentale du coefficient de restitution. On place une bille à une hauteur h_1 par rapport au plan fixe horizontal et on la laisse tomber librement (fig. 23.3). Tombant sur le plan, la bille rebondit à une hauteur h_2. Conformément à la loi de la chute libre, abstraction faite de la résistance de l'air, les modules respectifs des vitesses de la bille au début du choc (v) et à la fin du choc (u) sont

$$v = \sqrt{2gh_1}, \quad u = \sqrt{2gh_2}.$$

On a alors en vertu de (23.5)

$$k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \tag{23.6}$$

Citons quelques valeurs du coefficient de restitution pour différents matériaux:

Bois sur gutta-percha	0,26
Bois sur bois	0,50
Acier sur acier	0,56
Ivoire sur ivoire	0,89
Verre sur verre	0,94

Exemple 23.1. Une boule de masse $m = 0{,}4$ kg tombe sur un plan horizontal d'une hauteur $h_1 = 2$ m et rebondit à $h_2 = 1{,}28$ m. On demande de savoir le coefficient de restitution et le vecteur percussion (fig. 23.4).

Solution. Calculons le coefficient de restitution par la formule (23.6):

$$k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{\frac{1{,}28}{2}} = 0{,}8.$$

Il s'agit donc d'un choc de corps imparfaitement élastiques. Pour calculer le vecteur percussion, nous utiliserons la formule (23.3). Traçons l'axe Ox ainsi qu'il est montré sur la figure 23.4 et construisons les vecteurs $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{S}$. Proje-

tons la relation (23.3) sur l'axe Ox:

$$mu - (-mv) = S, \quad \text{ou} \quad S = m(u + v).$$

Or, $u = kv$, si bien que

$$S = m(1 + k)v.$$

La vitesse de la boule au début du choc est définie par la loi de la chute libre (formule de Galilée):

$$v = \sqrt{2gh_1},$$

ce qui donne finalement

$$S = (1 + k)\, m \sqrt{2gh_1}.$$

Substituant les valeurs numériques, nous trouvons le module du vecteur percussion:

$$S = (1 + 0{,}8) \cdot 4 \sqrt{39{,}2} = 4{,}5 \text{ N} \cdot \text{s}.$$

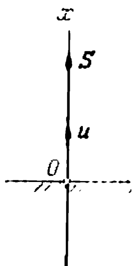


Fig. 23.4

1.4. Choc direct central de deux corps. Le choc de deux corps est appelé *direct central* si le point de contact des corps est situé sur la droite joignant leurs centres de masse et les vitesses des centres de masse sont dirigées suivant cette droite.

Plaçons-nous dans le cas général, c'est-à-dire le cas où les deux corps sont imparfaitement élastiques; les chocs des corps parfaitement mous et parfaitement élastiques sont des cas particuliers qui se laissent déduire du cas général. Adoptons la droite des centres comme axe Cx; toutes les formules seront écrites en termes de projections sur l'axe Cx, c'est-à-dire en utilisant les valeurs algébriques des vitesses et des percussions (fig. 23.5).

Soit au début du choc $v_1 > v_2$. Il vient en vertu de (23.3)

$$m_1 (u_1 - v_1) = S, \qquad m_2 (u_2 - v_2) = -S, \tag{23.7}$$

où v_1, v_2 et u_1, u_2 sont les vitesses absolues des corps entrechoqués respectivement au début et à la fin du choc; S est le vecteur percussion appliqué au premier corps de la part du deuxième. Quant au vecteur percussion appliqué au deuxième corps de la part du premier, il est égal à $-S$ en vertu de la troisième loi de Newton.

La vitesse relative des corps est égale à $v_1 - v_2$ au début et à $u_1 - u_2$ à la fin du choc. La formule (23.5) écrite pour les valeurs algébriques des vitesses devient

$$u_1 - u_2 = -k(v_1 - v_2). \tag{23.8}$$

On obtient en faisant l'addition des équations (23.7)

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2. \tag{23.9}$$

Dans le système constitué par deux corps entrechoqués, les chocs réciproques des corps sont intérieurs, si bien que la loi de conservation des quantités de mouvement du système a lieu. C'est ce qui est

exprimé par l'équation (23.9): *la somme des quantités de mouvement des deux corps reste inchangée avant et après le choc.*

Explicitant u_1 et u_2 dans les équations algébriques (23.8) et (23.9), on obtient les valeurs algébriques des vitesses absolues (c'est-à-dire les valeurs affectées de signes correspondants) des corps à la fin du choc:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}(1+k)\,(v_1-v_2), \\ u_2 &= v_2 + \frac{m_1}{m_1+m_2}(1+k)\,(v_1-v_2). \end{aligned} \qquad (23.10)$$

E x e m p l e 23.2. Deux boules se rapprochent avec des vitesses égales en module. Après le choc, une des boules reste sur place. Supposant que le choc est direct central et que les boules sont parfaitement élastiques, déterminer le rapport des masses des boules et la vitesse de l'autre boule après le choc (fig. 23.6).

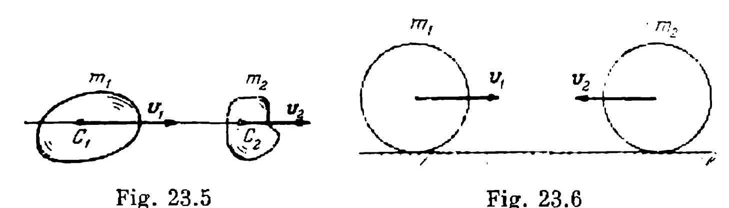


Fig. 23.5 Fig. 23.6

S o l u t i o n. Soient $v_1 > 0$ et $v_2 = -v_1$ les vitesses des boules avant le choc, et $u_1 = 0$ et u_2, après le choc. Pour $k = 1$ les formules (23.10) nous donnent

$$0 = v_1 - 2\frac{m_2}{m_1+m_2}[v_1-(-v_1)], \quad u_2 = -v_1 + 2\frac{m_1}{m_1+m_2}[v_1-(-v_1)].$$

De la première formule

$$m_1+m_2 = 4m_2, \quad \frac{m_1}{m_2} = 3,$$

ce qui signifie que la boule restée sur place à une masse trois fois plus grande que l'autre. De la deuxième formule

$$u_2 = -v_1 + 4\frac{m_1/m_2}{(m_1/m_2)+1}v_1 = -v_1 + 4\frac{3}{3+1}v_1 = 2v_1.$$

Cela veut dire que la vitesse de la deuxième boule a changé de sens et que sa grandeur a doublé. Il est facile de voir que les équations (23.8) et (23.9) sont vérifiées. Cela est tout naturel, car nous nous sommes basés sur les formules (23.10) qui sont les solutions de (23.8) et (23.9).

1.5. Théorème de Carnot *). En étudiant le choc, on ne calcule pas l'accroissement mais la perte de l'énergie cinétique, c'est-à-dire qu'on retranche de la valeur initiale de l'énergie cinétique T_0 des

*) L a z a r e C a r n o t, mathématicien et mécanicien français (1753-1823).

deux corps sa valeur à la fin du choc T:

$$T_0-T=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2-\left(\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2\right).$$

Substituant à u_1, u_2 leurs expressions (23.10) et faisant quelques opérations algébriques fort simples (élever la différence au carré et réduire les termes semblables), nous obtenons la formule suivante:

$$T_0-T=\frac{1}{2}(1-k^2)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)^2. \qquad (23.11)$$

Cette formule définit l'*énergie cinétique perdue* pendant le choc central direct de deux corps de nature quelconque.

Cas particuliers:

1° Si un des corps était fixe avant le choc, par exemple si $v_2=0$, on a d'après la formule (23.11)

$$T_0-T=(1-k^2)\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{m_1v_1^2}{2}=(1-k^2)\frac{m_2}{m_1+m_2}T_0. \qquad (23.12)$$

2° Si les corps sont parfaitement élastiques ($k=1$), il ressort de (23.11) que $T_0-T=0$, donc $T=T_0$. Pendant le choc de deux corps absolument élastiques leur énergie cinétique n'est pas perdue.

Théorème de Carnot. *Pendant le choc direct central de deux corps parfaitement mous l'énergie cinétique perdue est égale à l'énergie cinétique qui correspond aux vitesses perdues*:

$$T_0-T=\frac{1}{2}m_1(v_1-u)^2+\frac{1}{2}m_2(v_2-u)^2.$$

Démonstration. Pour $k=0$ on a en vertu de (23.8) $u_1=u_2=u$; l'équation (23.9) donne alors

$$(m_1+m_2)u=m_1v_1+m_2v_2, \quad \text{ou} \quad u_1=u_2=u=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}. \qquad (23.13)$$

La même formule définissant la vitesse de deux corps parfaitement mous à la fin du choc peut être obtenue à partir de (23.10). Transformons l'expression de l'énergie cinétique perdue pendant le choc des corps:

$$\begin{aligned}T_0-T&=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2-\frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2-\\&=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2-(m_1+m_2)u\cdot u+\frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2=\\&=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2-(m_1v_1+m_2v_2)u+\frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2=\\&=\frac{1}{2}m_1(v_1-u)^2+\frac{1}{2}m_2(v_2-u)^2.\end{aligned}$$

Pour cette transformation, nous avons utilisé l'égalité $(m_1+m_2)u=$ $=m_1v_1+m_2v_2$ (voir (23.13)). Le théorème est démontré.

E x e m p l e 23.3. Déterminer le rendement η_M du marteau de masse m_1 frappant sur l'enclume de masse m_2.

S o l u t i o n. Dans le cas considéré, l'énergie utile est l'énergie cinétique $T_0 - T$ perdue, dépensée pour la déformation de la pièce de métal. L'énergie dépensée totale est l'énergie cinétique T_0 au début du choc. Conformément à la formule (23.12) (l'enclume est fixe!), nous obtenons

$$\eta_M = \frac{T_0 - T}{T_0} = (1-k^2)\frac{m_2}{m_1+m_2} = \frac{1-k^2}{1+(m_1/m_2)}. \qquad (23.14)$$

Le rendement du marteau est d'autant plus élevé que la masse du marteau m_1 est plus faible devant la masse de l'enclume m_2. Quant à l'énergie cinétique T qui persiste après le choc, elle est dépensée ensuite pour le mouvement ultérieur du marteau et de l'enclume, c'est-à-dire pour l'ébranlement de la fondation; c'est une perte inutile.

Soit par exemple $m_1 = 0{,}05 m_2$. Trouvons dans le tableau du nº 1.3 la valeur de $k = 0{,}56$ et calculons

$$\eta_M = \frac{1-0{,}56^2}{1+0{,}05} = 0{,}65.$$

E x e m p l e 23.4. Déterminer le rendement de la sonnette qui enfonce un pieu de masse m_2. La masse du pilon de choc est m_1.

S o l u t i o n. Dans le cas considéré, l'énergie utile est l'énergie cinétique T qui persiste après le choc et qui est dépensée pour le mouvement du pilon et du pieu. L'énergie dépensée totale est l'énergie cinétique au début du choc T_0. De la formule (23.12)

$$T = T_0 - (1-k^2)\frac{m_2}{m_1+m_2}T_0 = \frac{m_1+m_2k^2}{m_1+m_2}T_0.$$

Le rendement de la sonnette η_S est

$$\eta_S = \frac{T}{T_0} = \frac{m_1+m_2k^2}{m_1+m_2} = 1 - \frac{m_2(1-k^2)}{m_1+m_2} = 1 - \frac{1-k^2}{1+(m_1/m_2)}. \qquad (23.15)$$

Puisque l'énergie cinétique perdue $T_0 - T$ est essentiellement dépensée pour la déformation du pieu, il y a intérêt à la diminuer autant que possible. Il ressort de la formule (23.15) que le rendement de la sonnette est d'autant plus élevé que le poids du pilon est plus fort par rapport au poids du pieu.

Soit par exemple $m_1 = 0{,}05\, m_2$; le pilon de choc et le pieu sont en acier. Tirant du tableau du nº 1.3 la valeur de $k = 0{,}56$, nous calculons

$$\eta_S = 1 - \frac{1-0{,}56^2}{1+0{,}05} = 0{,}35.$$

Comparant ce résultat à celui de l'exemple 23.3, nous remarquons qu'on a ici pour les mêmes matériaux et les mêmes rapports des masses:

$$\eta_S = 1 - \eta_M.$$

1.6. Choc sur un corps solide mobile en rotation autour d'un axe fixe. Soit un corps solide qui est fixe à l'instant initial ($t = 0$) et qui peut tourner autour d'un axe fixé dans une crapaudine O et un palier O' ($OO' = h$). Choisissons un système de coordonnées fixe $Oxyz$ de telle façon que le centre de masse G du corps soit contenu à l'instant initial dans le plan Oxz et possède les coordonnées $G(\xi, 0, \zeta)$. Supposons qu'un vecteur percussion $S\,\{0,\ S,\ 0\}$ soit appliqué à un point $P\,(a, 0, c)$ de ce plan dans la direction de l'axe Oy (fig. 23.7) et que le poids du corps soit négligeable.

La position du corps pendant la durée du choc τ reste inchangée, mais il acquiert une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}\ \{0,\ 0,\ \omega\}$ telle que les projections de la vitesse v_ν de son élément de masse m_ν de coordonnées x_ν, y_ν, z_ν sur les axes du système $Oxyz$ se définissent par les formules (9.14):

$$v_x^\nu = -\omega y_\nu,\ v_y^\nu = \omega x_\nu,\ v_z^\nu = 0. \qquad (23.16)$$

Supprimant les liaisons imposées au corps en O, O' et remplaçant leurs actions pendant le choc par les percussions de réaction $\boldsymbol{R}\{R_x,\ R_y,\ R_z\}$ et $\boldsymbol{R}'\{R'_x,\ R'_y,\ 0\}$ (fig. 23.7), nous retrouvons un corps libre qui nous permet d'appliquer les théorèmes généraux de la dynamique du système. Le théorème de la variation de la quantité de mouvement du solide pendant le choc (voir (19.8)) nous donne

$$\sum m_\nu v_x^\nu = R_x + R'_x,\quad \sum m_\nu v_y^\nu = S + R_y + R'_y,\quad \sum m_\nu v_z^\nu = R_z. \qquad (23.17)$$

Faisant intervenir les formules des coordonnées du centre de masse du solide (23.16) et (19.2), nous mettons les premiers membres des équations (23.17) sous la forme

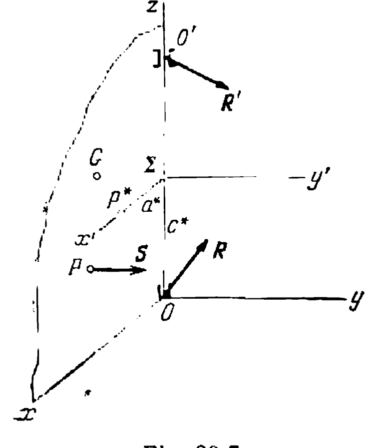


Fig. 23.7

$$\sum m_\nu v_x^\nu = -\omega \sum m_\nu y_\nu = 0,$$
$$\sum m_\nu v_y^\nu = \omega \sum m_\nu x_\nu = \omega M \xi,$$
$$\sum m_\nu v_z^\nu = 0,$$

où M est la masse du corps. Les équations (23.17) deviennent donc

$$R_x + R'_x = 0,\quad R_y + R'_y - \omega M \xi = -S,\quad R_z = 0. \qquad (23.18)$$

Prenons maintenant le théorème de la variation du moment cinétique du solide pendant le choc. En vertu des formules (19.15) et (23.16), le corps présente par rapport au centre O un moment cinétique égal à

$$K_O = \sum [\boldsymbol{r}_\nu,\ m_\nu \boldsymbol{v}_\nu] = \sum \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_\nu & y_\nu & z_\nu \\ -\omega m_\nu y_\nu & \omega m_\nu x_\nu & 0 \end{vmatrix}.$$

A l'instant $t = \tau$, le corps présente donc par rapport aux axes Ox, Oy, Oz les moments cinétiques

$$\begin{aligned} K_{Ox} &= -\sum \omega m_\nu z_\nu x_\nu = -J_{zx}\omega, \\ K_{Oy} &= -\omega \sum m_\nu y_\nu z_\nu = -J_{yz}\omega, \\ K_{Oz} &= J_{Oz}\omega. \end{aligned} \qquad (23.19)$$

Dans ces expressions nous avons introduit les produits d'inertie du corps (voir (22.1)) et utilisé la formule (21.13). Multiplions les identités (19.22) par dt et intégrons-les par rapport à t entre 0 et τ. Il vient

$$K_{Ox}=\int_0^\tau M_{Ox}^{(e)}\,dt,\quad K_{Oy}=\int_0^\tau M_{Oy}^{(e)}\,dt,\quad K_{Oz}=\int_0^\tau M_{Oz}^{(e)}\,dt, \quad (23.20)$$

car le moment cinétique du corps avant le choc est égal à zéro. Abstraction faite des impulsions des moments apportés par les autres forces pendant la durée du choc τ, nous obtenons pour les seconds membres de (23.20) les expressions suivantes:

$$\int_0^\tau M_{Ox}^{(e)}\,dt=-Sc-hR'_y,\quad \int_0^\tau M_{Oy}^{(e)}\,dt=hR'_x,\quad \int_0^\tau M_{Oz}^{(e)}\,dt=Sa.$$

Les équations (23.20) s'écriront donc, compte tenu de (23.19), sous la forme

$$J_{zx}\omega-hR'_y=Sc,\quad J_{yz}\omega+hR'_x=0,\quad J_{Oz}\omega=Sa. \quad (23.21)$$

Les équations (23.18), (23.21) forment ensemble un système algébrique de six équations linéaires pour cinq projections des percussions de réaction R_x, R_y, R_z, R'_x, R'_y et la vitesse angulaire ω du corps après le choc. Sa résolution n'offre aucune difficulté. Nous allons envisager ce système sous un aspect important pour les applications.

1.7. Centre de percussion. Si le vecteur percussion appliqué en P de la façon montrée sur la figure 23.7 n'exerce aucune influence sur la crapaudine et le palier, le point P^* (a^*, 0, c^*) s'appelle *centre de percussion*. On a alors non seulement $R_z=0$, ce qui ressort de la troisième équation (23.18), mais aussi

$$R_x=R_y=R'_x=R'_y=0,$$

et les quatre autres équations (23.18), (23.21) deviennent

$$\omega M\xi=S,\quad J_{zx}=Sc^*,\quad J_{yz}\omega=0,\quad J_{Oz}\omega=Sa^*. \quad (23.22)$$

Divisons la quatrième et la deuxième équation par la première. Il vient

$$a^*=\frac{J_{Oz}}{M\xi},\quad c^*=\frac{J_{zx}}{M\xi}. \quad (23.23)$$

Ces formules définissent l'abscisse et la cote du centre de percussion P^* (son ordonnée est nulle en l'occurrence). La deuxième formule (23.23) peut être interprétée comme suit. Plaçons l'origine des coordonnées en un point Σ (0, 0, c^*) de l'axe Oz. Comme $z'_\nu=z_\nu-c^*$, les produits d'inertie $J_{zx'}$ et $J_{y'z}$ s'écriront conformément à

(19.2):

$$J_{zx'}=\sum m_\nu x_\nu (z_\nu - c^*) = J_{zx} - M\xi c^* = 0,$$
$$J_{y'z}=\sum m_\nu y_\nu (z_\nu - c^*) = J_{yz}.$$

Nous voyons ensuite que, puisque $J_{yz} = 0$ conformément à la troisième équation (23.22), l'axe Oz est axe principal d'inertie par rapport au point Σ (voir la définition dans le ch. XXII, nº 1.2). Nous obtenons donc la

Règle de construction du centre de percussion P^*. *Trouver sur l'axe de rotation le point Σ par rapport auquel l'axe en question est axe principal d'inertie, élever en Σ la perpendiculaire à l'axe de rotation, contenue dans le plan défini par l'axe et le centre de masse, et construire sur cette perpendiculaire le point P^* à la distance a^* de l'axe de rotation.*

Exemple 23.5. Trouver le centre de percussion d'une plaque carrée homogène mobile en rotation autour de l'un de ses côtés si le vecteur percussion est perpendiculaire au plan de la plaque (fig. 23.8).

Solution. Par rapport au milieu Σ du côté en question, l'axe de rotation est axe principal d'inertie, car on a de toute évidence $J_{y'z} = J_{zx'} = 0$. Calculons a^* d'après la première formule (23.23). Désignons la longueur du côté du carré par b et la densité surfacique de la plaque par $\varkappa$. Le moment d'inertie de la plaque par rapport à son axe de rotation est défini par la formule (21.5):

$$J_{Oz} = \frac{1}{3} Mb^2,$$

où $M = b^2\varkappa$ est la masse de la plaque. L'abscisse du centre de masse est évidemment égale à $\xi = b/2$. Il vient en vertu de (23.23)

$$a^* = \frac{Mb^2 \cdot 2}{3Mb} = \frac{2}{3} b.$$

Le centre de percussion P^* se construit selon la règle énoncée ci-dessus.

§ 2. Eléments de dynamique du point de masse variable

Konstantin Tsiolkovski (1857-1935), génial savant et inventeur russe, fut un des premiers créateurs d'un projet de véhicule spatial. Les premières notes de Tsiolkovski remontent à 1883. Plus tard, vers 1903, il donna à son idée d'appliquer les fusées pour le voyage dans l'espace une forme mathématique rigoureuse. La thèse de licence de I. Mechtcherski *Dynamique d'un point de masse variable* (1897) et le traité de K. Tsiolkovski *Exploration de l'espace avec des appareils à réaction* (1903) exposent les bases de la dynamique d'une fusée en mouvement de translation (dynamique d'un point de masse variable).

2.1. Equation de Mechtcherski. Soit un système matériel mobile par rapport à un repère inertiel $Oxyz$ et confiné dans une surface de

référence S, par exemple dans la coque et la section de sortie des buses (fig. 23.9). La masse contenue à l'intérieur de S varie suivant une loi déterminée, c'est-à-dire que $m = m(t)$ est une fonction connue du temps. Désignons par $\boldsymbol{F}$ la résultante générale des forces actives extérieures $\boldsymbol{F}_{\nu}^{(e)}$ exercées sur le système:

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_{\nu}^{(e)}.$$

Admettant que le système de points enfermé à l'instant t_0 à l'intérieur de S possède une masse $M = m(t_0) = \text{const}$, proposons-nous de surveiller ce système de points (dont une fraction quittera par la suite la surface de référence). Supposons que les liaisons imposées au système permettent son déplacement en translation en direction

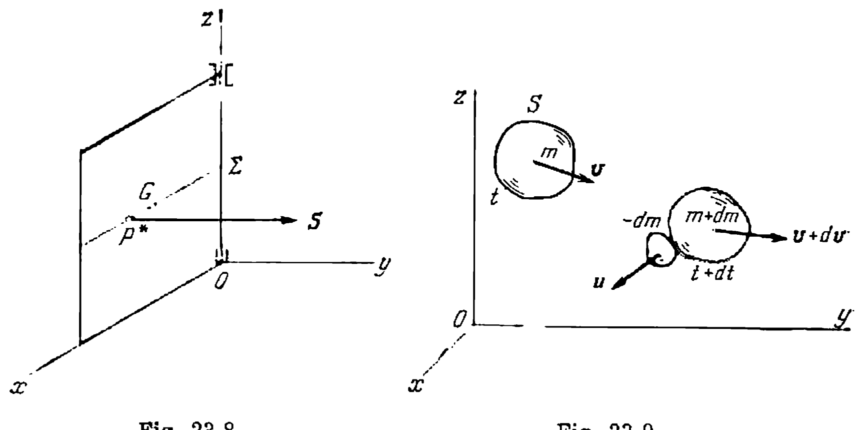


Fig. 23.8 Fig. 23.9

quelconque. Nous pouvons appliquer alors le théorème de la variation de la quantité de mouvement totale du système sous la forme (19.13):

$$d\left(M\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}\right) = \boldsymbol{F}\,dt,$$

ou

$$\left(M\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}\right)_{t_0+dt} - \left(M\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}\right)_{t_0} = \boldsymbol{F}\,dt. \qquad (23.24)$$

Désignons par $\boldsymbol{v}$ la vitesse absolue du centre de masse des particules contenues dans S à l'instant t_0:

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}\right)_{t=t_0}.$$

Par $\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$, nous désignerons la vitesse absolue du centre de masse des particules qui restent dans S vers l'instant $t + dt$. Enfin, désignons par $\boldsymbol{u}$ la vitesse absolue des particules restées en dehors de

S, de masse totale $(-dm)$ $(dm < 0)$. On a alors par définition

$$\left(M\frac{dr_C}{dt}\right)_{t=t_0}=m(t_0)\,v\,;\quad M\left(\frac{dr_C}{dt}\right)_{t=t_0+dt}=[m(t_0)+dm](v+dv)+$$
$$+(-dm)\,u=m(t_0)\,v+m(t_0)\,dv+dm\cdot v+dm\cdot dv-dm\cdot u\,.$$

Portons ces expressions dans (23.24) et divisons par dt:

$$m(t_0)\frac{dv}{dt}-(u-v)\frac{dm}{dt}+\frac{dm}{dt}dv=F.$$

Passant à la limite, nous obtenons l'*équation de Mechtcherski définissant le mouvement du point de masse variable*:

$$m\frac{dv}{dt}=F+\frac{dm}{dt}(u-v). \qquad (23.25)$$

Ici m est la masse variable du point (du corps en translation); v sa vitesse absolue; u la vitesse absolue des particules éjectées; F la résultante des forces extérieures exercées sur le point. Remarquant que $u-v=v_r$ est la vitesse relative (par rapport au point mobile) des particules éjectées, on peut mettre l'équation de Mechtcherski sous la forme

$$m\frac{dv}{dt}=F+\frac{dm}{dt}v_r. \qquad (23.25a)$$

La quantité vectorielle

$$\frac{dm}{dt}v_r$$

porte le nom de *force de réaction* ou *poussée* R.

Si la vitesse relative v_r des particules éjectées est nulle, la poussée R s'annule, et l'équation du mouvement du point de masse variable (23.25a) se confond avec l'équation ordinaire du mouvement du point de masse constante fournie par la deuxième loi de Newton.

Si la vitesse absolue u des particules éjectées est nulle, l'équation de Mechtcherski (23.25) devient

$$m\frac{dv}{dt}=F-\frac{dm}{dt}v,\quad \text{ou}\quad \frac{d}{dt}(mv)=F,$$

expression qui se confond avec celle de la deuxième loi de Newton.

2.2. Premier problème de Tsiolkovski. La fusée monte verticalement en éjectant une veine gazeuse continue. Déterminer la vitesse v de la fusée si la vitesse relative v_r des gaz éjectés est constante en module et dirigée en sens contraire du mouvement de la fusée. La résistance de l'air et la pesanteur sont à négliger.

S o l u t i o n. Assimilant la fusée à un point de masse variable, écrivons l'équation de Mechtcherski (23.25a) pour le cas considéré $(F=0)$:

$$m\frac{dv}{dt}=-v_r\frac{dm}{dt}.$$

Séparons les variables:

$$dv = -v_r \frac{dm}{m}.$$

En faisant l'intégration

$$\int_{v_0}^{v} dv = -v_r \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m},$$

nous trouvons

$$v - v_0 = -v_r (\ln m - \ln m_0),$$

où v_0 et m_0 sont respectivement la vitesse initiale et la masse initiale (à l'instant initial d'écoulement des gaz) de la fusée. Sous ces hypothèses, la vitesse de la fusée est donc égale à

$$v = v_0 + v_r \ln \frac{m_0}{m}. \tag{23.26}$$

C'est la *formule de Tsiolkovski*.

La formule de Tsiolkovski convient pour une évaluation approchée de la vitesse de la fusée quand la force résistante et la pesanteur sont faibles devant la poussée.

E x e m p l e 23.6. Quel doit être le rapport de la masse initiale de la fusée à sa masse en fin de combustion pour atteindre la première vitesse cosmique (voir l'exemple 20.2) si la vitesse relative des particules éjectées est constante et égale à 3000 m/s ?

S o l u t i o n. D'après la formule de Tsiolkovski (23.26)

$$7910 = 3000 \ln \frac{m_0}{m}.$$

D'où

$$\ln \frac{m_0}{m} = \frac{7910}{3000} = 2{,}64, \qquad \frac{m_0}{m} = e^{2{,}64} = 14{,}0.$$

Le poids de la fusée au départ doit être un peu plus de 14 fois celui du dernier étage.

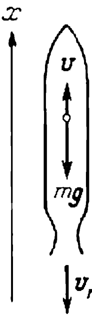


Fig. 23.10

2.3. Deuxième problème de Tsiolkovski. L'ascension verticale rectiligne de la fusée est analysée en tenant compte de la pesanteur (fig. 23.10). Les autres conditions sont les mêmes que dans le premier problème.

S o l u t i o n. Supposons que la longueur de la phase propulsive de la trajectoire soit petite devant le rayon de la Terre, et admettons que l'accélération de la pesanteur soit constante et la même qu'à la surface de la Terre. L'équation de Mechtcherski (23.25a) s'écrira sous la forme

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \frac{dm}{dt} v_r,$$

d'où

$$dv = -g\,dt - v_r \frac{dm(t)}{m(t)}.$$

Après l'intégration

$$\int_{v_0}^{v} dv = -\int_0^t \left[g + v_r \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \right] dt$$

nous trouverons la solution du deuxième problème de Tsiolkovski:

$$v - v_0 = -gt - v_r (\ln m - \ln m_0),$$

ou

$$v = v_0 - gt + v_r \ln \frac{m_0}{m}. \qquad (23.27)$$

Dans le cas particulier où l'on a non seulement la vitesse relative des gaz v_r constante mais aussi le débit des gaz constant ($\dot{m} = -\mu =$ $=$ const), il vient

$$m = m_0 - \mu t,$$

et l'on a

$$v = v_0 - gt + v_r \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t}.$$

Ici μ est la masse consommée à l'unité de temps.

Exemple 23.7. Déterminer la loi de variation de la masse du solide si la vitesse relative v_r des particules éjectées est constante et le solide se déplace verticalement vers le haut dans le champ de la pesanteur uniforme avec une vitesse constante v_0. La résistance du milieu est à négliger, l'accélération de la pesanteur est g.

Solution. Conformément à la formule (23.27), on a pour $v = v_0$

$$gt = v_r \ln \frac{m_0}{m},$$

d'où

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{g}{v_r} t} \quad \text{ou} \quad m = m_0 e^{-\frac{g}{v_r} t},$$

ce qui signifie que la masse du solide décroîtra exponentiellement.

Exemple 23.8. *Mouvement d'une fusée dans le champ d'attraction* (gravitation) *newtonienne, avec une poussée constante* (problème de Lagrange-Mechtcherski).

Construisons un axe invariable Ox passant par le centre d'attraction O parallèlement au vecteur constant $\boldsymbol{R}$. Désignant par $\boldsymbol{i}$ le vecteur unité de l'axe Ox et par $\boldsymbol{r}$ le rayon vecteur du point issu de O, mettons l'équation vectorielle du mouvement du point sous la forme

$$m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{mg\rho^2}{r^3} \boldsymbol{r} + R\boldsymbol{i}, \qquad (1)$$

où ρ est le rayon de la Terre (voir la formule (13.32)). Admettant que la vitesse des gaz éjectés est constante, nous obtenons

$$m = m_0 e^{-\alpha t} \qquad (\alpha > 0).$$

Divisons (1) par m et écrivons le résultat (voir (23.25a)) comme suit:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\frac{g\rho^2}{r^3}\boldsymbol{r}+\alpha v_r\boldsymbol{i}. \qquad (2)$$

1° La loi de conservation du moment cinétique par rapport à l'axe Ox a lieu (voir (15.12)). Nous pouvons obtenir cette loi immédiatement. Multiplions (2) vectoriellement à gauche par $\boldsymbol{r}$:

$$\left[\boldsymbol{r},\ \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right]=\alpha v_r[\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{i}] \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}[\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v}]=\alpha v_r[\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{i}].$$

Multipliant scalairement les deux membres de cette identité par $\boldsymbol{i}$, nous obtenons en vertu du commentaire à la formule (1.18)

$$\left(\frac{d}{dt}[\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v}],\ \boldsymbol{i}\right)=\alpha v_r([\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{i}],\ \boldsymbol{i})=0,$$

et nous aboutissons à une intégrale première:

$$([\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v}],\ \boldsymbol{i}) = \text{const.}$$

2° Il est également possible de dégager immédiatement l'intégrale des forces vives (15.27). Multiplions scalairement les deux membres de (2) par l'identité vectorielle

$$\boldsymbol{v}\,dt = d\boldsymbol{r};$$

nous obtenons l'identité

$$\frac{1}{2}\,dv^2=-\frac{g\rho^2}{r^2}\,dr+\alpha v_r\,dx.$$

En l'intégrant, nous trouvons

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{g\rho^2}{r}+\alpha v_r x+\text{const.}$$

Si l'on veut pousser jusqu'au bout la résolution de ce second problème fondamental de dynamique, c'est-à-dire obtenir les équations cinématiques du mouvement du point, on doit s'attendre à des difficultés mathématiques considérables.

Exercices

Exercice 23.1. Une boule A de masse m_1 tombe en chute libre de la hauteur h sur une plaque B de masse m_2 fixée sur un ressort (fig. 23.11). Admettant qu'il s'agit d'un choc de corps absolument mous, déterminer la vitesse u de la plaque après le choc.

Réponse. $u=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\sqrt{2gh}.$

Exercice 23.2. Deux boules de masses m_1, m_2 ayant un coefficient de restitution k se déplacent en translation dans la même direction (fig. 23.12, a). Quelles doivent être les vitesses v_1 et v_2 des boules avant le choc pour que la boule I reste immobile après le choc et que la boule II acquière une vitesse donnée u_2 (fig. 23.12, b) ?

Réponse. $v_1=\dfrac{1+k}{k}\,\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\,u_2,\quad v_2=\dfrac{km_2-m_1}{k(m_1+m_2)}\,u_2.$

Exercice 23.3. Une sonnette de 3000 N de poids tombe de la hauteur h = 3m sur un pieu pesant 500 N. On demande de calculer le rendement η de la sonnette, le travail A_1 dépensé pour la déformation du pieu et le travail A_2 dépensé pour enfoncer le pieu si le coefficient de restitution est $k = 0,52$.

Réponse. $\eta = 0,896$, $A_1 = 940$ J, $A_2 = 8060$ J.

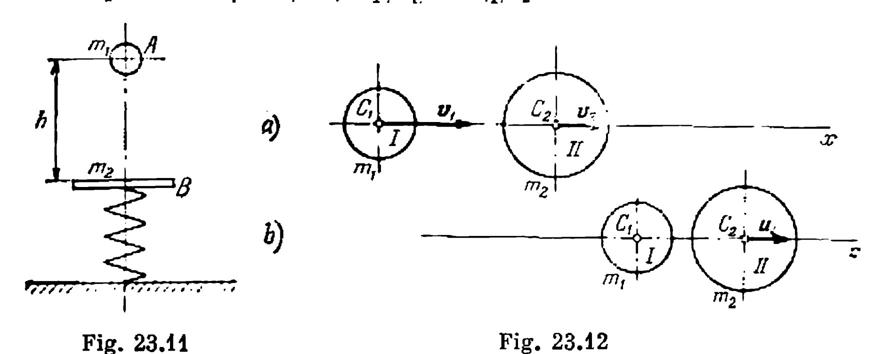


Fig. 23.11

Fig. 23.12

Exercice 23.4. Trois boules parfaitement élastiques de masses m_1, m_2, m_3 se trouvent sur une même droite. La boule m_1 vient frapper la boule fixe m_2 avec une vitesse connue v. Quelle doit être la masse m_2 pour qu'en frappant la troisième boule m_3, elle lui communique une vitesse aussi grande que possible ? (Problème de Huygens.)

Réponse. $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$.

CHAPITRE XXIV

MOUVEMENT DU POINT MATÉRIEL DANS UN CHAMP DE FORCES CENTRALES

§ 1. Formules de Binet

1.1. Champ de forces centrales. La force exercée sur un point matériel est appelée *centrale* si sa ligne d'action passe en permanence par un point fixe O, dit *centre des forces*. Si l'origine des coordonnées est confondue avec le centre des forces, l'expression générale d'une force centrale $\boldsymbol{F}$ sera

$$\boldsymbol{F} = F\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

où $\boldsymbol{r}$ est le rayon vecteur du point d'application m de la force (fig. 24.1); r son module, c'est-à-dire le rayon polaire de m; F la projection de la force $\boldsymbol{F}$ sur la direction du rayon vecteur (valeur algébrique de la force). S'il y a répulsion, on a $F > 0$; s'il y a attraction, on a au contraire $F < 0$.

Les forces centrales constituent un champ appelé *champ de forces centrales*. A titre d'exemple, on peut citer le champ d'attraction engendré par un point matériel ou un corps sphérique homogène, ainsi que le champ électrostatique créé par une charge électrique ponctuelle.

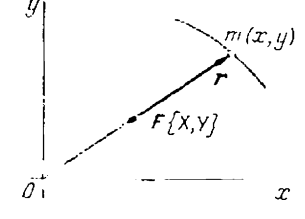


Fig. 24.1

Le cas le plus intéressant, du point de vue pratique, est celui où F dépend uniquement *) de la distance r, c'est-à-dire $F = F(r)$ et $\boldsymbol{F} = F(r)\,\boldsymbol{r}^0$, où $\boldsymbol{r}^0 = \boldsymbol{r}/r$ est le vecteur unité du rayon polaire du point d'application de la force. On dit d'un tel champ de forces qu'il est *symétrique sphérique*. Les champs de forces centrales que nous venons de citer en exemple sont symétriques sphériques. Nous supposerons partout dans la suite que tout champ de forces centrales est symétrique sphérique. Montrons que, dans cette hypothèse, il s'agit toujours d'un champ dérivant d'un potentiel (ch. XV, n° 3.3).

*) Soulignons que dans ce chapitre F désigne la valeur algébrique de la force.

En vertu du corollaire 1° cité dans le n° 2.3 du chapitre XV (voir aussi l'exemple 15.3), la trajectoire que décrit le point matériel mis en mouvement par une force centrale est une courbe plane, plus exactement une courbe contenue dans le plan qui passe par le vecteur vitesse initiale du point et par le centre O. Prenons ce plan comme plan Oxy (fig. 24.1). Les projections X et Y de la force centrale $\boldsymbol{F}$ s'écriront alors

$$X = F\cos\varphi = F\frac{x}{r}, \quad Y = F\sin\varphi = F\frac{y}{r}.$$

Conformément aux indications données dans le chapitre XV, n° 3.3, proposons-nous de calculer le travail élémentaire de la force $\boldsymbol{F}$ dans un déplacement réel $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,dx + \boldsymbol{j}\,dy$. Il vient

$$\delta A = (\boldsymbol{F},\ d\boldsymbol{r}) = X\,dx + Y\,dy = F\frac{x\,dx + y\,dy}{r} = F(r)\,dr, \qquad (24.1)$$

car, en dérivant l'identité $x^2 + y^2 = r^2$, on obtient

$$x\,dx + y\,dy = r\,dr.$$

Or, l'expression $F(r)\,dr$ est la différentielle d'une fonction de forces $U(r)$ égale à

$$U(r) = \int F(r)\,dr. \qquad (24.2)$$

Autrement dit, $F(r)\,dr$ peut être regardée comme une différentielle totale d'une fonction de deux variables x et y.

1.2. Première formule de Binet *). Introduisons une définition cinématique: on appelle *vitesse aréolaire* $d\sigma/dt$ d'un point M la limite du rapport de l'aire $\Delta\sigma$ balayée par son rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ (fig. 24.2) à l'intervalle de temps correspondant Δt, lorsque $\Delta t \to 0$, en sorte que

$$\frac{d\sigma}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}.$$

Le module d'un produit vectoriel de deux vecteurs est égal au double de l'aire du triangle construit sur les vecteurs à multiplier (voir ch. I, n° 2.2):

$$2\Delta\sigma = |[\boldsymbol{r},\ \Delta\boldsymbol{r}]|.$$

Il s'ensuit que le double de la vitesse aréolaire est égal à

$$2\frac{d\sigma}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\left[\boldsymbol{r}, \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\right]\right| = |[\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v}]| = \mathrm{Mom}_O\,\boldsymbol{v} = v\cdot d, \qquad (24.3)$$

c'est-à-dire au module du moment de la vitesse du point par rapport au centre O.

Ecrivons l'expression de la vitesse aréolaire pour le cas du mouvement plan en coordonnées polaires. Un élément d'aire est égal, à

---

*) Jacques Binet, mathématicien et astronome français (1786-1856).

des infiniment petits du second ordre près, à

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2} r^2 |\Delta\varphi|,$$

(fig. 24.2), où $\Delta\varphi$ est l'accroissement de l'angle polaire φ pendant le temps Δt. On a par définition

$$\frac{d\sigma}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} r^2 \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = \frac{1}{2} r^2 \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|. \tag{24.4}$$

Passons à la déduction de la première formule de Binet. Soit m un point matériel mis en mouvement par une force centrale. Le théorème de la variation du moment cinétique énoncé sous forme vectorielle (15.10) nous conduit dans ce cas, comme nous l'avons vu dans le corollaire 1 (voir ch. XV, n° 2.3), à une intégrale première :

$$\mathbf{Mom}_O m\mathbf{v}\,(t) = \mathbf{Mom}_O\, m\mathbf{v}\,(0).$$

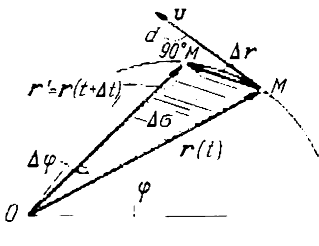


Fig. 24.2

Le fait que le vecteur moment cinétique du point par rapport au centre O conserve une direction inchangée signifie précisément que la trajectoire du point m est contenue dans un plan fixe perpendiculaire au vecteur $\mathbf{Mom}_O m\mathbf{v}\,(0)$. Le fait que le module du moment cinétique du point par rapport à O reste inchangé signifie, en vertu de (24.3), que la vitesse aréolaire est constante,

$$2\frac{d\sigma}{dt} = \mathrm{Mom}_O\, v\,(0) = \mathrm{const}. \tag{24.5}$$

Pour cette raison l'intégrale (24.5) est appelée *intégrale des aires* ou *constante des aires*. En coordonnées polaires, compte tenu de (24.4), l'intégrale des aires s'écrit

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c \qquad (c \equiv \mathrm{mom}_O\, v\,(0) = \mathrm{const}), \tag{24.6}$$

où le signe de c est positif ou négatif suivant que l'angle polaire φ du point mobile m augmente ou diminue. Conformément à la formule (11.3), le carré de la vitesse du point s'écrit en coordonnées polaires comme suit :

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Appliquons l'intégrale des aires (24.6), qui nous donne $d\varphi/dt = c/r^2$, et écrivons

$$v^2 = c^2 \left[\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right], \quad \text{ou} \quad v^2 = c^2 \left\{ \left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right\}. \tag{24.7}$$

Nous venons d'obtenir la première formule de Binet qui exprime le carré de la vitesse du point en fonction de l'inverse de son rayon polaire et de la dérivée de cet inverse par rapport à l'angle polaire.

1.3. Deuxième formule de Binet. Quand le point matériel se déplace dans un champ de forces centrales, le théorème de la variation de l'énergie cinétique (15.21) s'écrit, en vertu de (24.1), sous la forme

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=F\,dr.$$

Divisons par $d\varphi$, substituons à v^2 son expression tirée de la première formule de Binet et faisons la dérivation:

$$F\frac{dr}{d\varphi}=\frac{d}{d\varphi}\frac{mc^2}{2}\left\{\left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}\right]^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2\right\}=$$

$$=\frac{mc^2}{2}\left[2\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}+2\frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}\right]=$$

$$=mc^2\left[-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}-\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right].$$

Après avoir divisé par $dr/d\varphi$, nous obtenons la deuxième formule de Binet:

$$F=-\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}+\frac{1}{r}\right]. \qquad (24.8)$$

La deuxième formule de Binet permet de définir la force connaissant la trajectoire $r=r(\varphi)$, c'est-à-dire de résoudre un problème analogue au premier problème fondamental de dynamique du point.

§ 2. Quelques notions de mouvement des planètes et des satellites

2.1. La loi d'attraction de Newton se déduit des lois de Kepler. La mécanique céleste repose sur trois lois de Kepler:

1° *Les trajectoires des planètes (et des comètes) sont des coniques dont un foyer est occupé par le Soleil.*

2° *Les planètes (et les comètes) décrivent des trajectoires planes autour du Soleil, leur mouvement sur ces trajectoires est régi par la loi des aires* (n° 1.2).

3° *Les carrés des périodes de révolution sidérales des planètes sont proportionnels aux cubes des demi-axes focaux de leurs orbites.*

K e p l e r a établi ces lois par voie empirique (voir Introduction à la dynamique, n° 3). A partir de ces lois, Newton a déduit d'abord la loi de la force exercée sur les planètes, puis la loi de l'attraction universelle.

La deuxième loi de Kepler est vérifiée si et seulement si la force en question est centrale. Définissons cette force à partir de la première loi de Kepler en appliquant la deuxième formule de Binet (24.8).

Une conique se définit en coordonnées polaires r et φ (voir E f i m o v, ch. V, § 37), à condition de prendre comme pôle le foyer droit d'une ellipse, par l'égalité

$$\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos\varphi}{p}, \qquad (24.9)$$

où e est l'excentricité et p le paramètre focal égal à b^2/a pour l'ellipse et l'hyperbole. D'après la formule (24.8) on a

$$F=-\frac{mc^2}{r^2}\left(-\frac{e\cos\varphi}{p}+\frac{1+e\cos\varphi}{p}\right)=-m\mu\frac{1}{r^2}\quad\left(\mu=\frac{c^2}{p}\right). \qquad (24.10)$$

Cette formule définit une force d'attraction dont l'intensité est inversement proportionnelle à la distance. Il ne reste qu'à montrer que μ est le même pour toutes les planètes (ou comètes). En effet, tout ce que nous savons jusqu'à présent est que la constante des aires c reste constante dans un mouvement donné. Soit T la durée de révolution de la planète sur son orbite. Puisque c est le double de la vitesse aréolaire et que l'aire de l'ellipse est égale à πab, on a $c = 2\pi ab/T$, d'où

$$\mu=\frac{c^2}{p}=\frac{4\pi^2a^2b^2\cdot a}{T^2b^2}=4\pi^2\frac{a^3}{T^2}=\text{const}$$

en vertu de la troisième loi de Kepler. Ainsi donc, le coefficient μ (la constante de Gauss *)) est le même pour toutes les planètes et est égal à γM, où γ est la constante gravitationnelle et M la masse du Soleil. La formule (24.10), qui s'écrit désormais sous la forme

$$F=-\frac{\gamma mM}{r^2},$$

exprime la l o i d e l'a t t r a c t i o n d e N e w t o n.

Newton a établi sa loi par voie géométrique, les formules de Binet n'étant apparues que plus tard. La déduction que nous venons de proposer est incomplète (imprécise), au même titre que la déduction de Newton, car on doit prendre en réalité comme point fixe, au lieu du Soleil, le centre de masse du système Soleil-planète (ou Soleil-comète). Les lois de Kepler sont donc approximatives.

*) C a r l F r i e d r i c h G a u s s (1777-1855), éminent mathématicien allemand.

Nous venons d'examiner le problème inverse; envisageons à présent le problème direct, en conservant l'hypothèse selon laquelle le corps central est fixe.

2.2. Problème de Kepler-Newton. Considérons le mouvement du point matériel de masse m dans le champ de forces centrales engendré par un corps fixe O (fig. 24.1), d'après la loi

$$F = -\frac{m\mu}{r^2}. \qquad (24.11)$$

On pourrait intégrer directement les équations différentielles du mouvement (voir ch. XIII, n° 3.4), mais il est préférable de profiter des intégrales premières, car, disposant de deux intégrales premières, on peut se passer de deux intégrations. L'intégrale des aires nous donne $r^2 d\varphi/dt = c$. Une autre intégrale première est l'intégrale des forces vives. Calculons la fonction de forces en portant (24.11) dans (24.2):

$$U = -m\mu \int \frac{dr}{r^2} = \frac{m\mu}{r}.$$

La formule (15.27) de l'intégrale des forces vives se présente comme suit:

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{m\mu}{r} = \frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{m\mu}{r_0},$$

d'où

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + h \quad \left(h = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right). \qquad (24.12)$$

Substituons à v^2 sa valeur tirée de la première formule de Binet (ce qui revient précisément à utiliser l'intégrale des aires)

$$c^2 \left\{ \left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right\} = \frac{2\mu}{r} + h,$$

il vient

$$\left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} \right]^2 = -\frac{1}{r^2} + \frac{2\mu}{c^2}\frac{1}{r} - \frac{\mu^2}{c^4} + \frac{\mu^2}{c^4} + \frac{h}{c^2} =$$
$$= -\left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{c^2}\right)^2 + \frac{\mu^2}{c^4} + \frac{h}{c^2}. \qquad (24.13)$$

Ceci est précisément l'équation différentielle du mouvement du point matériel dans le champ de forces centrales. Pour l'intégrer, nous remplacerons $r = r(\varphi)$ par la fonction $u = u(\varphi)$ en faisant la substitution

$$\frac{1}{r} - \frac{\mu}{c^2} = \sqrt{\frac{\mu^2}{c^4} + \frac{h}{c^2}}\, u. \qquad (24.14)$$

On a donc

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}=\sqrt{\frac{\mu^2}{c^4}+\frac{h}{c^2}}\,\frac{du}{d\varphi}.$$

Substituant cette expression dans (24.13), on obtient

$$\left(\frac{\mu^2}{c^4}+\frac{h}{c^2}\right)\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=-\left(\frac{\mu^2}{c^4}+\frac{h}{c^2}\right)u^2+\frac{\mu^2}{c^4}+\frac{h}{c^2},$$

ou, après réduction par le binôme et extraction de la racine,

$$\frac{du}{d\varphi}=\pm\sqrt{1-u^2}.$$

Séparons les variables et intégrons:

$$\mp\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\quad\int d\varphi,$$

ou

$$\text{Arc}\cos u=\varphi-\varphi_0,\quad u=\cos(\varphi-\varphi_0)$$

(l'autre signe nous donnerait $u = \sin(\varphi - \varphi_0^*)$, c'est-à-dire le déphasage initial). Portant cette expression dans (24.14), nous obtenons

$$\frac{1}{r}=\frac{\mu}{c^2}+\sqrt{\frac{\mu^2}{c^4}+\frac{h}{c^2}}\cos(\varphi-\varphi_0). \tag{24.15}$$

Comparant cette expression avec la forme canonique de l'équation d'une conique (24.9), nous constatons que la trajectoire est une conique ayant un de ses foyers au point O et que

$$\frac{1}{p}=\frac{\mu}{c^2},\quad \frac{e}{p}=\sqrt{\frac{\mu^2}{c^4}+\frac{h}{c^2}},$$

d'où

$$p=\frac{c^2}{\mu},\quad e=\sqrt{1+\frac{hc^2}{\mu^2}}. \tag{24.16}$$

Le type de la trajectoire est défini par les conditions initiales du mouvement. Si $h \geqslant 0$ (cas d'une comète), l'excentricité est $e \geqslant 1$ et la trajectoire représente une branche d'hyperbole (pour $e > 1$) ou une parabole (pour $e = 1$). Si $h < 0$ (cas d'une planète), la trajectoire est une ellipse ($e < 1$). Remarquons qu'on a $h \geqslant -\mu^2/c^2$ en vertu de (24.13); cela se démontre d'ailleurs directement. Il convient d'ajouter que la trajectoire prend la forme d'un segment de droite chaque fois que la vitesse initiale est dirigée vers le centre.

2.3. Notions sur les trajectoires des satellites. Un vaisseau spatial ou un satellite artificiel est sollicité, en plus du champ d'attraction terrestre, par les champs d'attraction d'autres corps célestes: le Soleil, la Lune, etc. Or, tant que l'objet reste relativement proche de la Terre, c'est le champ d'attraction terrestre qui est prédominant.

En première approximation ce champ peut être assimilé à un champ symétrique sphérique de forces centrales dont le centre se confond avec le centre de la Terre.

La trajectoire d'un vaisseau spatial se divise en deux parties qui correspondent aux phases propulsive et passive du vol. En phase propulsive, les propulseurs du lanceur fonctionnent; en phase passive, les propulseurs sont arrêtés. La détermination de la trajectoire en phase passive dans le champ d'attraction terrestre se réduit à la résolution du problème de Kepler-Newton (voir n° 2.2). Si la trajectoire d'un corps lancé de la Terre dans l'espace représente en phase passive une orbite elliptique, on dit que le corps est satellisable, c'est-à-dire devient un satellite artificiel de la Terre.

La *première vitesse cosmique*, ou *vitesse circulaire*, est la plus petite vitesse qu'on doit communiquer au corps dont la distance géocentrique est égale au rayon de la Terre, pour qu'il devienne satellisable. Elle est égale à la vitesse d'un satellite en orbite circulaire. Puisque l'excentricité d'une orbite circulaire est $e = 0$ et que son paramètre focal est égal au rayon, $p = r_0$, la formule (24.16) nous donne

$$h = -\frac{\mu^2}{c^2}, \quad p = \frac{c^2}{\mu} = r_0, \quad \text{d'où } h = -\frac{\mu}{r_0},$$

et la formule (24.12) devient

$$v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0} - \frac{\mu}{r_0} = \frac{\mu}{r_0}.$$

On en tire l'expression de la vitesse initiale (en supposant que $v_0 \perp r_0$; on montre que c'est une condition nécessaire de la mise en orbite circulaire)

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}} = \sqrt{g(r_0)\, r_0},$$

où $g(r_0) = \gamma M / r_0^2$ est l'accélération de la pesanteur à la distance r_0 du centre de la Terre (voir l'exemple 13.7). Posant $r_0 = R$, où R est le rayon de la Terre, nous obtenons la première vitesse cosmique (sans tenir compte de la résistance de l'atmosphère):

$$v_{\mathrm{I}} = \sqrt{gR} = \sqrt{9{,}81 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6} = 7910 \text{ m/s}.$$

La *deuxième vitesse cosmique*, ou *vitesse parabolique*, est la plus petite vitesse qu'on doit communiquer au corps situé à la surface de la Terre pour qu'il puisse quitter la sphère de l'attraction terrestre et devenir un satellite du Soleil (une planète artificielle). Pour que cette condition soit réalisée, la trajectoire du corps doit avoir la forme d'une parabole ($e = 1$). La formule (24.16) pour $e = 1$ nous donne $h = 0$, et la formule (24.12) permet de calculer la deuxième

vitesse cosmique:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}.$$

Sa valeur numérique — toujours sans tenir compte de la résistance de l'atmosphère — sera

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6} = 11\,170 \text{ m/s}.$$

La figure 24.3 présente une famille de trajectoires des satellites et vaisseaux spatiaux dans le champ d'attraction terrestre en fonction

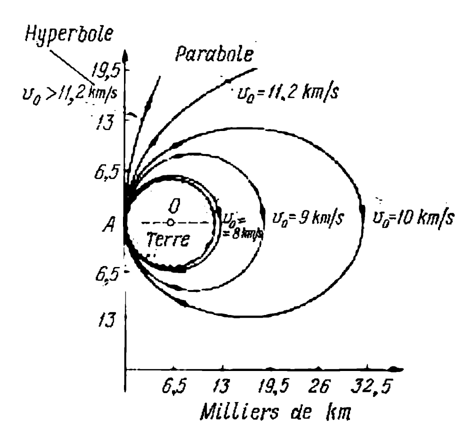


Fig. 24.3

de la vitesse initiale v_0 (en supposant que $v_0 \perp r_0$). Ici O est le centre de la Terre, qui se situe dans l'un des foyers de la trajectoire; v_0 est la vitesse au point A qui correspond à la fin de la phase propulsive.

Si la trajectoire est elliptique, le corps ou bien revient sur la Terre ($v_0 < v_I$, cas des fusées balistiques), ou bien devient un satellite de la Terre ($v_I \leqslant v_0 < v_{II}$). Si la trajectoire est parabolique ($v_0 = v_{II}$), ou hyperbolique ($v_0 > v_{II}$), le corps devient un satellite du Soleil (planète artificielle) ou bien quitte le Système solaire (pour $v_0 > 16{,}7$ km/s).

CHAPITRE XXV

NOTIONS DE MÉCANIQUE DU FIL *)

En mécanique, on entend par *fil* toute barre matérielle mince (par exemple un fil de fer) dont l'axe est susceptible de prendre une forme quelconque sous l'action des forces extérieures. Si la longueur du fil reste inchangée quel que soit son mouvement et quelles que soient les sollicitations extérieures, on dit que le fil est *inextensible*. Enfin, un fil qui n'oppose aucune résistance à la flexion ni à la torsion est appelé *parfait*. Dans le présent chapitre, il s'agit partout d'un fil parfait inextensible.

§ 1. Equilibre du fil parfait inextensible dans un champ de forces stationnaires

Soit un fil de longueur finie l soumis à l'action des *forces massiques* et *tensions* à ses extrémités.

Dans le texte qui suit, nous rapporterons partout ces forces massiques à une portion correspondante de la longueur du fil, de même que la masse de ce dernier, tout en conservant les symboles habituels des forces $\boldsymbol{F}$ et de la densité $\mu = dm/ds$.

Sur le fil en équilibre, isolons une portion Δs et supprimons le reste du fil. Pour conserver l'équilibre de la portion Δs, on doit appliquer en ses points extrêmes A, B des forces déterminées $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{T}_1$ qui seront précisément les *forces de tension* aux points indiqués. L'élément du fil Δs sera donc sollicité par les forces actives extérieures $\boldsymbol{F}\Delta m$, $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}_1$.

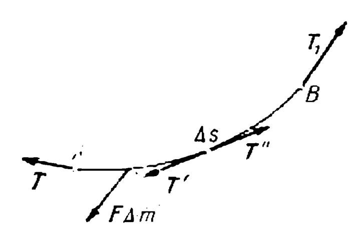


Fig. 25.1

Sur chaque point de cet élément du fil seront exercées en même temps des forces intérieures opposées $\boldsymbol{T}'$, $\boldsymbol{T}'' = -\boldsymbol{T}'$ (fig. 25.1).

*) Beaucoup de mécaniciens illustres ont étudié la mécanique du fil: Galilée, Euler, Lagrange, Henri Resal, Hendrik Lorentz et surtout Paul Emile Appell (1855-1930) (voir son magistral *Traité de Mécanique rationnelle*). Un cours méthodique de mécanique du fil, avec des applications pratiques, a été développé par A. Minakov (1893-1954) tout au long de sa collaboration à l'Institut du textile de Moscou (1922-1954).

Remarquons que la distance s est comptée le long du fil, à la façon de l'abscisse curviligne, à partir d'un point déterminé situé soit sur le fil lui-même (en statique), soit sur l'axe fixe du fil (quand celui-ci se déplace suivant un contour).

1.1. Equation d'équilibre d'un élément libre du fil sous forme vectorielle. Admettant que la force $\boldsymbol{T}_1$ pour un élément Δs soit égale à $\boldsymbol{T}_1 = -\boldsymbol{T} + \Delta \boldsymbol{T}$, écrivons l'équation d'équilibre de l'élément du fil :

$$\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{F}\, \Delta m = 0,$$

ou en vertu de ce qui précède

$$\frac{\Delta \boldsymbol{T}}{\Delta s} = -\boldsymbol{F}\, \frac{\Delta m}{\Delta s}.$$

Passant à la limite pour $\Delta s \to 0$, nous obtenons définitivement

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = -\mu \boldsymbol{F},$$

ou

$$\frac{1}{\mu}\, \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} + \boldsymbol{F} = 0. \tag{25.1}$$

Puisque la tension $\boldsymbol{T}$ est toujours dirigée suivant la tangente, c'est-à-dire suivant le vecteur unité $\boldsymbol{\tau}$, on peut écrire $\boldsymbol{T} = T\boldsymbol{\tau}$.

Choisissons un point de l'élément du fil comme origine des coordonnées et construisons les vecteurs unités $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{b}$ (fig. 7.9). Nous pouvons écrire

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \frac{d\,(T\boldsymbol{\tau})}{ds} = \frac{dT}{ds}\boldsymbol{\tau} + T\,\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}.$$

On apprend en cinématique du point (ch. VII, n° 3.3) qu'en position limite du plan passant par trois points infiniment proches, les tensions, de même que les vitesses de deux points, sont contenues dans le plan osculateur et que

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{n},$$

où ρ est le rayon de courbure de l'élément du fil. Alors

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \frac{dT}{ds}\boldsymbol{\tau} + \frac{T}{\rho}\,\boldsymbol{n},$$

et l'équation vectorielle de l'équilibre d'un élément libre du fil (25.1) s'écrira sous la forme

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{dT}{ds}\,\boldsymbol{\tau} + \frac{T}{\rho}\,\boldsymbol{n}\right) + \boldsymbol{F} = 0. \tag{25.2}$$

1.2. Equations d'équilibre du fil en projections sur les axes intrinsèques. Projetons à présent l'équation (25.2) sur les axes intrinsèques

aux vecteurs unités $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ (fig. 7.9). Il vient évidemment

$$\frac{1}{\mu}\frac{dT}{ds}+F_\tau=0, \qquad \frac{1}{\mu}\frac{T}{\rho}+F_n=0, \qquad F_b=0, \tag{25.3}$$

où F_τ, F_n, F_b sont les projections de la force massique $\boldsymbol{F}$ sur la tangente, la normale principale et la binormale.

De la dernière équation (25.3) il ressort que le vecteur champ $\boldsymbol{F}$ exercé en chaque point du fil libre est contenu dans le plan osculateur.

1.3. Equations d'équilibre du fil en projections sur les axes cartésiens. En partant de l'équation vectorielle (25.2), on peut obtenir d'une façon analogue trois autres équations scalaires en projetant les vecteurs $\boldsymbol{\tau}$ et $\boldsymbol{n}/\rho$ qui y figurent sur trois axes cartésiens rectangulaires arbitrairement choisis. On montre sans peine que pour un point du fil de coordonnées x, y, z, les projections en question s'écriront respectivement

$$\frac{dx}{ds} \text{ et } \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{dy}{ds} \text{ et } \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \frac{dz}{ds} \text{ et } \frac{d^2z}{ds^2},$$

et les équations d'équilibre prendront la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu}\left(\frac{dT}{ds}\frac{dx}{ds}+T\frac{d^2x}{ds^2}\right)+F_x=0,\\
&\frac{1}{\mu}\left(\frac{dT}{ds}\frac{dy}{ds}+T\frac{d^2y}{ds^2}\right)+F_y=0,\\
&\frac{1}{\mu}\left(\frac{dT}{ds}\frac{dz}{ds}+T\frac{d^2z}{ds^2}\right)+F_z=0,
\end{aligned} \tag{25.4}$$

ou en écriture condensée

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu}\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+F_x=0,\\
&\frac{1}{\mu}\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)+F_y=0,\\
&\frac{1}{\mu}\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right)+F_z=0.
\end{aligned} \tag{25.5}$$

A ce système on doit ajouter la condition habituelle des cosinus directeurs de la tangente:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1.$$

Le système (25.5) représente un système d'équations différentielles du sixième ordre en x, y, z et T. Sa solution générale s'écrira sous la forme

$$\begin{aligned}
x&=x(s,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_6), \qquad y=y(s,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_6),\\
z&=z(s,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_6), \qquad T=T(s,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_6).
\end{aligned}$$

Déterminant les constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_6$ à partir des conditions aux limites, on peut résoudre le problème posé dans sa totalité : déterminer la figure d'équilibre du fil et calculer sa tension en un point quelconque.

Exemple 25.1. *Chaînette.* Cherchons la figure d'équilibre du fil *) dans le champ de la pesanteur (fig. 25.2). Dans ces conditions on a dans les deux premières équations (25.5) $F_x = 0$, $F_y = -g$, et les équations d'équilibre du fil s'écriront

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0, \qquad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)=\gamma,$$

où $\gamma = g\mu$ est le poids de l'unité de longueur; on a $\gamma = \text{const}$, car le fil est homogène. La première équation nous donne

$$T\frac{dx}{ds}=T_0=\text{const} \qquad (T_0=T|_{x=0}),$$

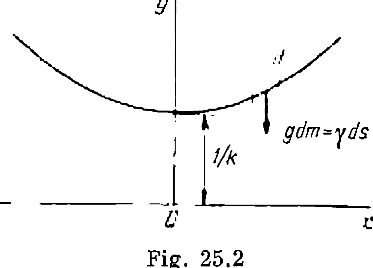


Fig. 25.2

ce qui signifie que la projection de la tension T sur l'axe Ox est une constante.

Portant $T = T_0\, ds/dx$ dans la deuxième équation d'équilibre, nous obtenons

$$\frac{dy'}{ds}=k \qquad \left(y'=\frac{dy}{dx}, \qquad k=\frac{\gamma}{T_0}=\text{const}\right).$$

Portons dans cette égalité la valeur $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$ (voir Piskounov, t. I, ch. XII, § 3), séparons les variables et faisons l'intégration pour la condition aux limites $y'(0) = 0$:

$$\int_0^{y'}\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}}=k\int_0^x dx.$$

L'intégrale du premier membre figure dans les tables; il vient

$$\ln\left(y'+\sqrt{1+y'^2}\right)=kx,$$

d'où

$$y'+\sqrt{1+y'^2}=e^{kx}.$$

Explicitons dans la dernière équation $y' = dy/dx$. Il vient

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{kx}-e^{-kx}\right).$$

Multiplions par dx et intégrons encore une fois pour $y(0) = 1/k$:

$$\int_{1/k}^{y}dy=\frac{1}{2}\int_0^x\left(e^{kx}-e^{-kx}\right)dx;$$

il s'ensuit l'équation de la figure d'équilibre du fil

$$y=\frac{1}{2k}\left(e^{kx}+e^{-kx}\right) \qquad \left(k=\frac{\gamma}{T_0}\right).$$

*) Rappelons que le fil est parfait, inextensible et homogène.

La courbe figurée par le fil s'appelle *chaînette*. La définition de k à partir des conditions aux limites a été décrite en fin de l'exemple 17.6. (voir page 335)

Exemple 25.2. *Calcul de la tension du fil sur ordinateur* (conditions aux limites du second type). On connaît la distance $2d$ entre les points extrêmes situés à la même hauteur et la flèche h du fil (fig. 25.3). Déterminer la tension du fil en ses points extrêmes.

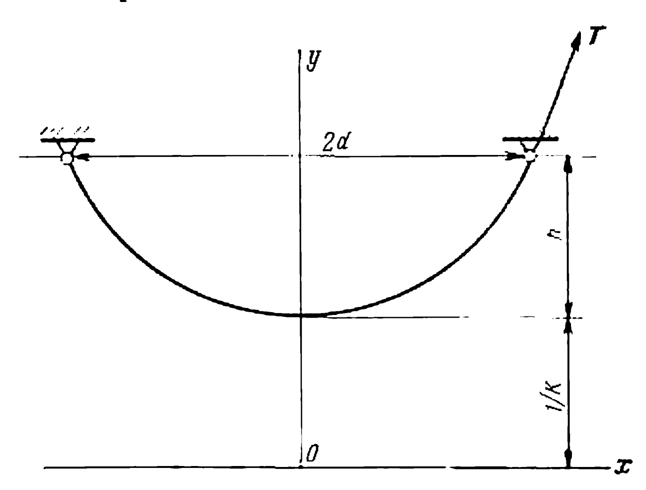


Fig. 25.3

Solution. Conformément à la fin de l'exemple 25.1 (voir aussi l'exemple 17.6, relation (6)), on a

$$y(d)=\frac{1}{k}\ \text{ch}\ kd=\frac{1}{k}+h.$$

Introduisons des paramètres sans dimension

$$\beta=kd, \quad \mu=\frac{h}{d} \quad (0<\mu<\infty) \tag{1}$$

et mettons la dernière équation transcendante sous la forme

$$\text{ch}\ \beta = 1 + \mu\beta. \tag{2}$$

L'équation transcendante (2) a été résolue sur ordinateur ES-1033 par itérations (ici, par la méthode des approximations successives), à l'aide d'un programme rédigé en Fortran OS.

Les tableaux ci-dessous donnent les valeurs de β pour $0 \leqslant \mu \leqslant 0{,}99$, les valeurs de μ étant échelonnées de 0,01 en 0,01, et pour $1 \leqslant \mu \leqslant 9{,}9$, les valeurs de μ étant échelonnées de 0,1 en 0,1.

Conformément aux notations introduites (1)

$$k=\frac{\beta}{d}. \tag{3}$$

Tableau 1

Valeurs de β

μ	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0	0,020	0,040	0,060	0,079	0,100	0,120	0,139	0,160	0,179
0,1	0,199	0,219	0,239	0,258	0,278	0,297	0,318	0,337	0,356	0,375
0,2	0,395	0,414	0,433	0,452	0,471	0,490	0,509	0,509	0,527	0,565
0,3	0,584	0,602	0,621	0,638	0,656	0,675	0,692	0,710	0,727	0,745
0,4	0,762	0,780	0,798	0,814	0,831	0,849	0,865	0,881	0,898	0,914
0,5	0,931	0,947	0,963	0,979	0,995	1,011	1,027	1,042	1,058	1,072
0,6	1,089	1,103	1,118	1,134	1,148	1,163	1,178	1,192	1,207	1,220
0,7	1,235	1,249	1,263	1,277	1,290	1,305	1,318	1,331	1,344	1,358
0,8	1,371	1,384	1,397	1,410	1,423	1,435	1,448	1,461	1,473	1,486
0,9	1,498	1,510	1,523	1,535	1,546	1,558	1,570	1,581	1,593	1,605

Tableau 2

Valeurs de β

μ	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1	1,616	1,726	1,830	1,926	2,017	2,102	2,182	2,260	2,332	2,400
2	2,466	2,529	2,589	2,646	2,702	2,754	2,805	2,854	2,900	2,946
3	2,990	3,034	3,074	3,114	3,152	3,190	3,227	3,262	3,297	3,330
4	3,363	3,395	3,425	3,456	3,485	3,515	3,542	3,570	3,598	3,624
5	3,651	3,676	3,700	3,725	3,749	3,772	3,795	3,817	3,839	3,861
6	3,883	3,904	3,926	3,945	3,965	3,986	4,005	4,024	4,043	4,060
7	4,079	4,097	4,114	4,132	4,149	4,167	4,183	4,199	4,215	4,231
8	4,247	4,263	4,279	4,294	4,309	4,333	4,339	4,367	4,367	4,382
9	4,396	4,410	4,423	4,437	4,451	4,464	4,477	4,490	4,502	4,515

La demi-longueur l du fil se définit par la formule (7) citée dans l'exemple 17.6, et la tension aux points extrêmes du fil, par la formule (12) de l'exemple 17.7 dans laquelle $\varkappa = kl$ et γ est le poids de l'unité de longueur du fil.

R e m a r q u e. Les conditions aux limites du premier type ont été envisagées dans l'exemple 17.7.

E x e m p l e 25.3. *Fil parabolique.* Considérons le câble AB d'un pont suspendu (fig. 25.4), ce dernier étant soumis à une charge verticale permanente. Chaque élément de longueur ds du fil sera sollicité par la force (poids) $\beta\, dx$, où β est la charge exercée sur l'unité de longueur. Les deux premières équations d'équilibre (25.5) s'écriront sous la forme

$$\frac{d}{ds}\left(T\,\frac{dx}{ds}\right)=0, \qquad \frac{d}{ds}\left(T\,\frac{dy}{ds}\right)=\beta\,\frac{dx}{ds}.$$

Comme dans l'exemple (25.1), la première équation nous donne

$$T\,\frac{dx}{ds}=T_0, \quad \text{ou} \quad T=T_0\,\frac{ds}{dx} \qquad (T_0=T\,|_{x=0}).$$

Portons cette expression de T dans la deuxième équation. Il vient

$$\frac{d}{dx}\left(T_0\frac{dy}{dx}\right)=\beta, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\varkappa \quad \left(\varkappa=\frac{\beta}{T_0}\right).$$

Intégrant deux fois, on obtient

$$y=\frac{1}{2}\varkappa x^2+c_1x+c_2,$$

où c_1, c_2 sont des constantes d'intégration.

La figure d'équilibre du câble d'un pont suspendu est donc une parabole d'axe vertical. Les constantes c_1, c_2 et $\varkappa$ se définissent par les conditions aux limites, c'est-à-dire par les coordonnées A, B et la longueur du câble.

Nous avons envisagé jusqu'à présent un fil libre; maintenant nous examinerons l'équilibre du fil sur une surface.

1.4. Equations d'équilibre du fil sur une surface polie en projections sur les axes locaux. Supposons que l'arc AA_1 (fig. 25.5) représente une portion de fil en équilibre sur une surface polie.

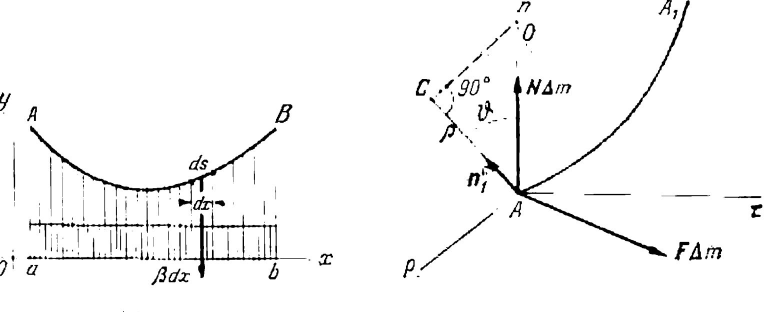


Fig. 25.4 Fig. 25.5

Traçons en son point origine A les axes $A\tau$ et An, qui sont respectivement la tangente au fil et la normale à la surface en A. Supposons ensuite que le segment AO de la normale à la surface définisse le rayon de courbure R de la trace de la section de la surface par le plan passant par la normale à la surface et la tangente au fil. Le rayon de courbure ρ de la courbe AA_1 elle-même sera représenté par le segment AC de la normale principale n_1 à la courbe. L'angle entre AC et AO sera désigné par ϑ. D'après le théorème de Meusnier démontré en géométrie différentielle, on a

$$\rho = R\cos\vartheta.$$

On sait que pour un élément matériel gêné du corps (en l'occurrence un élément du fil) en équilibre, l'équation d'équilibre est analogue à (25.2), à la seule différence qu'on doit y introduire la réaction $\boldsymbol{N}$ de direction An.

Projetant les forces F et N sur les axes locaux $A\tau$, An, Ap, nous obtenons à partir de (25.3)

$$\frac{1}{\mu}\frac{dT}{ds}+F_\tau=0,\quad \frac{1}{\mu}\frac{T}{\rho}\cos\vartheta+F_n+N=0,$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{T}{\rho}\sin\vartheta+F_p=0. \quad (25.6)$$

1.5. Equations d'équilibre du fil sur une surface polie en projections sur les axes cartésiens rectangulaires. Si la surface portant la portion du fil a pour équation $f(x, y, z) = 0$, alors, comme on l'a vu en théorie du mouvement du point matériel assujetti à rester sur une surface (ch. XVI, n° 1.1, formules (16.2), (16.3), (16.5)), les projections de la réaction normale N de la surface, qu'on ajoute comme précédemment au premier membre de (25.2), s'écrivent comme suit:

$$N_x=\lambda\frac{\partial f}{\partial x},\quad N_y=\lambda\frac{\partial f}{\partial y},\quad N_z=\lambda\frac{\partial f}{\partial z}.$$

On obtient donc les équations annoncées, par analogie à (25.5):

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mu}\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+F_x+\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial f}{\partial x}=0,\\&\frac{1}{\mu}\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)+F_y+\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial f}{\partial y}=0,\\&\frac{1}{\mu}\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right)+F_z+\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial f}{\partial z}=0,\end{aligned}\quad (25.7)$$

auxquelles viennent s'ajouter naturellement

$$f(x, y, z)=0,\quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1.$$

Par analogie à ce qui a été dit dans le n° 1.3, les quantités cherchées x, y, z, T, λ se définissent comme des fonctions de s. On montre en théorie des équations différentielles que le nombre de constantes arbitraires dans le cas considéré se réduit à quatre (c_1, c_2, c_3, c_4), grâce à la relation complémentaire entre les coordonnées apportée par l'équation de la surface $f(x, y, z) = 0$.

1.6. Equilibre du fil sur une surface cylindrique dépolie. Formule d'Euler. Soit un fil passé autour d'un cylindre dépoli au droit de sa section normale et soumis à une force active extérieure Q appliquée à l'une de ses extrémités A (fig. 25.6). Désignons le coefficient de frottement de glissement par k, le rayon du cylindre (et de la section) par R, l'angle interceptant l'arc de contact par α et l'arc AB lui-même par l. On demande de calculer la plus petite force Q_0 qu'on doit appliquer à l'autre extrémité du fil B (brin libre) pour assurer l'équilibre de la portion AB du fil.

Isolons sur le fil AB un arc élémentaire Δl intercepté par un angle au centre $\Delta\alpha$, de façon à avoir $\Delta l = R\Delta\alpha$. Puisque la tension à l'origine de Δl (qui va par convention du brin tendu vers le brin libre) est équilibrée par la force de tension à son extrémité et par la force de frottement, T_1 doit être plus grande que T. On écrira donc, conformément à ce qu'on a vu dans le n° 1.1,

$$T_1 = T + \Delta T, \qquad (\Delta T > 0).$$

Désignant la réaction normale de Δl par $N\Delta l$, on obtient l'expression du module de la force de frottement: $kN\Delta l$. Or, la différence des tensions ΔT est équilibrée par les forces de frottement, si bien qu'on a

$$\Delta T = kN\Delta l.$$

On trouve finalement la quantité $N\Delta l$ à partir de l'équation d'équilibre de Δl en projetant toutes les forces appliquées sur l'axe On. On a évidemment

$$N\Delta l = T \sin\frac{\Delta\alpha}{2} + (T + \Delta T)\sin\frac{\Delta\alpha}{2} =$$
$$= 2T\sin\frac{\Delta\alpha}{2} + \Delta T \sin\frac{\Delta\alpha}{2}.$$

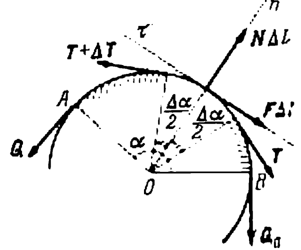


Fig. 25.6

En passant à la limite pour $\Delta l \to 0$, nous pouvons remplacer le sinus du petit angle $\Delta\alpha/2$ par l'angle $\Delta\alpha/2$ lui-même et négliger le deuxième terme qui sera un infiniment petit du second ordre; il vient

$$N\Delta l = 2T\frac{\Delta\alpha}{2} = T\Delta\alpha.$$

Comme $\Delta T = kN\Delta l$ (voir ci-dessus), on a

$$\Delta T = kT\Delta\alpha,$$

si bien qu'on obtient à la limite pour $\Delta\alpha \to 0$

$$\frac{dT}{d\alpha} = kT, \text{ ou } \frac{dT}{T} = k\,d\alpha.$$

Intégrant par rapport à la variable α et prenant la totalité de l'arc de contact AB quand l'angle α croît dans le sens indiqué plus haut (de A vers B), on obtient

$$\int_{Q_0}^{Q} \frac{dT}{T} = k\int_0^{\alpha} d\alpha, \text{ ou } \ln\frac{Q}{Q_0} = k\alpha$$

et en définitive

$$\frac{Q}{Q_0} = e^{k\alpha} \text{ ou } Q_0 = Qe^{-k\alpha}. \qquad (25.8)$$

C'est la formule d'Euler, qui fournit la solution du problème posé.

Pour le cas d'équilibre, on peut l'écrire aussi en utilisant les tensions T, car les forces Q et Q_0 se présentent dans ces conditions comme les tensions T sur le brin tendu et T_0 sur le brin libre du fil. Ce faisant, on doit se rappeler toutefois qu'une telle confusion des forces actives extérieures et des tensions ne peut être tolérée qu'en cas d'équilibre, et encore sous la réserve que la tension représente soit une force extérieure P transportée le long du fil inextensible

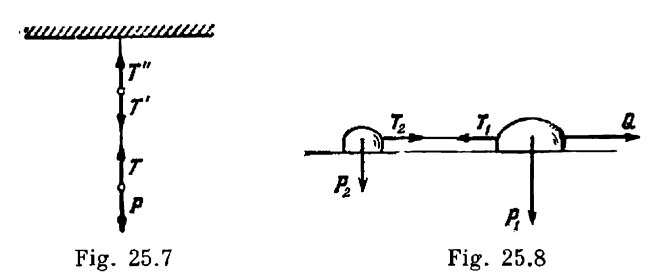


Fig. 25.7 Fig. 25.8

en son point quelconque (fig. 25.7), soit la réaction T du fil, soit enfin l'ensemble des forces intérieures T', T'' qui se font équilibre en chaque point du fil.

L'exemple suivant confirme qu'on ne doit pas confondre les forces actives extérieures et les tensions lorsqu'il y a mouvement.

Exemple 25.4. Deux points matériels de poids P_1 et P_2 (fig. 25.8) sont liés par un fil inextensible AB, placés sur un plan horizontal et mis en mouvement par une force horizontale Q.

Solution. Envisageant le mouvement du système dans son ensemble, nous obtenons en vertu de la deuxième loi de Newton

$$\frac{P_1+P_2}{g} w = Q,$$

d'où nous déduisons la valeur de l'accélération

$$w = \frac{Q}{P_1+P_2} g.$$

D'autre part, envisageant le mouvement d'un point isolé, par exemple du point B, nous trouvons la force de tension

$$T_2 = \frac{P_2}{g} w,$$

d'où

$$T_2 = T_1 = \frac{P_2}{P_1+P_2} Q.$$

Puisque

$$\frac{P_2}{P_1+P_2} < 1,$$

T est toujours plus petite que Q, et elle est d'autant plus petite que le poids P_1 est plus grand devant le poids P_2.

D'autre part, l'exemple que l'on vient de considérer et les raisonnements exposés dans l'introduction à ce chapitre montrent qu'on doit abandonner aussi bien l'hypothèse selon laquelle les forces extérieures sont égales à zéro et les forces de tension sont non nulles. Toute tentative d'assimiler ces dernières tant aux tensions exercées sur la portion terminale du fil qu'aux forces de réaction conduit à assujettir ces forces et leur existence même directement aux forces actives extérieures appliquées.

§ 2. Eléments de dynamique du fil parfait inextensible

2.1. Equation vectorielle du mouvement du fil. Considérons le mouvement d'un élément du fil inextensible Δs soumis à l'action d'un champ de forces stationnaires $\boldsymbol{F}$ rapportées à l'unité de masse du fil, ainsi qu'aux tensions $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{T}_1$ appliquées à ses extrémités (fig. 25.9). On a comme précédemment $\boldsymbol{T}_1 = -\boldsymbol{T} + \Delta\boldsymbol{T}$. Si $\boldsymbol{w}^*$ est l'accélération de l'élément Δs et $\Delta m = \mu\Delta s$ sa masse, on a d'après la deuxième loi de Newton

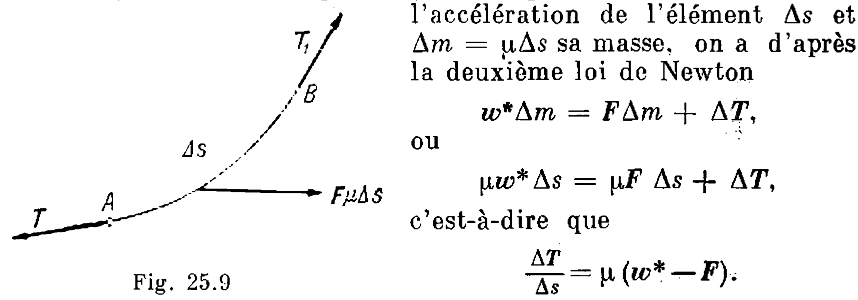


Fig. 25.9

$$\boldsymbol{w}^*\Delta m = \boldsymbol{F}\Delta m + \Delta\boldsymbol{T},$$

ou

$$\mu\boldsymbol{w}^*\Delta s = \mu\boldsymbol{F}\,\Delta s + \Delta\boldsymbol{T},$$

c'est-à-dire que

$$\frac{\Delta\boldsymbol{T}}{\Delta s} = \mu\,(\boldsymbol{w}^* - \boldsymbol{F}).$$

Passant à la limite pour $\Delta s \to 0$, on obtient l'équation vectorielle du mouvement du fil:

$$\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial s} = \mu\,(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{F}). \tag{25.9}$$

2.2. Cas de mouvement stationnaire. Considérons un mouvement du fil qui se caractérise par les propriétés suivantes:

1° la courbe figurée par le fil se déplace en translation dans l'espace sans changer de configuration;

2° le fil lui-même effectue un mouvement dit de contournage, c'est-à-dire se déplace le long de cette courbe en épousant strictement son contour.

Nous adopterons la terminologie proposée par A. Minakov qui désigne le mouvement de ce type sous le terme *mouvement stationnaire*. Ecrivons l'équation (25.9) pour le cas envisagé sous la forme

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial s} = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} - \boldsymbol{F} \tag{25.10}$$

et décomposons la vitesse v d'un point du fil en vitesse relative (de contournage) u et vitesse d'entraînement v_e, de sorte que

$$v = u + v_e.$$

Dérivant cette égalité par rapport au temps et décomposant ensuite les accélérations $\partial u/\partial t$ et $\partial v_e/\partial t$ suivant les directions des vecteurs τ, n, b dont l'origine est le point considéré, nous obtiendrons

$$w = \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + w_\tau^e\right)\tau + \left(\frac{u^2}{\rho} + w_n^e\right) n + w_b^e b,$$

où w_τ^e, w_n^e, w_b^e sont les projections du vecteur accélération d'entraînement w_e du point du fil sur les axes intrinsèques et ρ le rayon de courbure du fil.

Reprenant l'équation (25.10) et désignant les projections de la force sur les axes indiqués respectivement par F_τ, F_n, F_b, nous obtenons trois équations

$$\begin{gathered} \frac{1}{\mu}\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + w_\tau^e - F_\tau, \\ \frac{1}{\mu}\frac{T}{\rho} = \frac{u^2}{\rho} + w_n^e - F_n, \\ 0 = w_b^e - F_b. \end{gathered} \tag{25.11}$$

Reportons dans la deuxième équation le terme u^2/ρ dans le premier membre:

$$\frac{1}{\mu}\frac{T - \mu u^2}{\rho} = w_n^e - F_n.$$

Désignons $T^* = T - \mu u^2$, remarquons qu'on a pour le fil inextensible $\partial u/\partial s = 0$ et admettons que $\mu = \text{const}$. Il vient alors

$$\frac{\partial T^*}{\partial s} = \frac{\partial T}{\partial s}.$$

Les équations (25.11) deviennent alors

$$\begin{gathered} \frac{1}{\mu}\frac{\partial T^*}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} + w_\tau^e - F_\tau, \\ \frac{1}{\mu}\frac{T^*}{\rho} = w_n^e - F_n, \\ 0 = w_b^e - F_b. \end{gathered} \tag{25.12}$$

Si le mouvement de contournage du fil est en outre uniforme, nous avons $\partial u/\partial t = 0$; introduisant les notations

$$w_\tau^e - F_\tau = -F_\tau^*, \quad w_n^e - F_n = -F_n^*, \quad w_b^e - F_b = -F_b^*,$$

nous mettons les équations (25.12) sous la forme

$$\frac{\partial T^*}{\partial s} = -\mu F_\tau^*, \quad \frac{T^*}{\rho} = -\mu F_n^*, \quad 0 = -\mu F_b^*. \tag{25.13}$$

30*

Ces équations sont identiques en apparence aux équations statiques de l'équilibre du fil (voir (25.3)).

Ainsi donc, *quand un fil parfait inextensible homogène animé d'un mouvement de contournage relatif uniforme se déplace en translation dans son mouvement d'entraînement, on constate que la forme et la tension du fil vérifient les équations générales de l'équilibre d'un fil, et qu'aux forces appliquées viennent s'ajouter les forces d'inertie dans le mouvement d'entraînement* (force d'entraînement de Coriolis, voir ch. XVI, n° 1.1), *la tension en chaque point du fil étant augmentée d'une quantité constante, égale à* μu^2, *par rapport à sa valeur statique.*

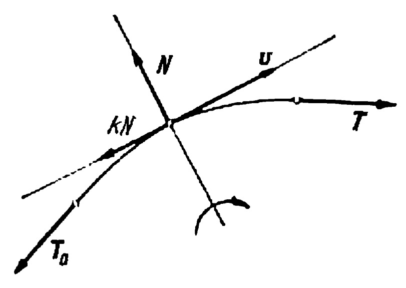


Fig. 25.10

Si de surcroît le mouvement d'entraînement est uniforme lui aussi, on a $w^e_\tau = w^e_n = w^e_b = 0$, $F^*_\tau = F_\tau$, $F^*_n = F_n$, $F^*_b = F_b$, ce qui veut dire que le fil parfait inextensible homogène plongé dans le champ de forces donné conserve la même forme qu'en repos.

Si enfin, en l'absence de toute force $\boldsymbol{F}$, le fil sans mouvement de contournage peut conserver une forme donnée, le fil qui se déplace le long de lui-même se caractérise, sous la condition restrictive consentie plus haut, par un effet de viscosité, dit effet d'Etkine-Radinger. Il s'agit d'une propriété selon laquelle un fil conserve sa forme primitive s'il se déplace uniformément le long de lui-même avec une vitesse égale à la vitesse de propagation des ondes transversales suivant ce fil en l'absence de tout champ de forces.

2.3. Mouvement et tension du fil qui glisse le long d'une courbe plane dépolie fixe. Généralisation de la formule d'Euler proposée par A. Minakov. Supposons qu'un fil parfait inextensible se déplaçant sur une surface dépolie avec un coefficient de frottement k épouse un arc sur cette surface (fig. 25.10). Considérant que le fil est inextensible ($\partial v/\partial s = 0$) et que le mouvement d'entraînement est inexistant et compte tenu des directions de la force de frottement kN et de la force de réaction N, nous pouvons mettre les équations (25.11) sous la forme

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \mu kN + \mu w, \quad \frac{T}{\rho} = \mu N + \frac{\mu v^2}{\rho}, \tag{25.14}$$

où v est le module du vecteur vitesse du fil, supposé constant en chaque point du fil ; w est l'accélération dans le mouvement de contournage, c'est-à-dire l'accélération tangentielle des points du fil. Explicitons N dans la seconde équation :

$$N = \frac{T - \mu v^2}{\mu\rho}. \tag{25.15}$$

Précisons maintenant la position du problème en admettant que le fil parfait inextensible glisse le long d'une courbe plane dépolie de forme quelconque. Portant l'expression de N dans la première équation (25.14) et mettant $\rho = \rho(s)$ conformément aux conditions énoncées, nous obtenons

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{1}{\rho}[k(T - \mu v^2) + \mu\rho w],$$

ou

$$\frac{\partial T}{\partial s} - T\frac{k}{\rho} + \mu\left(\frac{kv^2}{\rho} - w\right) = 0. \qquad (25.16)$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, qui après la substitution connue

$$T^* = T - \mu v^2,$$

s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial T^*}{\partial \varphi} - kT^* = \mu w \rho.$$

Multipliant ses deux membres par $e^{-k\varphi}$, nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(T^* e^{-k\varphi}) = \mu w \rho e^{-k\varphi},$$

et après intégration

$$T = \mu v^2 + \left(\mu w \int \rho e^{-k\varphi}\, d\varphi + C\right) e^{k\varphi}. \qquad (25.17)$$

La constante C se définit par la condition $T = T_0$ pour $\varphi = 0$. Dans le cas particulier où $\rho = \text{const} = R$, c'est-à-dire lorsque le fil épouse un arc de circonférence de rayon constant R, intercepté par l'angle φ, la valeur de T, avec la constante C définie comme décrit, est égale à

$$T = \mu v^2 + (T_0 - \mu v^2)\, e^{k\varphi} + \frac{\mu w R}{k}(e^{k\varphi} - 1). \qquad (25.18)$$

C'est la f o r m u l e d'E u l e r g é n é r a l i s é e.

Passons en revue ses c a s p a r t i c u l i e r s:

1° *Le mouvement de contournage du fil est uniforme*, $v = \text{const} = v_0$, $w = 0$. On a alors d'après la formule (25.18)

$$T = \mu v_0^2 + (T_0 - \mu v_0^2)\, e^{k\varphi}. \qquad (25.19)$$

2° On considère l'*instant initial du mouvement du fil* où $v = 0$, $w \neq 0$. Dans ces conditions

$$T = T_0 e^{k\varphi} + \frac{\mu w R}{k}(e^{k\varphi} - 1). \qquad (25.20)$$

3° *Aucune tension n'est appliquée au brin libre du fil*, $T_0 = 0$. Il vient alors

$$T = \mu\frac{R}{k}\left(w - \frac{kv^2}{R}\right)(e^{k\varphi} - 1). \qquad (25.21)$$

A l'instant initial du mouvement d'un tel fil, on a en plus de ce qui vient d'être indiqué

$$v = 0,$$

et il vient *dans ce cas précis*

$$T = \frac{\mu R w}{k} (e^{k\varphi} - 1). \qquad (25.22)$$

Les formules (25.21) et (25.22) donnent lieu à une conclusion physique importante: même si le brin libre du fil est non fixé et n'éprouve aucune tension, son brin opposé est soumis à une tension distincte de zéro tant pendant le mouvement non uniforme du fil qu'à l'instant initial du mouvement.

Il serait intéressant enfin de connaître la réaction normale de la surface N. Portant l'expression (25.18) de T dans la formule (25.15), on obtient

$$N = \frac{T_0 - \mu v^2}{\mu R} e^{k\varphi} + \frac{w}{k} (e^{k\varphi} - 1). \qquad (25.23)$$

Dans le mouvement uniforme on a $w = 0$ et

$$N = \frac{T_0 - \mu v^2}{\mu R} e^{k\varphi}.$$

Il s'ensuit que le module de la réaction N pour $\varphi = 0$, c'est-à-dire la valeur de la pression sur l'arc de courbe en son point origine, est

$$N(0) = \frac{T_0 - \mu v^2}{\mu R}.$$

Un intérêt particulier est présenté par le cas de mouvement du fil avec une vitesse constante,

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}.$$

Il est évident qu'avec cette vitesse, la pression est nulle en tout point où le fil mobile est en contact avec la circonférence.

Or, quand il s'agit d'une analyse plus précise, les calculs précédents s'avèrent trop grossiers, car la force de frottement de glissement y est définie par la formule d'Amontons $F_{fr} = kN$ et non par la formule de Coulomb $F_{fr} = kN + A$ qui tient compte de la cohésion moléculaire. Une généralisation plus poussée des formules citées, dues à A. Minakov, a été proposée par V. Chtchedrov pour le cas où la force de frottement se définit par la formule à deux termes.

ANNEXE

Démonstration simplifiée des théorèmes généraux de la dynamique du système de points matériels en mouvement absolu

Nous exposons dans la présente Annexe les démonstrations simplifiées des théorèmes généraux de la dynamique du système, sans jamais faire intervenir (à la différence du ch. XIX) l'équation générale de la dynamique. Soulignons que les énoncés des deux premiers théorèmes, déduits par la méthode simplifiée, contiennent en général les réactions de liaison (toujours à la différence du ch. XIX).

A) Théorèmes de la variation de la quantité de mouvement totale du système de points matériels et théorème du mouvement de son centre de masse. Soit un système de n points matériels (ch. XVII, nº 1.1) doués de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Supprimons les liaisons en remplaçant leurs actions par leurs réactions, conformément à l'axiome exposé dans le chapitre XVII, nº 1.2. Désignons par $F_\nu^e = X_\nu^e i + Y_\nu^e j + Z_\nu^e k$ la résultante de toutes les forces extérieures, tant actives (connues) que passives (réactions de liaison), appliquées à un point m_ν. Désignons ensuite par $F_\nu^{(i)}$ la résultante de toutes les forces intérieures exercées sur le même point (fig. A.1) ($\nu = 1, 2, \ldots, n$).

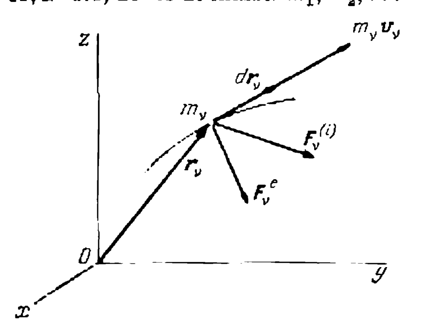


Fig. A.1

Théorème de la variation de la quantité de mouvement totale du système de points matériels (sous forme différentielle). *La dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement totale du système de points matériels est égale à la résultante générale de toutes les forces extérieures* (actives et passives) *exercées sur le système.*

Démonstration. Le mouvement de chaque point du système est régi par la deuxième loi de Newton

$$m_\nu \frac{dv_\nu}{dt} = F_\nu^e + F_\nu^{(i)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

Faisons la somme géométrique de ces égalités vectorielles:

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{dv_\nu}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu^e + \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu^{(i} . \tag{2}$$

Le premier membre de cette dernière égalité admet la transformation suivante:

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{dv_\nu}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu v_\nu = \frac{dQ}{dt}.$$

En effet, premièrement, la dérivée de la somme géométrique des vecteurs est égale à la somme géométrique des dérivées de ces vecteurs, les masses des points étant supposées constantes; deuxièmement, le vecteur $\sum m_\nu v_\nu$ est le vecteur quantité de mouvement totale Q du système de points matériels (ch. XIX, n° 1.1). En regardant le second membre de (2), nous remarquons que la résultante générale des forces intérieures du système de points matériels reste égale à zéro à chaque instant en vertu de la troisième loi de Newton,

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu^{(i)} = 0,$$

car les composantes des forces intérieures se manifestant entre deux points quelconques du système sont égales en module et de sens opposés. Désignons par R^e la *résultante générale des forces extérieures* (y compris les réactions de liaison) appliquées aux points du système:

$$R^e = \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu^{(e)}. \tag{3}$$

Nous avons donc, en vertu de (2), à chaque instant du mouvement du système

$$\frac{dQ}{dt} = R^e. \tag{4}$$

Le théorème est démontré.

Théorème de la variation de la quantité de mouvement totale du système de points matériels (sous forme intégrale). *La variation de la projection de la quantité de mouvement totale du système sur un axe fixe ou inertiel pendant un intervalle de temps donné est égale à la projection de l'impulsion de la résultante générale des forces extérieures sur le même axe pendant le même intervalle de temps.*

Démonstration. Multiplions l'identité (4) par dt:

$$dQ = R^e \, dt.$$

Faisons l'intégration à partir de l'instant initial $t = 0$ jusqu'à l'instant final t. Il vient

$$Q(t) - Q(0) = \int_0^t R^e dt. \tag{5}$$

Ici

$$Q(t) = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu v_\nu(t), \quad Q(0) = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu v_\nu(0),$$

et l'intégrale figurant dans le second membre de (5) est appelée impulsion (ch. XV, n° 1.1) de la résultante générale des forces extérieures appliquées au système. Projetant l'égalité vectorielle (5) sur les axes fixes (ou inertiels,

voir ch. XIII, nº 1.2) Ox, Oy, Oz, on obtient

$$Q_x(t) - Q_x(0) = \int_0^t R_x^e\,dt,$$
$$Q_y(t) - Q_y(0) = \int_0^t R_y^e\,dt, \tag{6}$$
$$Q_z(t) - Q_z(0) = \int_0^t R_z^e\,dt,$$

où

$$Q_x(t) = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu v_x^\nu(t), \quad Q_x(0) = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu v_x^\nu(0), \quad R_x^e = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^e.$$

Pour les projections sur les axes Oy, Oz on a des formules analogues. Le théorème est démontré.

Théorème du mouvement du centre de masse du système. *Le centre de masse du système de points matériels se déplace comme se déplacerait un point matériel en lequel serait concentrée toute la masse du système et qui serait exposé à une force égale à la résultante générale des forces extérieures* (les réactions de liaison y comprises) *appliquées au système.*

Démonstration. Conformément au lemme démontré dans le chapitre XIX, nº 1.1, la quantité de mouvement totale du système est égale au produit de sa masse par la vitesse de son centre de masse v_C,

$$Q = Mv_C \qquad (M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n).$$

Portons cette expression dans la formule (4); il vient

$$M\frac{dv_C}{dt} = R^e, \quad \text{ou} \quad Mw_C = R^e. \tag{7}$$

Projetons cette identité sur les axes fixes (ou inertiels) Ox, Oy, Oz. Il vient

$$M\frac{d^2x_C}{dt^2} = R_x^e = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^e, \quad M\frac{d^2y_C}{dt^2} = \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu^e, \quad M\frac{d^2z_C}{dt^2} = \sum_{\nu=1}^{n} Z_\nu^e, \tag{8}$$

où x_C, y_C, z_C sont les coordonnées du centre de masse C du système par rapport à $Oxyz$. Le théorème est démontré.

Les trois théorèmes qu'on vient de démontrer peuvent fournir des intégrales premières, et sous certaines conditions spéciales, conduire aux lois de conservation de la quantité de mouvement totale ou de sa projection sur l'axe donné (voir ch. XIX, nº 1.4).

B) Théorème du moment cinétique du système de points matériels. *La dérivée par rapport au temps du moment cinétique du système par rapport à un centre fixe (axe fixe) est égale au moment résultant des forces extérieures appliquées au système par rapport au même centre fixe (axe fixe).*

Démonstration. Multiplions les identités (1) vectoriellement à gauche par les rayons vecteurs r_ν (voir fig. A.1):

$$\left[r_\nu,\ m_\nu\frac{dv_\nu}{dt}\right] = [r_\nu,\ F_\nu^e] + [r_\nu,\ F_\nu^{(i)}] \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Par analogie à ce qu'on a vu dans le chapitre XV, n° 2.2, on a d'après la formule (3) en page 143

$$\frac{d}{dt}[r_\nu, m_\nu v_\nu] = \left[\frac{dr_\nu}{dt}, m_\nu v_\nu\right] + \left[r_\nu, m_\nu \frac{dv_\nu}{dt}\right].$$

Or, le premier terme du second membre est nul, car c'est le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires $dr_\nu/dt = v_\nu$ et $m_\nu v_\nu$. De ce fait, la formule (9) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d}{dt}[r_\nu, m_\nu v_\nu] = [r_\nu, F_\nu^e] + [r_\nu, F_\nu^{(i)}] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Faisons la somme géométrique de ces égalités vectorielles. Il vient

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n}[r_\nu, m_\nu v_\nu] = \sum_{\nu=1}^{n}[r_\nu, F_\nu^e] + \sum_{\nu=1}^{n}[r_\nu, F_\nu^{(i)}]. \tag{10}$$

Expliquons la signification mécanique de chacune des expressions que nous venons d'écrire. L'expression sous le signe de la dérivée dans le premier membre est K_O, moment cinétique du système par rapport au centre O (voir ch. XIX, n° 2.1), égal à la somme géométrique des moments cinétiques des points du système par rapport au même centre:

$$K_O = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{Mom}\,(m_\nu v_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n}[r_\nu, m_\nu v_\nu].$$

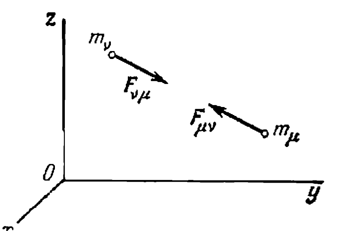


Fig. A.2

La première somme dans le second membre de (10) est le *moment résultant* M_O^e *des forces extérieures* exercées sur le système (les réactions y comprises) par rapport au centre O:

$$M_O^e = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{Mom}_O F_\nu^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{n}[r_\nu, F_\nu^e].$$

La deuxième somme dans le second membre de (10) est le moment résultant $M_O^{(i)}$ des forces intérieures du système de points matériels par rapport au centre O. Regardant les forces intérieures au sein d'un même système, on voit s'annuler non seulement leur résultante générale mais aussi le moment résultant par rapport à un centre fixe quelconque, et ceci à chaque instant. En effet, les composantes des forces intérieures manifestées entre deux points quelconques du système obéissent à la troisième loi de Newton, ce qui veut dire qu'elles sont égales en module et orientées suivant une même droite mais en sens opposés; on a donc

$$F_{\nu\mu} + F_{\mu\nu} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{Mom}_O F_{\nu\mu} + \mathbf{Mom}_O F_{\mu\nu} = 0 \qquad (\nu, \mu = 1, 2, \ldots, n;\ \nu \neq \mu)$$

(voir fig. A.2). On a de cette façon non seulement

$$R^{(i)} = \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu^{(i)} = \sum_{\substack{\nu,\mu=1\\(\nu>\mu)}}^{n} (F_{\nu\mu} + F_{\mu\nu}) = 0$$

mais aussi

$$M_O^{(i)} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{Mom}_O F_\nu^{(i)} = \sum_{\substack{\nu,\mu=1 \\ (\nu>\mu)}}^{n} (\mathbf{Mom}_O F_{\nu\mu} + \mathbf{Mom}_O F_{\mu\nu}) = 0.$$

L'identité (10) s'écrit sous forme définitive

$$\frac{dK_O}{dt} = M_O^e \tag{11}$$

et traduit le même théorème énoncé sous forme vectorielle. Projetant (11) sur les axes fixes (ou inertiels) Ox, Oy, Oz et tenant compte des formules (5.6) et (19.17), on obtient

$$\frac{dK_{Ox}}{dt} = M_{Ox}^e, \quad \frac{dK_{Oy}}{dt} = M_{Oy}^e, \quad \frac{dK_{Oz}}{dt} = M_{Oz}^e. \tag{12}$$

Ici par exemple K_{Oz} est le moment cinétique du système de points matériels par rapport à l'axe fixe Oz,

$$K_{Oz} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{mom}_{Oz}\,(m_\nu v_\nu),$$

et M_{Oz}^e le moment résultant des forces extérieures appliquées au système (y compris les réactions de liaison) par rapport au même axe,

$$M_{Oz}^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{mom}_{Oz}\, F_\nu^e.$$

Les formules (12) expriment le théorème du moment cinétique énoncé sous forme scalaire. Le théorème est démontré.

Les deux théorèmes démontrés sous B) peuvent fournir des intégrales premières, et sous certaines conditions spéciales, conduire aux lois de conservation du moment cinétique du système par rapport à un centre fixe (axe fixe) (voir ch. XIX, n° 2.3).

C) Théorème de la variation de l'énergie cinétique du système de points matériels (sous forme différentielle). *La différentielle de l'énergie cinétique du système est égale à la somme des travaux élémentaires de toutes les forces exercées sur ce système, tant extérieures* (les forces de liaison y comprises) *qu'intérieures, dans le déplacement réel du système.*

D é m o n s t r a t i o n. Multiplions scalairement les équations vectorielles (1) par les déplacements réels élémentaires des points du système $d\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu\,dt$ (voir fig. A.1):

$$m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu, d\boldsymbol{v}_\nu) = (\boldsymbol{F}_\nu^e, d\boldsymbol{r}_\nu) + (\boldsymbol{F}_\nu^{(i)}, d\boldsymbol{r}_\nu) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

Puisque le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de son module, $(\boldsymbol{v}_\nu, \boldsymbol{v}_\nu) = \boldsymbol{v}_\nu^2 = v_\nu^2$, on obtient en dérivant la dernière identité

$$2\,(\boldsymbol{v}_\nu, d\boldsymbol{v}_\nu) = 2v_\nu\,dv_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Le premier membre de (13) se transforme donc en

$$m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu, d\boldsymbol{v}_\nu) = m_\nu v_\nu\,dv_\nu = d\left(\frac{m_\nu v_\nu^2}{2}\right) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Faisant la somme des égalités (13), nous obtenons pour chaque instant de mouvement du système

$$d \sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_\nu v_\nu^2}{2} = \sum_{\nu=1}^{n} (F_\nu^e, dr_\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} (F_\nu^{(i)}, dr_\nu). \tag{14}$$

La somme sous le signe de la différentielle est l'énergie cinétique du système

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu v_\nu^2.$$

Les expressions dans le second membre de (14) sont les sommes des travaux élémentaires des forces extérieures et des forces intérieures du système dans son déplacement réel. Le théorème est démontré.

Théorème de la variation de l'énergie cinétique du système de points matériels (sous forme intégrale). *La variation de l'énergie cinétique du système est égale à la somme des travaux de toutes les forces appliquées au système, tant extérieures* (les réactions de liaison y comprises) *qu'intérieures, dans le déplacement donné du système.*

Démonstration. Par intégration de l'égalité différentielle (14), nous obtenons

$$T - T_0 = A^e + A^{(i)}. \tag{15}$$

Ici les intégrales curvilignes

$$A^e = \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \sum_{\nu=1}^{n} (F_\nu^e, dr_\nu) = \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu^e \, dx_\nu + Y_\nu^e \, dy_\nu + Z_\nu^e \, dz_\nu),$$

$$A^{(i)} = \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \sum_{\nu=1}^{n} (F_\nu^{(i)}, dr_\nu) = \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu^{(i)} \, dx_\nu + Y_\nu^{(i)} \, dy_\nu + Z_\nu^{(i)} \, dz_\nu)$$

expriment respectivement le travail des forces extérieures et le travail des forces intérieures dans le déplacement du système à partir de la configuration initiale Γ_0 jusqu'à la configuration finale Γ. Le théorème est démontré.

Remarque sur le travail des forces intérieures. Dans un système invariable de points matériels (par exemple dans un solide), le travail des forces intérieures est nul pour tout déplacement réel du système (voir ch. XIX, nº 3.3). Pour un tel système les égalités (14) et (15) s'écriront sous la forme

$$dT = \sum_{\nu=1}^{n} (F_\nu^e, dr_\nu), \tag{14a}$$

$$T - T_0 = A^e = \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu^e \, dx_\nu + Y_\nu^e \, dy_\nu + Z_\nu^e \, dz_\nu). \tag{15a}$$

Remarque sur le travail des forces extérieures. Si les liaisons imposées au système sont stationnaires (c'est-à-dire ne dépendent pas explicitement du temps) et parfaites (voir ch. XVII, nºs 1.1 et 1.2), tous

ses déplacements réels figurent parmi les déplacements virtuels, si bien que la somme des travaux des réactions de liaison est nulle sur tout déplacement réel en vertu de l'axiome des liaisons parfaites. Dans ce cas le travail des forces extérieures se réduit au travail des forces extérieures actives exercées sur le système,

$$A^e = A^{(e)} = \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu^{(e)}\, dx_\nu + Y_\nu^{(e)}\, dy_\nu + Z_\nu^{(e)}\, dz_\nu),$$

où $F_\nu^{(e)} = X_\nu^{(e)}\boldsymbol{i} + Y_\nu^{(e)}\boldsymbol{j} + Z_\nu^{(e)}\boldsymbol{k}$ est la résultante des forces extérieures actives appliquées à un ν-ième point du système.

Le lecteur trouvera quelques exemples d'application des théorèmes généraux de dynamique du système dans le chapitre XIX.

BIBLIOGRAPHIE

1. Efimov N., Eléments de géométrie analytique, 4e éd., M., « Mir », 1976.
2. Kotkine G., Serbo V., Recueil de problèmes de mécanique classique, M., « Mir », 1981.
3. Kouznétsov B., Causerie sur la relativité, M., « Mir », 1970.
4. Landau L. et Lifchitz E., Physique théorique. Tome 1. Mécanique, M., « Mir », 1981.
5. Mechtcherski I., Recueil d'exercices de mécanique rationnelle, M., « Mir », 1973.
6. Piskounov N., Calcul différentiel et intégral, 8e éd., M., « Mir », 1980.
7. Sédov L., Similitude et dimension en mécanique, M., « Mir », 1977.
8. Targ S., Eléments de mécanique rationnelle, 3e éd., M., « Mir », 1978.
9. Vygodski M., Aide-mémoire de mathématiques supérieures, M., «Mir », 1973.
10. Yavorski B. et Detlaf A., Aide-mémoire de physique, M., « Mir », 1977.

INDEX ALPHABÉTIQUE

TABLE DES MATIÈRES